

Heegaard Floer ホモロジーに由来する結び目のコンコードانس不変量

佐藤 光樹 (東京大学・JSPS 特別研究員 PD)*

1. 序

結び目のコンコードانسとは、結び目の間の「コボルディズム」にあたる同値関係であり、また結び目のアイソトピーの一般化にもなっている。この同値類全体は結び目コンコードانس群とよばれるアーベル群を成すが、その群構造については、未だに捻じれ元が持ち得る位数すら決定されていない。一方で、その高次元拡張については Levine [8] によって群構造が完全に決定されている。このことから、結び目コンコードانس群の解明は、低次元トポロジー特有の課題として知られている。

一方、Heegaard Floer ホモロジー理論とは、有向閉 3 次元多様体と 4 次元コボルディズムの成す圏から \mathbb{Z} フィルター付き鎖複体の圏への関手を与える理論である。さらに、結び目 K に対しては \mathbb{Z}^2 フィルター付き鎖複体 $CFK^\infty(K)$ が対応付けられ、そのチェーンホモトピー同値類が結び目のアイソトピー不変量になる。特に、そのある部分商複体のホモロジー群 $\widehat{HFK}(K)$ は結び目 Floer ホモロジーとして知られている。 $\widehat{HFK}(K)$ は有限生成アーベル群で、かつコンピュータ計算も可能な不変量でありながら、結び目の種数（結び目のサイフェルト曲面の最小種数）やファイバー性（結び目の補空間が S^1 上の曲面束の構造をもつか否か）などの幾何的性質を完全に決定できる不変量として有名になった。

鎖複体 $CFK^\infty(K)$ は $\widehat{HFK}(K)$ と比較して計算が困難である一方、 K に沿った手術やハンドル接着を介して、3次元多様体に付随する鎖複体や、4次元コボルディズムに付随するチェーン写像と密接に関わっている。その関係性に着目することで、これまで $CFK^\infty(K)$ から様々なコンコードانس不変量が定義されてきたが、それらは Hom [6] によって導入された結び目コンコードانس群の商群 $\mathcal{C}_{\nu+}$ を介して包括的に理解されるようになった。著者の研究課題は、この商群 $\mathcal{C}_{\nu+}$ の群構造の解明であり、例えば現在までに (1) $\mathcal{C}_{\nu+}$ 上の部分順序の導入、(2) 種数 1 の結び目が $\mathcal{C}_{\nu+}$ 内で生成する部分群の決定、などの成果が得られている。本稿では、これらの著者の研究を、その歴史的背景を踏まえて解説する。

2. 結び目のコンコードانس理論

本節では、結び目のコンコードانس理論における諸概念や歴史を振り返る。

2.1. 結び目コンコードانس群 \mathcal{C}

結び目 K_0, K_1 がコンコードアントであるとは、アニュラスの滑らかな埋め込み $A: S^1 \times [0, 1] \rightarrow S^3 \times [0, 1]$ が存在して、 $A|_{S^1 \times \{i\}} = K_i \times \{i\}$ ($i = 0, 1$) を満たすことである。 K_0, K_1 がアイソトピックであるときは明らかにコンコードアントだが、アイソトピーから誘導される有向アニュラスの埋め込み A には任意の $t \in [0, 1]$ について $A|_{S^1 \times \{t\}}$ が結

本研究は JSPS 科研費 18J00808 の助成を受けたものである。

キーワード：結び目コンコードانس, Heegaard Floer ホモロジー

* 〒153-8914 東京都目黒区駒場 3-8-1 東京大学大学院数理科学研究科

e-mail: sato.kouki@mail.u-tokyo.ac.jp

結び目になるという制約がある．一般には，図 1 のような変形が有向アニュラスの埋め込みで実現されるため，アイソトピックでない結び目同士もコンコールドトになり得る．また，「自明な結び目とコンコールドトであること」は「結び目が B^4 への円板の埋め込みに拡張すること」と同値であり，障害理論のような趣きもある．さらに，結び目のコンコールドトス類全体 \mathcal{C} は，連結和を加法としてアーベル群を成す．

