Brane coproducts and their applications

若月　駿　(東京大学 数理科学研究科)

概　要
本稿では，ストリング作用素，特にループ余積のブレーントポロジーへの一般化について解説する．一般化の鍵は，ある意味での写像空間の「有限次元性」であり，異なる観点に着目することで二種類の「ブレーン余積」を構成する．また，それらを写像空間のコホモロジーにおけるカップ積のある種の消滅に応用する．

1. 研究の背景

Chas-Sullivan[CS99] は，M が m 次元有向連結閉多様体の場合にその自由ループ空間 $LM = \mathrm{Map}(S^1, M)$ のホモロジー群上に**ループ積** $H_*(LM \times LM) \to H_{*-m}(LM)$ を定義した．ループ積は,「基点付きループ空間の積構造から定義される Pontrjagin 積」と「多様体のホモロジー群における交叉積」を組み合わせたものである．Pontrjagin 積は M がどのような位相空間であっても存在するが，交叉積は M が多様体であること，特に有限次元性を使って定義されるものである．さらに Cohen-Godin[CG04] はループ積を一般化して，**ループ余積** $H_*(LM) \to H_{*-m}(LM \times LM)$ などのストリング作用素を構成し，これらが $(1+1)$ 次元の位相的量子場の理論 (TQFT) をなすことを証明した．これらの作用素が自由ループ空間のホモロジーに豊富な代数的構造を与えることが期待されていた．ところが玉乃井 [Tam10] により，ループ余積がほとんど自明であることや，ループ余積とループ積の合成が常に自明であることが証明された．つまり，ストリング作用素は豊富な代数的構造ではないことが分かったのである．

そこで，2 つの方向への一般化が行われた．1 つは， Félix-Thomas[FT09] による，M が Gorenstein 空間の場合への一般化である．ここで空間 M の持つ Gorenstein 性とは，多様体が持っていた有限次元性を拡張する性質であり，M の特異コチェイン代数がある代数的な条件を満たすことで定義される．これは有向連結閉多様体，コンパクト連結リー群の分類空間，さらにはある種の Borel 構成などを含んでおり，空間の広いクラスを与える．Félix-Thomas の方法によるループ余積の定義の鍵は，fibration に沿って写像空間へと交叉積を持ち上げることである．ここでは「交叉積」は，ある種の Ext 加群の元であり，対角埋め込み $\Delta\colon M \to M \times M$ が Gorenstein 空間の意味で有限余次元であることから定まる shriek map である．

もう一方の一般化として，Sullivan-Voronov[CHV06, Section 5] によるブレーン積が挙げられる．彼らは一般の次元の球面からの写像空間 $S^kM = \mathrm{Map}(S^k, M)$ に対して，そのホモロジーの上にブレーン積と呼ばれる積を定義した．これは，ループ積のときと同様に交叉積と Pontrjagin 積を組み合わせたものとして構成できる．ところが，S^kM 上の代数的構造はループ空間の場合と比べて乏しく，特に「ブレーン余積」と呼ぶべき余積は S^kM 上には構成されていなかった．

本稿では Félix-Thomas の手法を拡張することで二種類の「ブレーン余積」を構成し，その応用として $H^*(S^kM)$ におけるカップ積のある種の消滅を証明する．

2. DGA 上の Ext 加群

まず準備として，DGA (differential graded algebra) 上の Ext 加群の定義と基本的な性質を説明する．以下 $\mathbb{K}$ を体とし，(A, d) を $\mathbb{K}$ 上の DGA とする．

定義 1 (c.f. [FHT01, Section 6])**.** (A, d) 加群 (P, d) が (A, d)**-semifree** 加群であるとは，(P, d) の部分 (A, d) 加群の列

$$0 = P(-1) \subset P(0) \subset P(1) \subset \cdots \subset P(n-1) \subset P(n) \subset \cdots \subset P$$

