# 3次元ホモロジー球面のなすホモロジー同境群と Chern-Simons汎関数

谷口正樹　(東京大学・学振DC)*

## 1. 序

本稿では，有向ホモロジー3球面[1] $Y$ の**無限大を許す実数値不変量** $\{r_s(Y)\}_{s\in[-\infty,0]}$ を紹介する．この不変量は, インスタントンFloerホモロジーの精密化を用いて定義される．その精密化には, Chern-Simons汎関数の臨界値を用いる．さらに, その一部 $r_0(Y)$ を用いることで, 3次元ホモロジー球面のなすホモロジー同境群に, **無限大を許す実数に添字づけられた部分群の列**を導入する．その観点から, 3次元ホモロジー同境群についていくつかの新しい性質を導く．本稿で紹介する結果は，野崎雄太氏, 佐藤光樹氏との共同研究である．

### 1.1. 背景1: ホモロジー同境群

ホモロジー同境群は, 位相多様体のPL構造や三角形分割の存在問題に関わって定義された ([24], [18])．**(PL) ホモロジー同境群**は，次のように定義される;

$$\Theta^n_H := \{\text{有向PLホモロジー}\,n\,\text{球面}\}/\sim_{H\text{-同境}}.$$

ここで，$Y_1$ と $Y_2$ が $H$-同境 (homology cobordant) であるとは，有向コンパクト $(n+1)$ 次元PL多様体 $W$ が存在して，$\partial W = -Y_1 \amalg Y_2$，包含写像 $l_i : Y_i \to W (i = 1, 2)$ が整係数のホモロジーに同型を誘導することをいう．連結和は, $\Theta^n_H$ に可換群の構造を与える．[2] 1969年, Kervaire ([20]) によって $n \neq 3$ とするとき，$\Theta^n_H \cong \{0\}$ であることが示された．$n = 3$ の時, $\Theta^3_H$ は, 滑らかな多様体の圏で定義したものと同型になる.[3] 以下, $\Theta^3_H$ は, 滑らかな多様体の圏で定義したものと考える．任意の有向ホモロジー3球面 $Y$ は, あるコンパクトスピン4次元多様体 $W$ の境界となることが知られている．その $W$ の交差形式の指数 $I(W)$(正の固有値の個数 − 負の固有値の個数) を考えることによって準同型

$$\mu : \Theta^3_H \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, [Y] \mapsto I(W)/8 \mod 2$$

が定義され，**Rochlin不変量**と呼ばれる．$\mu(\Sigma(2,3,5)) = 1$ であるから, $\mu$ は全射である．ただし, $\Sigma(p,q,r)$ は,

$$\Sigma(p,q,r) = \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 | x^p + y^q + z^r = 0\} \cap S^5$$

によって与えられるSeifert 3次元多様体である．($\Sigma(2,3,5)$ はPoincaré球面と呼ばれる.) その後, 1978・80年に, 松本 ([24])・Galewski-Stern([18]) は,「与えられた5以上の次元を持つ位相多様体 $M$ が三角形分割を持つための必要十分条件は，あるコホモロジー

---

本研究はJSPS科研費17J04364, および数物フロンティア・リーディング大学院の助成を受けたものである．

* e-mail: masakit@ms.u-tokyo.ac.jp

[1] 一般に (PL) ホモロジー $n$ 球面とは, 整係数ホモロジーが $S^n$ のホモロジーと同型である (PL) 閉 $n$ 次元多様体のことを指す．この原稿では断らなければ, 多様体は, 滑らかなものとする．

[2] この群は, ホモトピー球面の群のホモロジー版と見做すこともできる.([21])

[3] 3・4次元位相多様体に対して, PL構造と微分構造に差はない．

類 $\delta(\Delta(M)) \in H^5(M, \ker\mu)$ が消えることである.」という定理を示した. これにより, $(\Theta^3_H, \mu)$ が三角形分割の存在問題と関わることが明らかとなった. しかし, この時点では, $\Theta^3_H$ は, 有限群であるかどうかも分かっていなかった. その後, 1982 年に Donaldson によって示された **Theorem A** ([5]), およびその古田による一般化 ([15]) を用いることで, $\Sigma(2,3,5)$ が, $\Theta^3_H$ の中で torsion でないことが示される. また, この結果を一般化する形で, 1990 年, 古田 ([16])・Fintushel-Stern([9]) は, $\{\Sigma(p,q,pqk-1)\}_{k=1}^{\infty}$ が $\Theta^3_H$ の中で一次独立であることを示した. 一方で, 2002 年に Frøyshov ([12]) は, 全射準同型