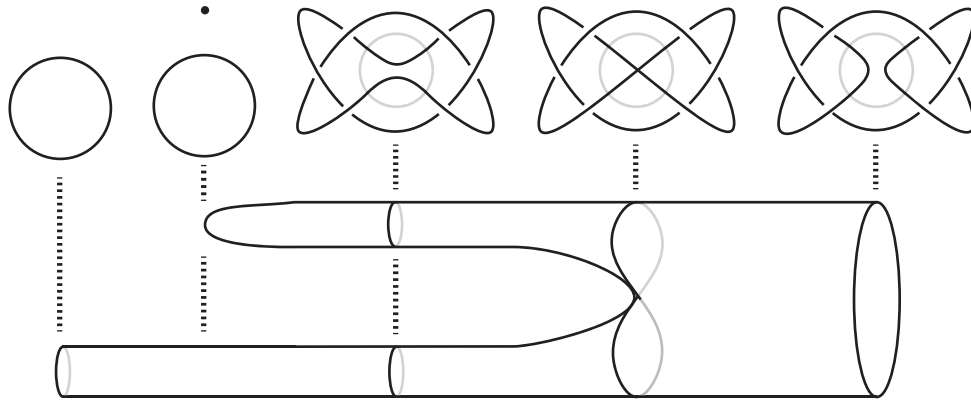


図 1: 右端の「スクエア結び目」と呼ばれる結び目は右手系 trefoil と左手系 trefoil の連結和の構造を持ち，特に解けない結び目である．一方，図の変形から，スクエア結び目は自明な結び目とコンコールドトであることがわかる．

2.2. 高次元結び目コンコールドトス群 \mathcal{C}^n

コンコールドトスの概念は高次元結び目 (S^n の S^{n+2} への滑らかな埋め込み) に対しても自然に拡張され，特に高次元結び目コンコールドトス群 \mathcal{C}^n が得られる．Levine は n 次元結び目のザイフェルト曲面を B^{n+3} 内に埋め込まれたハンドルによって手術することを考え，その障害として整係数正方行列を対応付けた．さらに，整係数正方行列全体の集合上に，コンコールドトスと連結和に対応する同値関係と加法を導入し，代数的コンコールドトス群 \mathcal{C}_{Alg} とよばれるアーベル群を構成した．高次元結び目コンコールドトス群はすべてこの \mathcal{C}_{Alg} を用いて記述され，さらに \mathcal{C}_{Alg} の群構造も理解されている．

定理 2.1 (Levine [8]) 整数 $n \geq 2$ に対して，

$$\mathcal{C}^n \cong \begin{cases} \{0\} & (n: \text{偶数}) \\ \mathcal{C}_{\text{Alg}} & (n: \text{奇数}) \end{cases}.$$

また， $\mathcal{C}^1 = \mathcal{C}$ に対して，全射準同型

$$\pi_{\text{Alg}}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_{\text{Alg}}$$

が存在する．ここで， $\mathcal{C}_{\text{Alg}} \cong \mathbb{Z}^\infty \oplus \mathbb{Z}_2^\infty \oplus \mathbb{Z}_4^\infty$ である．

その後，Casson-Gordon [2] によって π_{Alg} が単射でないことが示され，元の結び目コンコールドトス群 $\mathcal{C} = \mathcal{C}^1$ のみが特有の振る舞いをするということが認識された．

2.3. 位相的結び目コンコダンス群 \mathcal{C}_{Top}

Casson-Gordonの結果以降, $\text{Ker } \pi_{\text{Alg}}$ の研究が盛んになったが, Freedman と Donaldson の理論によって, 位相的コンコダンスと従来のコンコダンスの区別が強く意識されるようになる. ここで, 位相的コンコダンスは, コンコダンスの定義におけるアニュラスの埋め込みを「局所平坦な位相的埋め込み」にまで拡張することで定義される. このとき, 元の場合と同様に位相的結び目コンコダンス群 \mathcal{C}_{Top} が得られ, 準同型 π_{Alg} は

$$\mathcal{C} \xrightarrow{\pi_{\text{Top}}} \mathcal{C}_{\text{Top}} \xrightarrow{\pi_{\text{Alg:Top}}} \mathcal{C}_{\text{Alg}}$$

と分解される. この分解に関して, Freedman と Donaldson の理論は次のことを明らかにした. ここで, $[K]$ は結び目 K のコンコダンス類を表す.

定理 2.2 (Freedman [4]) 結び目 K の Alexander 多項式が 1 となるならば, K は自明な結び目と位相的コンコダントである. すなわち, $[K] \in \text{Ker } \pi_{\text{Top}}$.

定理 2.3 (Donaldson [3]) Alexander 多項式が 1 となる結び目で, \mathcal{C} の元として無限位数をもつものが存在する.

上の二つの定理の系として, 「 $\text{Ker } \pi_{\text{Top}}$ は \mathbb{Z} と同型な部分群をもち, 特に無限位数である」ということが明らかにされた. なお, これまでの主要な道具であった Levine の準同型 π_{Alg} や Casson-Gordon によって与えられたコンコダンス不変量は, $\text{Ker } \pi_{\text{Top}}$ 上では自明な値をとってしまう. したがって, この $\text{Ker } \pi_{\text{Top}}$ の理解をさらに深めるために, ゲージ理論のような微分構造を強く反映する理論がコンコダンス理論において注目され, より重要視されるようになった. そして, この動きが Heegaard Floer ホモロジー理論の登場と結びつき, 双方の発展を促す大きな原動力となった. 現在では, $\text{Ker } \pi_{\text{Top}}$ は \mathbb{Z}^∞ と同型な直和因子 [12] や, \mathbb{Z}_2^∞ と同型な部分群 [5] をもつことが, Heegaard Floer ホモロジー理論を介して証明されている.