が存在して，次を満たすことをいう．

- $P = \bigcup_n P(n)$
- 各 n について $(P(n)/P(n-1), d)$ は自由 (A, d) 加群である．

これは，(通常の) 環上の加群の理論における，自由加群からなる複体の一般化であり，この場合にも以下のような同様の方法で Ext 加群が定義できる．

定義 2. (L, d), (N, d) を (A, d) 加群とする．

- 擬同型 $\eta\colon (P, d) \xrightarrow{\simeq} (L, d)$ であって (P, d) が (A, d)-semifree であるものを (L, d) の (A, d)**-semifree 分解**という．
- (A, d)-semifree 分解 $\eta\colon (P, d) \xrightarrow{\simeq} (L, d)$ を用いて，

$$\mathrm{Ext}_A(L, N) = H^*(\mathrm{Hom}_A(P, N))$$

と定義する．このとき自然な線型写像 $\mathrm{Ext}_A(L, N) \to \mathrm{Hom}_{H^*(A)}(H^*(L), H^*(N))$ を $H^*(-)$ と書く．

続いて，pullback 図式と Ext 加群の関係について述べる．以下本稿では，全ての空間のコホモロジーは有限型であると仮定する． $p\colon E \to B$ が (Serre) fibration で，B が単連結であるような pullback 図式

$$\begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow p \\ A & \longrightarrow & B \end{array}$$

を考える．このとき特異コチェイン代数 $C^*(-)$ について線形写像

$$p^\star\colon \mathrm{Ext}^l_{C^*(B)}(C^*(A), C^*(B)) \to \mathrm{Ext}^l_{C^*(E)}(C^*(D), C^*(E))$$

が以下のようにして定義される．まず，$C^*(A)$ の $C^*(B)$-semifree 分解 (P, d) をとる．このとき， $\mathrm{id}_{C^*(E)}$ とのテンソル積をとることで線形写像

$$\mathrm{Hom}_{C^*(B)}(P, C^*(B)) \to \mathrm{Hom}_{C^*(E)}(C^*(E) \otimes_{C^*(B)} P, C^*(E) \otimes_{C^*(B)} C^*(B)) \qquad (3)$$

が得られるが，Eilenberg-Moore の定理 [Smi67, Theorem 3.2] より $C^*(E) \otimes_{C^*(B)} P$ は $C^*(D)$ の $C^*(E)$-semifree 分解である．従って，(3) のコホモロジーをとることで，$p^\star$ が定義される．

最後に， Poincaré 双対性と Ext 加群の関係について述べる．

命題 4 ([FT09, Lemma 1])**.** N を n 次元の Poincaré 双対空間，X を弧状連結な空間とし，連続写像 $f\colon X \to N$ を考える．このとき，自然に定義される次の写像は同型である．

$$\mathrm{Ext}^{l}_{C^*(N)}\left(C^*(X), C^*(N)\right) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\left(H^{n-l}(X), H^n(N)\right)$$

3. 対称ブレーン余積

3.1. Gorenstein 空間

Gorenstein 空間とは，Poincaré 双対空間の一般化として以下のように定義される．

定義 5 ([FHT88])**.** 単連結な空間 M が

$$\mathrm{Ext}^{k}_{C^*(M)}(\mathbb{K}, C^*(M)) \cong \begin{cases} \mathbb{K} & k = m \\ 0 & k \neq m \end{cases}$$

を満たすとき，M を次元 m の ($\mathbb{K}$)-**Gorenstein 空間**という．

基本的な具体例として，以下の2つが挙げられる．特に (b) より，Gorenstein 空間の次元は負の整数にも成り得ることが分かる．

例 6. (a) 命題 4 より，Poincaré 双対空間 (特に有向連結閉多様体) は Gorenstein 空間である．さらに Gorenstein 空間としての次元は，Poincaré 双対空間としての次元と一致する．