$$h : \Theta^3_H \to \mathbb{Z} : \textbf{ Frøyshov 準同型}$$

を構成した. この不変量 $h$ は, Theorem A を境界付き 4 次元多様体に一般化する際に, 自然に現れる不変量である. さらにその 10 年後, Manolescu ([23]) は, Rochlin 不変量 $\mu : \Theta^3_H \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ が split しないことを示すことで, 高次元位相多様体の三角形分割予想を否定的に解決した. そして 2018 年の去年, Dai-Hom-Stoffregen-Truong([4]) は, 全射準同型 $\phi : \Theta^3_H \to \mathbb{Z}^\infty$ を構成した. このことは, $\Theta^3_H$ に $\mathbb{Z}^\infty$-summand が存在することを意味する. 以上, ホモロジー同境群の歴史を, 結果についてのみ述べた. [5], [8], [16], [9], [12] については, 我々の手法と深く関わるため, 1.2 章において, より詳しく述べる.

**1.2. 背景 2: ゲージ理論**

数学におけるゲージ理論は，1982 年に発表された Donaldson の論文を始まりとして，低次元トポロジーの未解決問題に多くの答えを与えてきた． ゲージ理論では，4 次元多様体 $X$ に対して定義される，解のモジュライ空間

$$M(X) := \{\text{物理由来の非線形偏微分方程式の解}\}/\text{対称性}$$

を考察する．$M(X)$ は, “多くの場合”, 有限集合を除くと, 有限次元多様体の構造を持つ. そして, $M(X)$ の有限次元多様体の構造から, $X$ 自身の情報を得る, というのがゲージ理論で行われる議論の流れである. 本稿では，主に **anti-self-dual (以下，ASD) 方程式**を用いて展開される理論について述べる.

1982 年, Donaldson は, 交差形式が負定値である, 単連結有向閉 4 次元多様体 $X$ に対して, ASD 方程式の解のモジュライ空間 $M(X)$ を観察することにより, Theorem A を示した. Theoerm A は, 単連結有向閉 4 次元多様体の交差形式が, 負定値ならば, $\oplus_{b_2(X)}(-1)$ と同型であることを主張する. その証明は, $M(X)$ の**端**と**商特異点**を観察することで行われる. この Theorem A, およびその証明方法の, 次の二つの派生に着目する. 一つは, **オービフォールドを含む 4 次元多様体に対するゲージ理論**であり, もう一つは, **境界付き 4 次元多様体への拡張**である. 前者について述べる. 1985 年, Fintushel-Stern は, $\Sigma(p,q,pqk-1)$ を境界に持つ 4 次元オービフォールドを用いてゲージ理論を展開することにより, $\Sigma(p,q,pqk-1)$ が, $\Theta^3_H$ の中で torsion でないことを示した. 議論の中で最も重要であったのは, $\Sigma(p,q,pqk-1)$ に付随するオービフォールドを用いることで, **商特異点に対応する ASD 方程式の解の一意存在が保証できることである.** さらに, この議論を拡張する形で, 1990 年, 古田 ([16]) と Fintushel-Stern([9]) は, $\{\Sigma(p,q,pqk-1)\}_{k=1}^{\infty}$ が $\Theta^3_H$ 内で一次独立であることを示した. その証明は, Fintushel-Stern が用いた**商特異点に対応する ASD 方程式の解の一意存在**と, **Chern-Simons 汎関数の臨界値から定まる解のモジュライ空間に対する制約**を組み合わせることによって行われる. この議論は, Seifert 3 次元多様体に付随するオービフォールドを用いているという点で, そのま

までは, 一般のホモロジー3球面への拡張は, 難しい. 次に, Theorem A の境界付き4次元多様体への拡張について述べる. Theorem A は, “$S^3$ を境界に持つ滑らかな4次元多様体 $W$ の交差形式が負定値ならば, $\oplus_{b_2(W)}(-1)$ と同型である”, という解釈ができる. $S^3$ をホモロジー3球面 $Y$ に取り換えた命題を**拡張された Theorem A** と呼ぶことにする. この時, 次の問いを考える;

**問 1** どのようなホモロジー3球面 $Y$ に対して, 拡張された Theorem A は成立するのか?

これに対する一つの答えとして, Donaldson([6]) は, “障害類 $\theta_{-Y} \in I^*(-Y, \mathbb{Q})$ が消えている $Y$ について, 拡張された Theorem A が成立する”ことを示した. $I^*(Y, \mathbb{Q})$ は, $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ 次数つき有限次元 $\mathbb{Q}$-ベクトル空間であり, $Y$ の**インスタントン Floer コホモロジー**と呼ばれる. インスタントン Floer(コ) ホモロジーは, Floer([11]) によって $Y \times \mathbb{R}$ に対する ASD 方程式のモジュライ空間を観察することで定義された. 実際に定義する際, インスタントン Floer ホモロジーは, Chern-Simons 汎関数を Morse 関数とする“Morse ホモロジー”として構成される. また, 問1に対するもう一つの同値な回答として, Frøyshov([12]) は, “Frøyshov 不変量 $h(Y)$ が0以下の $Y$ に対して, 拡張された Theorem A が成立する”ことを示した. $h(Y)$ は, インスタントン Floer(コ) ホモロジーの“同変コホモロジー”としての構造を用いて定義される.