3. Heegaard Floer ホモロジー理論

本節では, Ozsváth-Szabó によって導入された Heegaard Floer ホモロジー理論について概説する. ここでは特に, 3次元多様体の鎖複体 CF^∞ と結び目の鎖複体 CFK^∞ の関係性に重きを置いて話を進める.

3.1. \mathbb{Z} フィルター付き鎖複体 CF^∞

Y を有向閉 3次元多様体とする. このとき, Heegaard 曲面と呼ばれる Y 内の種数 g 有向閉曲面 Σ_g が存在して, Y は 2つのハンドル体 H_α, H_β に分解される. さらに, Σ_g 上の非交和な単純閉曲線の組 $\{\alpha_i\}_{i=1}^g$ (resp. $\{\beta_i\}_{i=1}^g$) を H_α (resp. H_β) 内でそれぞれ非交和な円板を張るようなものとしてとることができ, 三つ組 $\mathcal{H} := (\Sigma_g; \{\alpha_i\}_{i=1}^g, \{\beta_i\}_{i=1}^g)$ から Y の微分同相類は復元することができる. この \mathcal{H} を Y の種数 g の Heegaard 図式とよぶ.

次に, S_n を n 次対称群とする. このとき, $\text{Sym}^n(\Sigma_g) := (\Sigma_g \text{ の } n \text{ 個直積}) / S_n$ には n 次元複素多様体の構造が入ることが知られている. 特に, $\text{Sym}^g(\Sigma_g)$ は g 次元複素多様体であり, その中には 2つの実 g 次元トーラス

$$\mathbb{T}_\alpha := (\alpha_1 \times \cdots \times \alpha_g) / S_g \quad \text{および} \quad \mathbb{T}_\beta := (\beta_1 \times \cdots \times \beta_g) / S_g$$

が埋め込まれていると見なせる. Heegaard Floer 鎖複体 $CF^\infty(\mathcal{H})$ は, 大雑把に言えば, $\text{Sym}^g(\Sigma_g)$ と $\mathbb{T}_\alpha, \mathbb{T}_\beta$ をそれぞれシンプレクティック多様体と 2 つのラグランジアン部分多様体に見立て, “ラグランジアン交叉 Floer ホモロジー” の構成を適用することで得られる. ただし, \mathbb{Z} フィルトレーションを導入するために, 実際には補空間 $\Sigma_g \setminus (\cup_i \alpha_i \cup \cup_i \beta_i)$ 上の基点 w を含めて鎖複体 $CF^\infty(\mathcal{H}, w)$ を定める. また $CF^\infty(\mathcal{H}, w)$ の生成系には, “ラグランジアン同士の交叉” の \mathbb{Z} コピーにあたる $(\mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta) \times \mathbb{Z}$ が採用されている. このとき, フィルトレーションレベル m の部分複体にはちょうど $(\mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta) \times \{i \leq m\}$ で生成される部分群が対応する.

例えば, 図 2 の左図 \mathcal{H} は S^3 の Heegaard 図式の一つであり, 右図はそれに対応する鎖複体 $CF^\infty(\mathcal{H}, w)$ である. 特に, その次数 n のホモロジー群を $HF_n^\infty(\mathcal{H}, w)$ と書く とすると,

$$HF_n^\infty(\mathcal{H}, w) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (n: \text{偶数}) \\ 0 & (n: \text{奇数}) \end{cases}$$

となる.