(b) コンパクト連結 Lie 群 G の分類空間 BG は Gorenstein 空間であり，その次元は $-\dim G$ である．

本稿，特に対称ブレーン余積の定義において重要な役割を果たす Gorenstein 空間のクラスが，以下の定理により与えられる．

定理 7 ([FHT88, Proposition 3.4, Proposition 5.2])**.** $\mathrm{ch}\,\mathbb{K} = 0$ とし，M を単連結空間で，$\bigoplus_n \pi_n(M) \otimes \mathbb{K}$ が有限次元なものとする．このとき M は Gorenstein 空間であり，その次元は $\sum_j |y_j| + \sum_i (1 - |x_i|)$ で与えられる．ここで，$\{x_i\}_{i=1}^{p}$ は $\pi_{\mathrm{even}}(M) \otimes \mathbb{K}$ の基底，$\{y_j\}_{j=1}^{q}$ は $\pi_{\mathrm{odd}} \otimes \mathbb{K}$ の基底であり，$|x_i|$ や $|y_j|$ はそれらの次数を表す．

また，これと [FHT88, Proposition 1.7] より，次の同値性が成り立つことを注意しておく．

命題 8. $k \geq 2$ とし，M を k 連結空間とする．このとき，$\Omega^{k-1}M$ が Gorenstein 空間であることと，$\bigoplus_n \pi_n(M) \otimes \mathbb{K}$ が有限次元であることは同値である．

3.2. 対称ブレーン余積の定義

この節では，一つ目のブレーン余積，すなわち対称ブレーン余積 (の双対) の定義を与える．なおこの節の内容は，$k = 1$ の場合は Félix-Thomas [FT09] によるものであり，$k \geq 2$ の場合が講演者によって得られた一般化である．

以下 M を k 連結な空間とする．ブレーン余積の構成は，次の図式を用いて行われる．

$$\begin{tikzcd} S^kM \arrow[d, "\mathrm{res}_0"] & S^kM \times_M S^kM \arrow[l, "\mathrm{comp}"'] \arrow[r, "\mathrm{incl}"] \arrow[d] & S^kM \times S^kM \\ S^{k-1}M & M \arrow[l, "c"] & \end{tikzcd} \tag{9}$$

ここで，res_0 は赤道 $S^{k-1} \subset S^k$ への制限写像，$c\colon M \to S^{k-1}M$ は定値写像としての埋め込みであり，左の四角形は pullback 図式である．

定義 10. 任意の元

$$\gamma \in \mathrm{Ext}^l_{C^*(S^{k-1}M)}\left(C^*(M), C^*(S^{k-1}M)\right)$$

を固定する．このとき γ に付随する**対称ブレーン余積**(の双対) $\delta^\vee_\gamma$ を以下の合成として定義する．

$$\delta^\vee_\gamma\colon H^*(S^kM \times S^kM) \xrightarrow{\mathrm{incl}^*} H^*(S^kM \times_M S^kM) \xrightarrow{H^*(\mathrm{res_0}^*\gamma)} H^{*+l}(S^kM)$$

対称ブレーン余積は，次の意味で対称的である．

命題 11 ([Wak19a, Proposition 6.4])**.** 任意の $\alpha, \beta \in H^*(S^kM)$ に対して，

$$\delta^\vee_\gamma(\alpha \times \beta) = (-1)^{|\alpha||\beta|}\delta^\vee_{\tau^*\gamma}(\beta \times \alpha)$$

が成立する．ここで，$\tau\colon S^{k-1}M \to S^{k-1}M$ は S^{k-1} の向きを反転させる写像から定まる写像であり，τ^* はそれが Ext 加群に誘導する線形写像である．

さて，ブレーン余積を M の情報のみから定めるためには，Ext 加群の性質を調べて l と γ を「うまく」指定する必要がある．まず簡単な場合として，以下の例が挙げられる．

例 12. $k = 1$ で，M が m 次元 Poincaré 双対空間の場合には，命題 4 より

$$\mathrm{Ext}^m_{C^*(M\times M)}(C^*(M), C^*(M \times M)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\left(H^{2m-m}(M), H^{2m}(M \times M)\right) \cong \mathbb{K}$$