### 1.3. 我々の研究についての概要

インスタントン Floer ホモロジー, および $\theta_Y$ の構成から, $\theta_Y$ が消えていなければ, $Y \times \mathbb{R}$ 上に**商特異点を境界条件に持つような ASD 方程式の解**が存在する. 我々は, この性質を観察することで, **上記の Fintushel-Stern が用いた, 商特異点に対応する ASD 方程式の解の存在を, $0 \neq \theta_Y \in I^*(Y)$ という条件を用いて代用できること**を考察した. また, 古田 ([16])・Fintushel-Stern([9]) では, Chern-Simons 汎関数の臨界値に関する制約を用いていたが, その議論も, **フィルター付き [4] インスタントン Floer(コ) ホモロジー $I^*_{[s,r]}(Y)$ および, フィルター版の障害類 $\theta^{[s,r]}_Y \in I^*_{[s,r]}(Y)$[5] $(-\infty \leq s \leq 0 \leq r \leq \infty)$ を用いることで表現できること**を観察した. フィルター付きインスタントン Floer ホモロジーは, 1992年, Fintushel-Stern([10]) によって定義されていたものと, 本質的に同じである. そして, フィルター版の障害類 $\theta^{[s,r]}_Y \in I^*_{[s,r]}(Y)$ を用いて不変量 $r_s(Y)$ を

$$r_s(Y) := \sup\{r \in \mathbb{R}_{\geq 0} | 0 = \theta^{[s,r]}_Y \in I^1_{[s,r]}(Y, \mathbb{Q})\}$$

によって定義した.[6] これは, 無限大を許す実数値不変量となり, 古田 ([16])・Fintushel-Stern([9])・Floer([11]) のテクニックを使うことで, ホモロジー同境不変量となることが示される. また, 深谷 ([14])・Donaldson([6]) によるインスタントン Floer ホモロジーの連結和公式を, フィルター付きの場合に観察することによって, $r_0(Y)$ に連結和公式を与えた. さらに, $r_0(Y)$ の連結和公式を使うことで, $\Theta^3_H$ に図1にあるような部分群のフィルトレーションを与えた. 古田・Fintushel-Stern の考察した列 $\{\Sigma(p, q, pqk-1)\}^\infty_{k=1}$ は, 図1のように発散していくことが観察でき, それぞれが部分群として閉じていることから, $\{\Sigma(p, q, pqk-1)\}^\infty_{k=1}$ が $\Theta^3_H$ において一次独立であることは, 視覚的に見て取れる.

[4] Chern-Simons 汎関数を用いたフィルター.
[5] このような不変量は, [29] において最初に定義された.
[6] この定義は, パーシステントホモロジーや, ECH における spectral 不変量 ([19]) のインスタントン Floer ホモロジーにおけるアナロジーと言える.

この観点, および, $r_0(Y)$ の連結和公式を用いて, $\Theta^3_H$ に関するいくつかの新しい性質を導いた. (定理6, 定理8, 命題3)

## 2. 主結果

この章では, まず $\{r_s(Y)\}$ の性質に関する主定理を述べ, その後, $r_0(Y)$ を用いて, $\Theta^3_H$ に部分群の増大系列を導入する. 図1は, その増大系列を絵にしたものである. 不変量

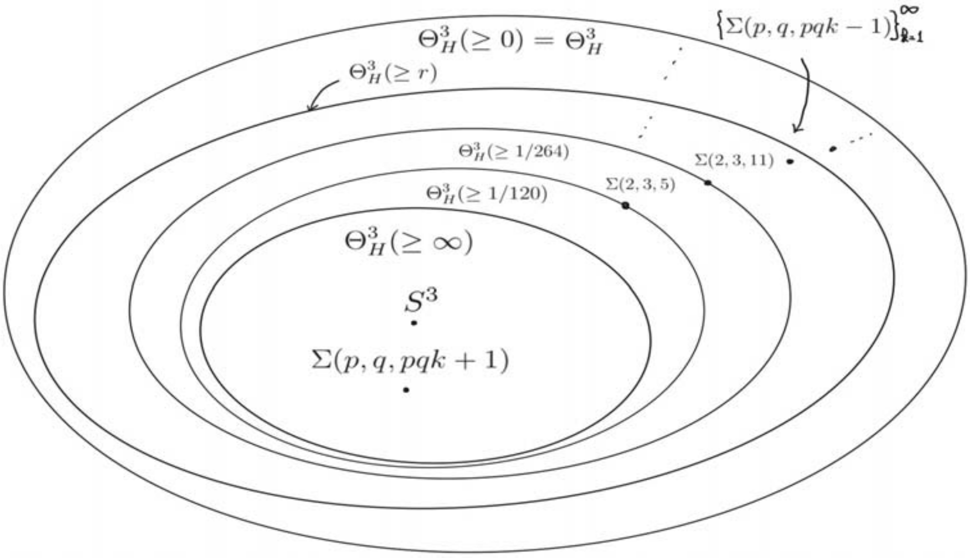


図 1: $\Theta^3_H$ の絵

の計算結果や, いくつかの応用は, 図1を使うことで, 視覚的に理解することができる.