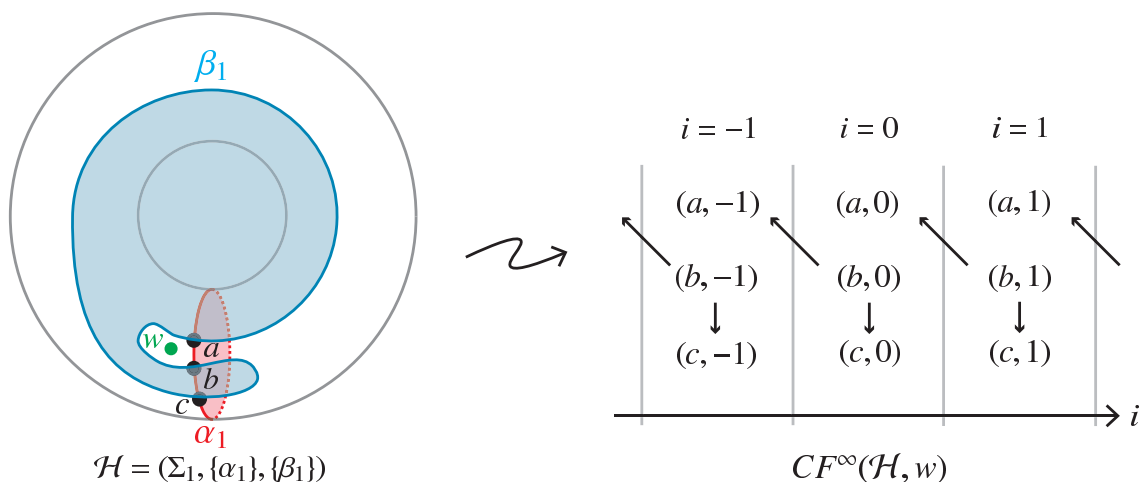


図 2: 左図は S^3 の種数 1 の Heegaard 図式の例. α_1, β_1 はそれぞれ Σ_1 の内側と外側で円板を張っている. 右図は左図に対応する鎖複体. 矢印は始点の微分が終点の線形和になっていることを意味する. また, チェイン (a, i) の次数は $2i$ で, 特に $(a, \frac{n}{2})$ (およびこれと homologous な $(c, \frac{n}{2} + 1)$) が $HF_n^\infty(\mathcal{H}, w)$ のホモロジーの生成元を与えるサイクルとなっている.

上述した $CF^\infty(\mathcal{H}, w)$ は, 次の意味で Y に関する位相不変性を持っている.

定理 3.1 (Ozsváth-Szabó [11]) $\mathcal{H}, \mathcal{H}'$ を Y の Heegaard 図式とする. このとき, それぞれの任意の基点 w, w' について, \mathbb{Z} フィルター付き鎖複体としてのチェインホモトピー同値

$$CF^\infty(\mathcal{H}, w) \simeq CF^\infty(\mathcal{H}', w')$$

が成立する.

特に、フィルトレーションレベル -1 の部分複体 $CF^-(\mathcal{H}, w)$ とその商複体 $CF^+(\mathcal{H}, w)$ について、誘導される短完全列

$$0 \rightarrow CF^-(\mathcal{H}, w) \rightarrow CF^\infty(\mathcal{H}, w) \rightarrow CF^+(\mathcal{H}, w) \rightarrow 0$$

のチェインホモトピー同値類や、ホモロジー完全列

$$\cdots \rightarrow HF^-(\mathcal{H}, w) \rightarrow HF^\infty(\mathcal{H}, w) \rightarrow HF^+(\mathcal{H}, w) \rightarrow \cdots$$

の同型類は、 Y の位相不変量となる。また、フィルトレーションレベル 0 を $CF^-(\mathcal{H}, w)$ で割った部分商複体 $\widehat{CF}(\mathcal{H}, w)$ は、 $\mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta$ を生成系にもつ有限次元自由アーベル群となる。さらに、そのホモロジー群 $\widehat{HF}(\mathcal{H}, w)$ は L 空間予想 [1] の由来となる対象で、定義の拡張や性質の解明など、今でもさかんに研究が行われている。

3.2. \mathbb{Z}^2 フィルター付き鎖複体 CFK^∞

次に、 K を S^3 内の結び目とする。¹このとき、 S^3 のある Heegaard 図式 \mathcal{H} とその上の二つの基点 w, z を用いて結び目 K を表すことができる。(実際、ハンドル体 H_α, H_β の中で、 α_i や β_i の張る円板を避けながら w と z を結ぶ線分の埋め込みは、アイソトピーの差を除いてそれぞれ一意に定まる。図 3 の左図も併せて参照されたい。) よって、結び目には $CF^\infty(\mathcal{H}, w)$ と $CF^\infty(\mathcal{H}, z)$ の二つの鎖複体が同時に対応することになる。さらに、この二つの鎖複体は標準的にチェイン同型になっており、両者の違いは \mathbb{Z} フィルトレーションの入り方のみとなる。

そこで、標準的なチェイン同型を介して「 $CF^\infty(\mathcal{H}, w)$ 上に基点 z に由来する \mathbb{Z} フィルトレーションをさらに付加する」ことで、 \mathbb{Z}^2 フィルター付き鎖複体 $CFK^\infty(\mathcal{H}, w, z)$ を得る。特に、この構成から、 $CFK^\infty(\mathcal{H}, w, z)$ は \mathbb{Z} フィルター付き鎖複体として $CF^\infty(\mathcal{H}, w)$ および $CF^\infty(\mathcal{H}, z)$ と標準的にチェイン同型であることがわかる。

例えば、実際にこの手続きで図 2 の $CF^\infty(\mathcal{H}, w)$ を $CFK^\infty(\mathcal{H}, w, z)$ に変換すると、図 3 の右図のようになる。