となるので，γ はこの 1 次元ベクトル空間の生成元として定めれば良い．

より一般の場合には，次の定理を用いる．

定理 13 ([FT09, Theorem 12] ($k = 1$), [Wak, Theorem 3.1] ($k \geq 2$))**.**
以下のいずれかを仮定する．

(a) $k = 1$ で， M は Gorenstein 空間である．

(b) $k \geq 1$, $\mathrm{ch}\,\mathbb{K} = 0$ で，$\Omega^{k-1}M$ は Gorenstein 空間である．

このとき，Gorenstein 空間としての次元を $\bar{m} = \dim \Omega^{k-1}M$ とおくと，以下の同型が成立する．

$$\mathrm{Ext}^l_{C^*(S^{k-1}M)}(C^*(M), C^*(S^{k-1}M)) \cong H^{l-\bar{m}}(M)$$

上の定理において特に $l = \bar{m}$ とすることで，生成元

$$c_! \in \mathrm{Ext}^{\bar{m}}_{C^*(S^{k-1}M)}(C^*(M), C^*(S^{k-1}M)) \cong \mathbb{K}$$

を得る．これを用いて $\gamma = c_!$ ととることで，**対称ブレーン余積**を $\delta^\vee = \delta^\vee_{c_!}$ と定義する．

3.3. ブレーン積の定義

M を k 連結な空間とする．このとき**ブレーン積**は，図式

$$\begin{array}{ccccc} S^kM \times S^kM & \xleftarrow{\text{incl}} & S^kM \times_M S^kM & \xrightarrow{\text{comp}} & S^kM \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{ev}_0\times\mathrm{ev}_0} & & \downarrow & & \\ M \times M & \xleftarrow[\Delta]{} & M & & \end{array}$$

を用いて合成

$$\mu^\vee\colon H^*(S^kM) \xrightarrow{\text{comp}^*} H^*(S^kM \times_M S^kM) \xrightarrow{H^*((\mathrm{ev}_0\times\mathrm{ev}_0)^*\Delta_!)} H^{*+m}(S^kM \times S^kM)$$

として定義される．ここで，$\Delta_! \in \mathrm{Ext}^m_{C^*(M\times M)}(C^*(M), C^*(M\times M)) \cong \mathbb{K}$ は，定理 13 の $k=1$ の場合から定まる生成元である．ブレーン積は(ブレーン余積と違って) $k \geq 2$ であることに由来する困難はなく，ループ積と同様の方法によって定義されていることを注意しておく．

3.4. ブレーン (余) 積の性質と具体例

以下 $\mathrm{ch}\,\mathbb{K}=0$ ，M を k 連結空間とし，$\Omega^{k-1}M$ は Gorenstein 空間であると仮定する．このとき

$$\mu\colon H_*(S^kM\times S^kM) \to H_{*-m}(S^kM) \quad (\text{ブレーン積})$$
$$\delta\colon H_*(S^kM) \to H_{*-\bar{m}}(S^kM\times S^kM) \quad (\text{対称ブレーン余積})$$

が定義されるのであった．ループ積やループ余積の拡張として，これらは次の性質を満たす．

定理 14 ([Wak, Theorem 1.5])**.** ブレーン積と対称ブレーン余積は，次数をずらしたホモロジー $\mathbb{H}_*(S^kM) = H_{*+m}(S^kM)$ に Frobenius 代数の構造を与える．すなわち，ブレーン積と対称ブレーン余積は (余) 結合的かつ (余) 可換であり，Frobenius 恒等式 $\delta\circ\mu = \pm(1\otimes\mu)\circ(\delta\otimes 1) = \pm(\mu\otimes 1)\circ(1\otimes\delta)$ を満たす．