### 2.1. 主定理

次が本稿の主定理である.

**定理 1 (野崎-佐藤-谷口, [26], 2019)** $s \in \mathbb{R}_{\leq 0} \amalg \{-\infty\}$ と有向ホモロジー3球面 $Y$ に対して, 無限大を許す正の実数値不変量 $r_s(Y)$ が定まり, 以下の性質を持つ.

1. (単調性) $s \leq s'$ ならば, $r_{s'}(Y) \leq r_s(Y)$ が成立する.

2. ($r_s(Y)$ の値) 全ての $s$ に対して $r_s(Y)$ の値は,

$$\{SU(2)\text{-Chern-Simons 汎関数の既約な臨界点の臨界値}\} \amalg \{\infty\}$$

   に含まれる.

3. (同境不等式) $Y_1$, $Y_2$ をホモロジー3球面とする. また, $W$ を交差形式が負定値であるコンパクト有向4次元多様体あって, $\partial W = Y_1 \amalg -Y_2$ となっているとする. このとき,

$$r_s(Y_2) \leq r_s(Y_1)$$

   が成立する. さらに, $r_s(Y_1)$ が有限で, $W$ が単連結ならば,

$$r_s(Y_2) < r_s(Y_1)$$

   が成立する.

4. (連結和公式) $r_0$ に対して,

$$r_0(Y_1 \# Y_2) \geq \min\{r_0(Y_1), r_0(Y_2)\} \tag{1}$$

が成立する.

5. (非自明性) Frøyshov 不変量 $h(Y)$ が負であることと, $r_{-\infty}(Y)$ が有限であることは同値である.

**注意 1** まず, 二つのRemarkを述べる.

- 2018年, Daemi ([1]) は, 有向ホモロジー3球面$Y$と, $k \in \mathbb{Z}$に対して, $\Gamma_Y(k)$と呼ばれる, 無限大を許す正の実数値不変量を定義した. $\Gamma_Y(k)$は$k$について, 単調増大列である;
$$\cdots \Gamma_Y(-1) \leq \Gamma_Y(0) \leq \Gamma_Y(1) \leq \cdots$$
さらにDaemiの構成はインスタントンFloer理論を用いており, $k$が正ならば, $\Gamma_Y(k)$は, 定理1の2,3,5を満たす. このことから, 次の問いは自然である.

  **問 2** $\Gamma_Y(k)$と$r_s(Y)$に関係はあるか？

  これに対して, 我々は次のことを証明した;

  **定理 2 (野崎-佐藤-谷口,[26], 2019)** 任意のホモロジー3球面$Y$に対して
$$r_{-\infty}(Y) = \Gamma_{-Y}(1)$$
が成立する.

  $\{r_s(Y)\}$は, $\Gamma_{-Y}(1)$への収束列を与えることも分かる. $\Gamma_Y(k)(k \leq 0)$と, $\{r_s(Y)\}$の関係は, 未だわかっていない.

- $Y = \Sigma(2,3,5)\#(-\Sigma(2,3,6k-1))$($k$は自然数)とすると, $r_s(Y)$は$s$について定数ではない. さらに, $Y_1 = \Sigma(2,3,5)\#(-\Sigma(2,3,6k-1))$, $Y_2 = -\Sigma(2,3,5)$ ついてDaemiの不変量$\Gamma_Y(k)$($k$は正の整数)は連結和公式 (1) を満たさない.

- 連結和公式は$r_0$に対してのみ, 記述した. 一般の$s$については, 現在考察中である.[7]

不変量を定義した時, その計算可能性を保証することは重要である. 我々は, 次のクラスのSeifert 3次元多様体に対して計算を行った.

[7] 次の形になることを予想している;

$$r_s(Y) \geq \min_{s=s_1+s_2}\{r_{s_1}(Y) - s_2, r_{s_2}(Y) - s_1\}$$

**定理 3 (野崎-佐藤-谷口, [26], 2019)** $(p,q)$ を互いに素な自然数のペアとする. また, $k$ を自然数とする. この時, 任意の $s \in \mathbb{R}_{\leq 0} \amalg \{-\infty\}$ に対して

$$r_s(-\Sigma(p,q,pqk-1)) = \frac{1}{4pq(pqk-1)},\ r_s(\Sigma(p,q,pqk-1)) = \infty$$

および,

$$r_s(-\Sigma(p,q,pqk+1)) = r_s(\Sigma(p,q,pqk+1)) = \infty$$

が成立する.