このとき、 $CFK^\infty(\mathcal{H}, w, z)$ の K に関するアイソトピー不変性は次のように述べられる。

定理 3.2 (Ozsváth-Szabó [10]) $(\mathcal{H}, w, z), (\mathcal{H}', w', z')$ を K を表す S^3 の二重基点付き Heegaard 図式とする。このとき、 \mathbb{Z}^2 フィルター付き鎖複体としてのチェインホモトピー同値

$$CFK^\infty(\mathcal{H}, w, z) \simeq CFK^\infty(\mathcal{H}', w', z')$$

が成立する。

特に、 $CF^\infty(\mathcal{H}, w)$ の部分商複体 $\widehat{CF}(\mathcal{H}, w)$ の上にも基点 z に由来する \mathbb{Z} フィルトレーションが入り、そのチェインホモトピー同値類が K のアイソトピー不変量となる。この \mathbb{Z} フィルター付き鎖複体に付随するスペクトル系列の E^1 ページが結び目 Floer ホモロジー $\widehat{HFK}(K)$ にあたる。(特に、 $\widehat{HFK}(K)$ は $CFK^\infty(\mathcal{H}, w, z)$ から計算可能である。) その他にも、 $CFK^\infty(\mathcal{H}, w, z)$ から全ての Dehn 手術の 4 種のホモロジー群 $HF^\infty, HF^-, HF^+, \widehat{HF}$ が計算可能であることなどが知られている。[13, 14]

¹実際は、より一般に、任意の閉 3 次元多様体内の null-homologous な結び目に対して同様の構成や不変性が成立する。

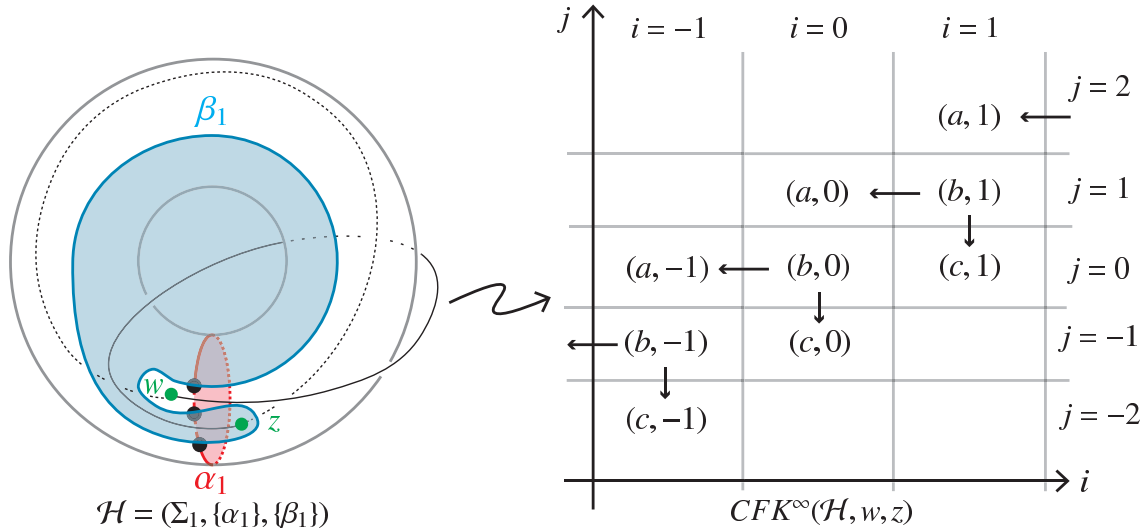


図 3: Σ_1 の内側では α_1 の張る円板を, 外側では β_1 の張る円板を避けて 2 つの基点 w, z を結ぶと, 2 重基点付き Heegaard 図式が表す結び目が復元できる. (この例では右手系 trefoil が現れている.) 右図は 左図に対応する鎖複体 $CFK^\infty(\mathcal{H}, w, z)$. i 軸は $CF^\infty(\mathcal{H}, w)$ 元来の \mathbb{Z} フィルトレーションであり, j 軸は z に由来する \mathbb{Z} フィルトレーションである.

4. CFK^∞ に由来するコンコーダンス不変量

4.1. 様々なコンコーダンス不変量と, Hom による解釈

2.3 節で述べたように, 結び目コンコーダンスの研究者の間では, 結び目コンコーダンス群の部分群 $\text{Ker } \pi_{\text{Top}}$ を詳しく調べられるような理論に注目が集まっていた. そして Heegaard Floer ホモロジー理論の登場以降, 様々なコンコーダンス不変量が定義され, 研究された. 以下では, その一部で, 特に本研究と関わりが深いものを紹介する.