また，ブレーン (余) 積の非自明性を示す結果として次の計算例を得た．

定理 15 ([Wak, Theorem 1.6])**.** $M = S^{2n+1}$ に対して，ブレーン積による代数 $\mathbb{H}_*(S^2M)$ は，次数 $|y| = -2n-1$, $|z| = 2n-1$ の元により生成される外積代数 $\wedge(y,z)$ と同型である．さらに，この同型の下で対称ブレーン余積は以下のように計算される．

$$\begin{aligned} \delta(1) &= 1\otimes yz - y\otimes z + z\otimes y + yz\otimes 1 \\ \delta(y) &= y\otimes yz + yz\otimes y \\ \delta(z) &= z\otimes yz + yz\otimes z \\ \delta(yz) &= -yz\otimes yz \end{aligned}$$

この例は，M が多様体の場合でもブレーン積，対称ブレーン余積の両者が非自明であることを示しており，ループ (余) 積の場合と対照的である．このことから，ブレーン作用素はストリング作用素よりも豊富な代数的構造を与えていると考えられる．

また，ブレーン積と対称ブレーン余積をさらに一般化することによって，それらの合成が非自明であるような例を構成した．このような現象はストリング作用素 $(k=1)$ の場合には見つかっておらず，この結果もブレーン作用素が豊富な構造を与えていることを示す結果であると言える．詳細については [Wak19b] を参照されたい．

4. 非対称ブレーン余積

この節では，もう一つのブレーン余積である非対称ブレーン余積 (の双対) の定義を与える．

以下，M を単連結な m 次元 Poincaré 双対空間とする．ここで図式 (9) の代わりに次の図式を考える．

$$\begin{tikzcd} S^k_{f+g}M \arrow[d, "\mathrm{res}_1"] & S^k_f M \times_M S^k_g M \arrow[l, "\mathrm{comp}"'] \arrow[r, "\mathrm{incl}"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] & S^k_f M \times S^k_g M \\ D^k M & S^k_f M \arrow[l, "\iota"] & \end{tikzcd} \tag{16}$$

ここで，$S^k_f M$ は $f \in S^k M$ を含む $S^k M$ の弧状連結成分，$D^k M = \mathrm{Map}(D^k, M)$ である．また，res_1 は上半球面への制限写像，ι は商写像 $D^k \twoheadrightarrow D^k/\partial D^k = S^k$ から誘導される写像である．

このとき $D^k M$ $(\simeq M)$ は Poincaré 双対性を満たすので，命題 4 より生成元

$$\iota_! \in \mathrm{Ext}^m_{C^*(D^k M)}\left(C^*(S^k_f M), C^*(D^k M)\right) \cong \mathbb{K}$$

が定まる．これを用いて，非対称ブレーン余積は以下の合成として定義される．

$$\delta^\vee_{\mathrm{ns}} \colon H^*(S^k_f M \times S^k_g M) \xrightarrow{\mathrm{incl}^*} H^*(S^k_f M \times_M S^k_g M) \xrightarrow{H^*(\mathrm{res}_1{}^\star \iota_!)} H^{*+m}(S^k_{f+g} M)$$

次の命題は，(f についての仮定を課した上での) 非対称ブレーン余積の具体的な計算式を与えている．

命題 17. f が 定値写像 $0 \colon S^k \to M$ にホモトピックなとき，非対称ブレーン余積 $\delta^\vee_{\mathrm{ns}}$ は $u, v \in H^*(S^k M)$ に対して

$$\delta^\vee_{\mathrm{ns}}(u \times v) = \mathrm{ev}_0^*(\omega \cdot c^*(u)) \cdot v$$

により計算できる．ここで，$\omega \in H^m(M)$ は M の向き付け類であり，$\mathrm{ev}_0 \colon S^k M \to M$ は基点での評価写像，$c \colon M \to S^k M$ は定値写像としての埋め込みである．