[26] には, Seifert ホモロジー3球面に関して, より多くの計算例がある. また, Seifert 3次元多様体のいくつかの連結和に対して, 次のような振る舞いをする.

**命題 1 (野崎-佐藤-谷口, [26], 2019)** $Y$ を, Seifert 3次元多様体の有限個の連結和で書かれるホモロジー3球面とする. この時, $r_s(Y) \in \mathbb{Q}_{>0} \amalg \{\infty\}$ が成立する.

### 2.2. $\Theta^3_H$ のフィルトレーション

**定義 1** $\Theta^3_H(\geq r)$ を,

$$\Theta^3_H(\geq r) := \{[Y] \in \Theta^3_H | \min\{r_0(Y), r_0(-Y)\} \geq r\}$$

として定める.

$r_0(Y)$ の連結和公式によって, 次が示される.

**定理 4 (野崎-佐藤-谷口, [26], 2019)** 任意の実数 $r \geq 0$ もしくは $r = \infty$ に対して, $\Theta^3_H(\geq r)$ は, $\Theta^3_H$ の部分群となる.

**注意 2** $k$ を正の整数とする時, Daemi の不変量 $\Gamma_Y(k)$ に対して, 連結和公式 (1) を満たさない例が存在するため, 同様にフィルトレーションを定めることができない. また, 一般に, $\Gamma_Y(k)$ の連結和公式は, 未だ考えられていない. 加えて, $k$ を0以下の整数とする時, $\Gamma_Y(k)$ の非自明な計算例は知られていない.

これにより, 部分群の列;

$$\Theta^3_H(\geq \infty) \subset \cdots \subset \Theta^3_H(\geq r) \subset \cdots \subset \Theta^3_H(\geq 0) = \Theta^3_H$$

が得られる. この部分群の列と定理 3 を合わせて書くと, 上記の図 1 のようになる. $\{\Sigma(p,q,pqk-1)\}_{k=1}^{\infty}$ は, 無限遠に発散していき, それぞれの線で囲まれている領域が, 部分群であるため, $\{\Sigma(p,q,pqk-1)\}_{k=1}^{\infty}$ が一次独立であるという事実を, 視覚的に捉えることができる. これらの列 $\Theta^3_H(\geq r)$ について分かっていることは, 多くない. 次の結果は, [16], [9] の結果の精密化と言える.

**定理 5 (野崎-佐藤-谷口, [26], 2019)** 任意の $r > 0$ に対して, $\Theta^3_H/\Theta^3_H(\geq r)$ は, $\mathbb{Z}^\infty$ を部分群として持つ.

また, 最も小さい部分群 $\Theta^3_H(\geq \infty)$ は, $\mathbb{Z}$ を含むことがわかる.

## 3. 低次元トポロジーへの応用

この章にて, $\{r_s(Y)\}$ がもたらす応用について述べる.

### 3.1. 3次元ホモロジー同境群

まず, ホモロジー同境群における応用を述べる.

**定理 6 (野崎-佐藤-谷口,** [26]**, 2019)** $K$ を $S^3$ 内の結び目であって, $h(S^3_1(K)) < 0$ であるとする. この時, $\{S^3_{1/k}(K)\}_{k=1}^{\infty}$ は, $\Theta^3_H$ の中で一次独立である.

$h(S_1(K)) < 0$ という条件は, 図1において, $S_1(K)$ が $\Theta^3_H(\geq \infty)$ の外にいることを意味する. そして, 列 $\{S^3_{1/k}(K)\}_{k=1}^{\infty}$ を図1にプロットした時, 段々と外側に離れていく様を示すことが, 証明のアウトラインである. この定理は, $K$ をトーラス結び目 $T(p, q)$ とすることにより, 古田 ([16])・Fintushel-Stern ([9]) の結果を復元する. さらに, $h(S^3_1(K)) < 0$ を満たす結び目として, 双曲・サテライト結び目の無限系列を構成可能である.

**命題 2 (野崎-佐藤-谷口,** [26]**, 2019)** $h(S^3_1(K)) < 0$ を満たす双曲結び目, サテライト結び目の無限列が存在する.

$\Theta^3_H$ の先行研究は, Seifert ホモロジー3球面に対するものがほとんどである. 一方で, $\Theta^3_H$ の全ての元は, 双曲3次元多様体を代表元として持つことが知られている ([25]). その観点から, 次は自然な問いである.