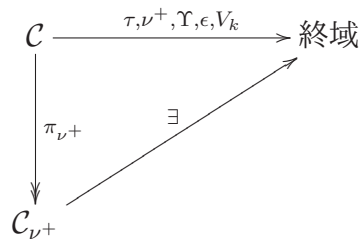
- Ozsváth-Szabó [9] 本人らによって与えられた準同型写像 $\tau: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{Z}$. この不変量は, CFK^∞ から誘導される \widehat{CF} 上の \mathbb{Z} フィルトレーションを用いて定義される.
- Hom-Wu [7] によって与えられた写像 $\nu^+: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$. この不変量は, CFK^∞ から誘導される CF^+ 上の \mathbb{Z} フィルトレーションを用いて定義される. ν^+ は準同型ではないが, 劣加法性: $\nu^+(K \# J) \leq \nu^+(K) + \nu^+(J)$ をもち, 特に $\nu^+(K) = \nu^+(-K) = 0$ なる元全体²は \mathcal{C} 内で部分群 H_{ν^+} を成す.
- Ozsváth-Stipsicz-Szabó [12] によって与えられた準同型写像 $\Upsilon: \mathcal{C} \rightarrow \text{PL}([0, 2], \mathbb{R})$. ただし, $\text{PL}([0, 2], \mathbb{R})$ は閉区間 $[0, 2]$ 上の区分的線形関数全体の集合である. この不変量は, 各 $t \in [0, 2]$ ごとに CFK^∞ 上の \mathbb{Z}^2 フィルトレーションを“線形化”した \mathbb{R} フィルトレーション³を用いて定義される. 特に, この不変量 Υ の“微分”

²ここで $-K$ は, K のコンコーダンス群の元としての逆元を表す.
³ $t \in [0, 2]$ を固定したとき, フィルトレーションレベル $s \in \mathbb{R}$ の部分複体は $(t/2)i(c) + (1-t/2)j(c) \leq s$ を満たすチェーン c によって生成される. (ただし, $i(c), j(c)$ は, 基点 w, z それぞれに由来する \mathbb{Z} フィルトレーションに関して, c を含む最小のフィルトレーションレベル.)

を考えると、全射準同型 $\Upsilon': \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{Z}^\infty$ が得られる。これによって、 $\text{Ker } \pi_{\text{Top}}$ が \mathbb{Z}^∞ と同型な直和因子を持つことが初めて証明された。

この他にも、 $\epsilon: \mathcal{C} \rightarrow \{\pm 1, 0\}$, $\{V_k: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}\}_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ など様々な不変量が定義されているが、上述の不変量はすべて CFK^∞ を用いて定義されている。したがって、これら全ての不変量に対して普遍性をもつ不変量の存在を問題にするのは自然である。この問いに対して、Hom は次のような解答を与えた。

定理 4.1 (Hom [6]) \mathcal{C}_{ν^+} を、 \mathcal{C} の H_{ν^+} による商群と定める。この時、コンコーダンス不変量 $\tau, \nu^+, \Upsilon, \epsilon, V_k$ は全て、射影 $\pi_{\nu^+}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_{\nu^+}$ と \mathcal{C}_{ν^+} を始域とする写像の合成に分解する：



ここで、二つの結び目が $[K] - [J] \in H_{\nu^+}$ を満たすことは、

$$\nu^+([K] - [J]) = \nu^+([J] - [K]) = 0$$

が成り立つことと同値である。これによって定まる結び目の間の同値関係を ν^+ 同値という。上述のように、 ν^+ 同値は「 CFK^∞ から定まるコンコーダンス不変量を統制する同値関係」という意味を既に持っているわけだが、Hom はさらに ν^+ 同値が CFK^∞ の“安定ホモトピー同値”にあたる概念であることも明らかにした。

定理 4.2 (Hom [6]) 結び目 K, J が ν^+ 同値であることは次の命題と同値である： \mathbb{Z}^2 フィルター付き非輪状複体 A_1, A_2 が存在して、 \mathbb{Z}^2 フィルター付き鎖複体としてのチェインホモトピー同値

$$CFK^\infty(K) \oplus A_1 \simeq CFK^\infty(J) \oplus A_2$$

が成立する。

従来は、「コンコーダンス理論の問題を解明するため」に「Heegaard Floer ホモロジー理論を応用する」という構図であったが、Hom の定理によって

$$\begin{array}{ll}
 \text{結び目のアイソトピー分類} & \mapsto CFK^\infty \text{ のチェインホモトピー同値分類} \\
 \text{結び目のコンコーダンス分類} & \mapsto CFK^\infty \text{ の安定ホモトピー同値分類}
 \end{array}$$

という関係が明らかになり、「鎖複体 CFK^∞ の性質を解明するため」に「コンコーダンス理論を応用する」という研究も新たに可能になった。著者はこの観点から現在研究を進めている。