5. 二種類のブレーン余積の比較

最後に，対称ブレーン余積と非対称ブレーン余積を比較することで，$H^*(S^k M)$ におけるカップ積のある種の消滅を証明する．

以下では M を k 連結な m 次元 Poincaré 双対空間とする．このとき次の図式により二種類のブレーン余積が関連付けられる．

$$\begin{tikzcd} S^k M \arrow[d, "\mathrm{res}_1"] & S^k M \times_M S^k M \arrow[l, "\mathrm{comp}"'] \arrow[r, "\mathrm{incl}"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] & S^k M \times S^k M \\ D^k M \arrow[d, "\mathrm{res}_2"] & S^k M \arrow[l, "\iota"] \arrow[d, "\mathrm{ev}"] & \\ S^{k-1} M & M, \arrow[l, "c"] & \end{tikzcd}$$

実際，この図式の外側は非対称ブレーン余積の定義に用いた図式(9)に，上半分は対称ブレーン余積の定義に用いた図式(16)にそれぞれ一致している．また，$\mathrm{res}_2 \circ \mathrm{res}_1 = \mathrm{res}_0$ であることを注意しておく．さて，任意の元 $\gamma \in \mathrm{Ext}^m_{C^*(S^{k-1}M)}\big(C^*(M), C^*(S^{k-1}M)\big)$ を固定し，それに付随する対称ブレーン余積を考えよう[1]．このとき二種類のブレーン余積は以下のように定義されるのであった．

$$\begin{aligned} \delta^\vee_\gamma &= H^*(\mathrm{res_1}^\star \circ \mathrm{res_2}^\star(\gamma)) \circ \mathrm{incl}^* \\ \delta^\vee_{\mathrm{ns}} &= H^*(\mathrm{res_1}^\star(\iota_!)) \circ \mathrm{incl}^* \end{aligned} \tag{18}$$

これらを比較するために，$\lambda_\gamma \in \mathbb{K}$ を写像の合成 $H^0(M) \xrightarrow{H^*(\gamma)} H^m(S^{k-1}M) \xrightarrow{c^*} H^m(M)$ を用いて $c^* \circ (H^*(\gamma))(1) = \lambda_\gamma \cdot \omega$ により定める．

命題 19 ([Wak19a, Proposition 6.2])**.** 上の仮定の下で，$\mathrm{res_2}^\star\gamma = \lambda_\gamma \cdot \iota_!$ が成立する．よって(18)より次が成立する．

$$\delta^\vee_\gamma = \lambda_\gamma \cdot \delta^\vee_{\mathrm{ns}}$$

この関係式を用いて二種類のブレーン余積を比較することで，カップ積の消滅に関する次の定理を得る．

定理 20 ([Wak19a, Theorem 1.4])**.** 任意の元 $\gamma \in \mathrm{Ext}^m_{C^*(S^{k-1}M)}(C^*(M), C^*(S^{k-1}M))$ を固定する．このとき，任意の $\alpha \in H^{>0}(S^kM)$ に対して，次が成立する．

$$\lambda_\gamma \mathrm{ev}_0^*\omega \cdot \alpha = 0 \in H^{|\alpha|+m}(S^kM)$$

Proof. 写像 $\mathrm{ev}_0 \colon S^kM \to M$ は切断 $c \colon M \to S^kM$ を持つので，直和分解 $H^{>0}(S^kM) \cong H^{>0}(M) \oplus \mathrm{Ker}(c^*)$ を得る．$\alpha \in H^{>0}(M)$ のときは，次数の理由から明らかに $\alpha\omega = 0 \in H^{|\alpha|+m}(M) = 0$ である．次に $\alpha \in \mathrm{Ker}(c^*)$ の場合を考える．このとき命題 17 より，次のように計算できる．

$$\begin{aligned} \delta^\vee_{\mathrm{ns}}(1 \times \alpha) &= \mathrm{ev}_0^*(\omega \cdot c^*(1)) \cdot \alpha = \mathrm{ev}_0^*\omega \cdot \alpha \\ \delta^\vee_{\mathrm{ns}}(\alpha \times 1) &= \mathrm{ev}_0^*(\omega \cdot c^*(\alpha)) \cdot 1 = 0 \end{aligned}$$