**問 3** $\Theta^3_H$ の全ての元は, Seifert 3次元多様体を代表元として持つか？

この問いの答えは否である. これは2015年に **Seiberg-Witten(以下, SW) 理論**[8] を用いて, Stoffregen が証明を与えた ([28]). 1.1 章では ASD 方程式を用いて得られる, Yang-Mills(以下YM) 理論についてのみ, 述べたが, ゲージ理論には, SW 方程式を用いて得られるSW 理論がある. YM 理論とSW 理論は, 並行して発展してきた歴史があり, 常に両者の関係は意識されてきた. 閉4次元多様体に対しては, Donaldson 不変量とSW 不変量が等価であるという **Witten 予想**があり, その一部が解かれている ([7]). また, Theorem A は, YM 理論とSW 理論の両理論において証明可能である. 一方で, 扱う多様体を非コンパクトとする場合, 両理論の同値性が確立されておらず, 実際に成立するのか不明であるような多くの部分がある. 我々は, YM 理論を用いて, 問3の答えが否であることの別証明を与えた;

**定理 7 (Stoffregen,** [28]**, SW 理論, 2015, 野崎-佐藤-谷口,** [26]**, YM 理論, 2019)** $\Theta^3_H$ の元であって, Seifert ホモロジー3球面を代表元として含まないものが存在する.

また, "与えられたホモロジー3球面 $Y$ に対して, $Y$ がいかなる交差形式を持つ4次元多様体の境界となるか" という問題は, 1.2節で述べた拡張された Theorem A に関連し, 興味を持たれてきた. 例えば, Seifert ホモロジー3球面や結び目手術で書かれるホモロジー3球面は, 必ず, 交差形式が正定値, もしくは負定値であるコンパクト有向4次元多様体の境界となることが知られている. $r_0(Y)$ の連結和公式を用いると, 問3に答えるだけではなく, 次の問いにも答えを与えることができる;

**問 4** 交差形式が正定値, もしくは負定値であるコンパクト有向4次元多様体の境界になり得ない, ホモロジー3球面は存在するか？

これに対して, 次を示した.

**定理 8 (野崎-佐藤-谷口,** [26]**, 2019)** 交差形式が正定値, もしくは負定値である4次元多様体の境界になり得ない, ホモロジー3球面の族 $\{Y_k\}_{k=1}^{\infty}$ が存在する. 特に, $[Y_k]$ は,

[8] $Pin(2)$-monopole Floer ホモロジーを用いて定義される $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ を用いて示された.

Seifert ホモロジー 3 球面, 結び目の手術でかけるホモロジー 3 球面を含まない. さらにそのような $\{Y_k\}_{k=1}^{\infty}$ を, $\{[Y_k]\}_{k=1}^{\infty}$ が $\Theta^3_H$ において一次独立であるように選ぶことができる.

定理 8 の系として, 定理 7 が従う. この結果の SW 理論を用いた証明は知られていない. さらに, 問 3 をより一般化した問いとして,

**問 5** $\Theta^3_H$ の全ての元は, Seifert 3 次元多様体の線型結合で表記されるか？

という問いがある. 一方で, 命題 1 によって, $r_s(Y)$ は, Seifert 3 次元多様体の線型結合で書かれている時. 有理数であった. すなわち, $r_s(Y)$ が無理数であるような $Y$ を発見すれば, 問 5 に答えを与えることができる. これを念頭に, 次のような計算を行った.

**コンピュータ計算 1** 任意の $s$ に対して

$$r_s(S^3_{1/2}(5_2^*)) \approx 0.0017648904\ 7864885113\ 0739625897\ 0947779330\ 4925308209$$

が $10^{-50}$ オーダーで成立する. ただし, $S^3_{1/2}(5_2^*)$ は, Rolfsen のテーブルの結び目 $5_2$ の, 鏡像の 1/2 手術である.

この値を見ると, 小数点以下に周期性がない.

**問 6** 任意の $s$ に対して, $r_s(S^3_{1/2}(5_2^*))$ は無理数か？

この問いが肯定的に解かれた場合, 示されることとして, 次がある.

**命題 3 (野崎-佐藤-谷口, [26], 2019)** もし問 6 が肯定的に解かれれば, $\Theta^3_H/\Theta^3_S$ は, $\mathbb{Z}$ を部分群として含む. ただし, $\Theta^3_S$ は, Seifert ホモロジー 3 球面に生成される $\Theta^3_H$ の部分群とする.

## 4. 未解決問題

### 4.1. ホモロジー同境群について

$\Theta^3_H$ の構造に関する未解決問題として次がある.