4.2. 著者による研究成果 (1) : \mathcal{C}_{ν^+} 上への部分順序の導入

ν^+ 同値の定義は、二つの等式

$$\nu^+([K] - [J]) = \nu^+([J] - [K]) = 0$$

が同時に成立するというものであったが、このうちの一つを用いれば \mathcal{C}_{ν}^+ 上に部分順序を導入することができる。すなわち、 \mathcal{C}_{ν^+} の 2 元 x, y に対し、関係 $x \leq y$ を

$$\nu^+(x - y) = 0$$

で定めると、関係 \leq は \mathcal{C}_{ν^+} 上の部分順序となる。さらに、この部分順序は次のようなよい性質をもつ。

定理 4.3 (佐藤 [15]) \mathcal{C}_{ν^+} 上の部分順序について、以下のことが成り立つ。

- 任意の $x, y, z \in \mathcal{C}_{\nu^+}$ について、 $x \leq y$ ならば $x + z \leq y + z$.
- 任意の $x, y \in \mathcal{C}_{\nu^+}$ について、 $x \leq y$ ならば $-y \leq -x$.
- 不変量 $\tau, \nu^+, -\Upsilon, V_k$ を \mathcal{C}_{ν^+} を始域とする写像とみなすとき、これらは部分順序を保存する。
- トーラス体 $V = S^1 \times D^2$ 内の任意の結び目 P について、それに付随する写像

$$P: \mathcal{C}_{\nu^+} \rightarrow \mathcal{C}_{\nu^+}, [K]_{\nu^+} \mapsto [P(K)]_{\nu^+}$$

は well-defined で、かつ部分順序を保存する。ただし、 $P(K)$ は P をパターンとする K のサテライト結び目⁴である。

さらに、最新の成果として、部分順序 \leq は次の意味を持つことも分かった。ここで、チェイン写像 $f: C_1 \rightarrow C_2$ が疑同型であるとは、ホモロジー上に誘導される準同型 $f_*: H_*(C_1) \rightarrow H_*(C_2)$ が同型写像になっていることである。

定理 4.4 (佐藤) 関係 $[K]_{\nu^+} \leq [J]_{\nu^+}$ が成立することは次の命題と同値である： \mathbb{Z}^2 フィルトレーションを加味した疑同型写像

$$f: CFK^\infty(J) \rightarrow CFK^\infty(K)$$

が存在する。

特に、2 つの \mathbb{Z}^2 フィルターつき鎖複体の双方向に疑同型写像が存在することを双疑同型と呼ぶことにすると、Hom の考察に加えて

$$\begin{aligned} \text{結び目のコンコーダンス分類} &\mapsto CFK^\infty \text{ の安定ホモトピー同値分類} \\ &\Leftrightarrow CFK^\infty \text{ の双疑同型分類} \end{aligned}$$

という対応が得られたことになる。さらに、安定ホモトピー同値写像と比較して、双方向の疑同型写像はそれぞれ独立に構成することができるという、扱いやすさの利点もある。

⁴ トーラス体 V の中心線 $S^1 \times \{O\}$ が K に移るように V を S^3 に埋め込んだ際の、 P の像として定まる結び目のこと。

4.3. 著者による研究成果 (2) : 種数 1 の結び目の ν^+ 同値類の分類

著者はさらに, 4.2 節の部分順序の幾何的な性質を詳しく研究し, 任意の結び目の ν^+ 同値類に対して, 次の不等式を証明した. ここで, $g_4(K)$ は「 K が B^4 内で張る有向曲面の最小種数」であり, K の 4 次元種数と呼ばれている.

定理 4.5 (佐藤) 任意の結び目 K に対して, 不等式

$$-g_4(K)[T_{2,3}]_{\nu^+} \leq [K]_{\nu^+} \leq g_4(K)[T_{2,3}]_{\nu^+}$$

が成り立つ. ただし, $T_{2,3}$ は右手系 trefoil を表す.

この不等式の応用として, すべての種数 1 の結び目の ν^+ 同値類を, τ 不変量を用いて完全に分類することに成功した.

定理 4.6 (佐藤) 任意の種数 1 の結び目 K について,

$$[K]_{\nu^+} = \begin{cases} [T_{2,3}]_{\nu^+} & (\tau(K) = 1) \\ 0 & (\tau(K) = 0) \\ -[T_{2,3}]_{\nu^+} & (\tau(K) = -1) \end{cases}$$

が成立する.

この結果については, 古典的な代数的コンコードダンス群 \mathcal{C}_{Alg} と比較しても面白い. そのために, まず \mathcal{C} のフィルトレーションとして, 「種数 n 以下の結び目全体」で生成される \mathcal{C} の部分群 \mathcal{F}_n ($n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) を考える. この時, Levine の不変量と定理 4.6 より

- 像 $\pi_{\text{Alg}}(\mathcal{F}_1)$ は $\mathbb{Z}^\infty \oplus \mathbb{Z}_2^\infty$ を直和因子にもつ.
- 像 $\pi_{\nu^+}(\mathcal{F}_1)$ は $[T_{2,3}]_{\nu^+}$ によって生成される無限巡回群で, 特に $\pi_{\nu^+}(\mathcal{F}_1) \cong \mathbb{Z}$ である.