さらに命題 11 と命題 19 より，

$$\lambda_\gamma \delta^\vee_{\mathrm{ns}}(1 \times \alpha) = \delta^\vee_\gamma(1 \times \alpha) = \delta^\vee_{\tau^*\gamma}(\alpha \times 1) = \lambda_{\tau^*\gamma}\delta^\vee_{\mathrm{ns}}(\alpha \times 1)$$

を得る．これらの等式から，$\lambda_\gamma \mathrm{ev}_0^*\omega \cdot \alpha = 0 \in H^{|\alpha|+m}(S^kM)$ を得る． □

しかし，もし $\lambda_\gamma = 0$ であれば，定理 20 は自明な主張となってしまう．従って λ_γ が非自明であるような γ の構成が必要である．

命題 21 ([Wak19a, Proposition 6.7, Proposition 6.11])**.** 以下のいずれかを仮定する．

(a) $k = 1$

(b) $k \geq 1$ は奇数，$\mathrm{ch}\,\mathbb{K} = 0$ であり，$\Omega^{k-1}M$ は Gorenstein 空間である．

このとき，ある γ が存在し，λ_γ は Euler 標数 $\chi(M)$ に一致する．

[1] 次数が Section 3 と異なることに注意

よって，定理 20 と命題 21 より，次の定理を得る．

定理 22 ([Wak19a, Theorem 1.4])**.** 命題 21 と同じ仮定の下で，任意の $\alpha \in H^{>0}(S^k M)$ に対して，次が成立する．

$$\chi(M)\mathrm{ev}_0^*\omega \cdot \alpha = 0 \in H^{|\alpha|+m}(S^k M)$$

なお，$k=1$ かつ M が多様体の場合は Menichi [Men13] の定理であり，定理 22 はその一般化となっている．

参考文献

[CG04] Ralph L. Cohen and Véronique Godin. A polarized view of string topology. In *Topology, geometry and quantum field theory*, volume 308 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 127–154. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.

[CHV06] Ralph L. Cohen, Kathryn Hess, and Alexander A. Voronov. *String topology and cyclic homology.* Advanced Courses in Mathematics. CRM Barcelona. Birkhäuser Verlag, Basel, 2006. Lectures from the Summer School held in Almería, September 16–20, 2003.

[CS99] Moira Chas and Dennis Sullivan. String topology, 1999, arXiv:math/9911159.

[FHT88] Yves Félix, Stephen Halperin, and Jean-Claude Thomas. Gorenstein spaces. *Adv. in Math.*, 71(1):92–112, 1988.

[FHT01] Yves Félix, Stephen Halperin, and Jean-Claude Thomas. *Rational homotopy theory*, volume 205 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, 2001.

[FT09] Yves Félix and Jean-Claude Thomas. String topology on Gorenstein spaces. *Math. Ann.*, 345(2):417–452, 2009.

[Men13] Luc Menichi. String topology, Euler class and TNCZ free loop fibrations, 2013, arXiv:1308.6684.

[Smi67] Larry Smith. Homological algebra and the Eilenberg-Moore spectral sequence. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 129:58–93, 1967.

[Tam10] Hirotaka Tamanoi. Loop coproducts in string topology and triviality of higher genus TQFT operations. *J. Pure Appl. Algebra*, 214(5):605–615, 2010.

[Wak] Shun Wakatsuki. Coproducts in brane topology. to appear in Algebr. Geom. Topol., also available at arXiv:1802.04973.

[Wak19a] Shun Wakatsuki. New construction of the brane coproduct and vanishing of cup products on sphere spaces, 2019, arXiv:1905.00644.

[Wak19b] Shun Wakatsuki. Nontrivial example of the composition of the brane product and coproduct on gorenstein spaces, 2019, arXiv:1902.10936.