**問 7** $\Theta^3_H$ は, torsion を持つか？

この問題への一つのアプローチとして, 共同研究者の佐藤光樹氏は, 次のような可能性を提示した; $K$ を $S^3$ 内の有向結び目とする. $S(K,-K^*)$ を $K$ と $-K^*$($*$ は鏡像の意) のスプライスとする. この時, $2[S(K,-K^*)] = 0 \in \Theta^3_H$ であることが知られている. よって, 有向結び目 $K$ であって, $S(K,-K^*)$ が $S^3$ とホモロジー同境でないものを発見できれば, 位数 2 の torison の存在が分かる. これについて, 不変量 $r_s(Y)$ は使えないだろうか;

**問 8** $r_s(S(K,-K^*)) \neq \infty$ であるような有向結び目 $K$ と $s$ は, 存在するか？

この問いが肯定的に解かれれば, $\Theta^3_H$ に torsion が見つかる. また, 我々の構成した部分群の列 $\Theta^3_H(\geq r)$ について, 次のような問題がある.

**問 9** $r < r'$ に対して, $\Theta^3_H(\geq r)/\Theta^3_H(\geq r')$ は有限生成か？ また, $\Theta^3_H(\geq \infty)$ は有限生成か？

この問題は, $\Theta^3_H$ を部分群の列に分解して理解する可能性に関わる. この問題へのアプローチとして, 我々の手法を, SW 理論で用いられている "局所同型" のテクニックと組み合わせてさらに深める方向性が考えられる. また, $\Theta^3_H(\geq \infty)$ の $\mathbb{Z}^\infty$ の生成元の候補として, $\{\Sigma(p,q,pqk+1)\}_{k=1}^\infty$ がある.

**問 10** $(p,q)$ は互いに素な自然数のペアとする時, $\{\Sigma(p,q,pqk+1)\}_{k=1}^\infty$ は, 一次独立か?

SW 理論を用いて導かれる, 10/8 定理 ([17]) を使うことで, $\Sigma(2,3,7)$ が torsion でないことが分かる. 一方, YM 理論を用いて得られる $h$ や $\{r_s(Y)\}$, $\Gamma_Y(k)$ は, $\Sigma(2,3,7)$ に対して自明 ($S^3$ に対する値と同じ) となる. SW 理論から得られる $\mathbb{Z}$ を値に持つホモロジー同境不変量 $\alpha$, $\beta$, $\gamma$([23]), $\kappa$ ([22]) は, $\Sigma(2,3,7)$ に対して消えていないことが知られており, これらを用いることは, 問 10 を肯定的に解く際には, 一つの可能性を与える.

### 4.2. インスタントン Floer ホモロジーについて

我々は, $S^3_{1/k}(K)$ が一次独立であるための十分条件を与えたが, $S^3_{1/k}(K)$ のインスタントン Floer ホモロジーは, 分かっていない. より一般の結び目 $K$ に対して, インスタントン Floer 理論を自由に扱うためには, Floer ホモロジーの計算が重要となる.

**問 11** 2 橋結び目 $K$ と, 0 でない整数 $k \in \mathbb{Z}$ に対して, $S^3_{1/k}(K)$ のインスタントン Floer ホモロジーを計算せよ.

特に $K = T(p,q)$ とするとき, その計算は, [9] で行われている. また, 計算方法の一つの可能性として, 手術完全列を用いるという方法がある ([3]). 最後に, インスタントン Floer 理論における, 基本的な問題を挙げる.

**問 12** 一般の 3 次元多様体 $Y$ と $SU(2)$ 束に対して, 摂動に依らない "同変" インスタントン Floer ホモロジーを構成せよ.

この問題には, 多くの人が特別な場合に挑戦している ([13], [2], [27]) が, 未だ, 決定的な定義は与えられていない. 困難の所在は, "ゲージ群の固定点" に関わる部分にあり, 固定点に寄与により, 摂動に対する依存性や, "$\partial^2 \neq 0$" に関する問題が現れる.

## 参考文献


[1] Aliakbar Daemi. Chern-Simons Functional and the Homology Cobordism Group, 2018; arXiv:1810.08176.

[2] David M. Austin and Peter J. Braam, *Equivariant Floer theory and gluing Donaldson polynomials*, Topology **35** (1996), no. 1, 167–200, DOI 10.1016/0040-9383(95)00004-6. MR1367280

[3] P. J. Braam and S. K. Donaldson, *Floer's work on instanton homology, knots and surgery*, The Floer memorial volume, Progr. Math., vol. 133, Birkhäuser, Basel, 1995, pp. 195–256. MR1362829

[4] Irving Dai, Jennifer Hom, Matthew Stoffregen and Linh Truong. An infinite-rank summand of the homology cobordism group, 2018; arXiv:1810.06145.