という対比が得られる. ここで,

- $\pi_{\text{Alg}}(\text{Ker } \pi_{\text{Top}}) = 0$.
- $\pi_{\nu^+}(\text{Ker } \pi_{\text{Top}})$ は \mathbb{Z}^∞ を直和因子にもつ.

という対比もあることから, 「 \mathcal{C}_{ν^+} は微分構造を反映する一方で, 種数によってふるまいが強く制限される」という考察が得られたことになる. これは, \mathcal{C}_{ν^+} による \mathcal{C} の解明の限界を示す一方で, \mathcal{C}_{ν^+} 上のフィルトレーション

$$0 \subset \pi_{\nu^+}(\mathcal{F}_1) \subset \pi_{\nu^+}(\mathcal{F}_2) \subset \cdots \subset \mathcal{C}_{\nu^+}$$

が扱いやすい対象である可能性も示唆している. 特に, 次の問題は未解決で, 著者が今後の課題として重要視しているものである.

問題 4.7 任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ について, \mathcal{C}_{ν^+} の部分群 $\pi_{\nu^+}(\mathcal{F}_2)$ は有限生成か?

Levineの代数的コンコードランス群 \mathcal{C}_{Alg} は、高次元コンコードランス群 \mathcal{C}^n を解明しただけでなく、 $\mathcal{C}^1 = \mathcal{C}$ においても、その大まかな構造や具体的な結び目間のコンコードランスを理解する上で大変有用であり、現在でも非常に重宝されている。今後の著者の一つの目標は、 \mathcal{C}_{ν^+} の構造を詳しく解明し、微分構造を反映したコンコードランスおよび低次元トポロジーにおけるFloer理論的不変量の双方の理解のために重宝される理論として完成させることである。

謝辞 トポロジーシンポジウムにお招きくださった、主催者の皆様に心より感謝を申し上げます。

参考文献

- [1] S. BOYER, C. M. GORDON, AND L. WATSON, *On L-spaces and left-orderable fundamental groups*, Math. Ann., 356 (2013), pp. 1213–1245.
- [2] A. J. CASSON AND C. M. GORDON, *On slice knots in dimension three*, in Algebraic and geometric topology (Proc. Sympos. Pure Math., Stanford Univ., Stanford, Calif., 1976), Part 2, Proc. Sympos. Pure Math., XXXII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1978, pp. 39–53.
- [3] S. K. DONALDSON, *The orientation of Yang-Mills moduli spaces and 4-manifold topology*, J. Differential Geom., 26 (1987), pp. 397–428.
- [4] M. H. FREEDMAN, *The topology of four-dimensional manifolds*, J. Differential Geom., 17 (1982), pp. 357–453.
- [5] M. HEDDEN, S.-G. KIM, AND C. LIVINGSTON, *Topologically slice knots of smooth concordance order two*, J. Differential Geom., 102 (2016), pp. 353–393.
- [6] J. HOM, *A survey on Heegaard Floer homology and concordance*, J. Knot Theory Ramifications, 26 (2017), pp. 1740015, 24.
- [7] J. HOM AND Z. WU, *Four-ball genus bounds and a refinement of the Ozv ath-Szabó tau invariant*, J. Symplectic Geom., 14 (2016), pp. 305–323.
- [8] J. LEVINE, *Knot cobordism groups in codimension two*, Comment. Math. Helv., 44 (1969), pp. 229–244.
- [9] P. OZSVÁTH AND Z. SZABÓ, *Knot Floer homology and the four-ball genus*, Geom. Topol., 7 (2003), pp. 615–639.
- [10] ———, *Holomorphic disks and knot invariants*, Adv. Math., 186 (2004), pp. 58–116.
- [11] ———, *Holomorphic disks and topological invariants for closed three-manifolds*, Ann. of Math. (2), 159 (2004), pp. 1027–1158.
- [12] P. S. OZSVÁTH, A. I. STIPSICZ, AND Z. SZABÓ, *Concordance homomorphisms from knot Floer homology*, Adv. Math., 315 (2017), pp. 366–426.
- [13] P. S. OZSVÁTH AND Z. SZABÓ, *Knot Floer homology and integer surgeries*, Algebr. Geom. Topol., 8 (2008), pp. 101–153.
- [14] ———, *Knot Floer homology and rational surgeries*, Algebr. Geom. Topol., 11 (2011), pp. 1–68.
- [15] K. SATO, *A full-twist inequality for the ν^+ -invariant*, Topology Appl., 245 (2018), pp. 113–130.