[5] S. K. Donaldson, *An application of gauge theory to four-dimensional topology*, J. Differential Geom. **18** (1983), no. 2, 279–315. MR710056

[6] ———, *Floer homology groups in Yang-Mills theory*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 147, Cambridge University Press, Cambridge, 2002. With the assistance of M. Furuta and D. Kotschick. MR1883043

[7] Paul M. N. Feehan and Thomas G. Leness, *An* SO(3)*-monopole cobordism formula relating Donaldson and Seiberg-Witten invariants*, Mem. Amer. Math. Soc. **256** (2018), no. 1226, xiv+234. MR3897982

[8] Ronald Fintushel and Ronald J. Stern, *Pseudofree orbifolds*, Ann. of Math. (2) **122** (1985), no. 2, 335–364, DOI 10.2307/1971306. MR808222

[9] ———, *Instanton homology of Seifert fibred homology three spheres*, Proc. London Math. Soc. (3) **61** (1990), no. 1, 109–137, DOI 10.1112/plms/s3-61.1.109. MR1051101

[10] ———, *Integer graded instanton homology groups for homology three-spheres*, Topology **31** (1992), no. 3, 589–604, DOI 10.1016/0040-9383(92)90053-K. MR1174261

[11] Andreas Floer, *An instanton-invariant for* 3*-manifolds*, Comm. Math. Phys. **118** (1988), no. 2, 215–240. MR956166

[12] Kim A. Frøyshov, *Equivariant aspects of Yang-Mills Floer theory*, Topology **41** (2002), no. 3, 525–552, DOI 10.1016/S0040-9383(01)00018-0. MR1910040

[13] Kenji Fukaya, *Floer homology for oriented* 3*-manifolds*, Aspects of low-dimensional manifolds, Adv. Stud. Pure Math., vol. 20, Kinokuniya, Tokyo, 1992, pp. 1–92, DOI 10.2969/aspm/02010001. MR1208307

[14] ———, *Floer homology of connected sum of homology* 3*-spheres*, Topology **35** (1996), no. 1, 89–136, DOI 10.1016/0040-9383(95)00009-7. MR1367277

[15] Mikio Furuta, *Perturbation of moduli spaces of self-dual connections*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **34** (1987), no. 2, 275–297. MR914023

[16] ———, *Homology cobordism group of homology* 3*-spheres*, Invent. Math. **100** (1990), no. 2, 339–355, DOI 10.1007/BF01231190. MR1047138

[17] M. Furuta, *Monopole equation and the* $\frac{11}{8}$*-conjecture*, Math. Res. Lett. **8** (2001), no. 3, 279–291, DOI 10.4310/MRL.2001.v8.n3.a5. MR1839478

[18] David E. Galewski and Ronald J. Stern, *Classification of simplicial triangulations of topological manifolds*, Ann. of Math. (2) **111** (1980), no. 1, 1–34, DOI 10.2307/1971215. MR558395

[19] Michael Hutchings, *Quantitative embedded contact homology*, J. Differential Geom. **88** (2011), no. 2, 231–266. MR2838266

[20] Michel A. Kervaire, *Smooth homology spheres and their fundamental groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **144** (1969), 67–72, DOI 10.2307/1995269. MR0253347

[21] Michel A. Kervaire and John W. Milnor, *Groups of homotopy spheres. I*, Ann. of Math. (2) **77** (1963), 504–537, DOI 10.2307/1970128. MR0148075

[22] Ciprian Manolescu, *On the intersection forms of spin four-manifolds with boundary*, Math. Ann. **359** (2014), no. 3-4, 695–728, DOI 10.1007/s00208-014-1010-1. MR3231012

[23] ———, *Pin(2)-equivariant Seiberg-Witten Floer homology and the triangulation conjecture*, J. Amer. Math. Soc. **29** (2016), no. 1, 147–176, DOI 10.1090/jams829. MR3402697

[24] Takao Matumoto, *Triangulation of manifolds*, Algebraic and geometric topology (Proc. Sympos. Pure Math., Stanford Univ., Stanford, Calif., 1976), Proc. Sympos. Pure Math., XXXII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1978, pp. 3–6. MR520517

[25] Robert Myers, *Homology cobordisms, link concordances, and hyperbolic* 3*-manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **278** (1983), no. 1, 271–288, DOI 10.2307/1999315. MR697074

[26] Yuta Nozaki, Kouki Sato and Masaki Taniguchi. Filtered instanton Floer homology and the homology cobordism group, 2019; arXiv:1905.04001.

[27] Hirofumi Sasahira, *Instanton Floer homology for lens spaces*, Math. Z. **273** (2013), no. 1-2, 237–281, DOI 10.1007/s00209-012-1003-2. MR3010159

[28] Matthew Stoffregen. Pin(2)-equivariant Seiberg-Witten Floer homology of Seifert fibrations, 2015; arXiv:1505.03234.

[29] Masaki Taniguchi, *Instantons for 4-manifolds with periodic ends and an obstruction to embeddings of 3-manifolds*, Topology Appl. **243** (2018), 1–32, DOI 10.1016/j.topol.2018.04.016. MR3811080