

Conway-Gordon の定理の精密化と一般化

新國 亮 (東京女子大学現代教養学部)*

概 要

空間6頂点完全グラフ内の2成分絡み目の絡み数の総和は必ず奇数で、また空間7頂点完全グラフ内の結び目の Conway 多項式の2次の係数の総和は必ず奇数であるという事実は、Conway-Gordon の定理としてよく知られている。本稿では、Conway-Gordon の定理の整数持ち上げによる精密化、及び頂点数8以上の完全グラフへの一般化について、最近の結果を中心に報告する。

1. Conway-Gordon の定理

本稿では、1次元有限 CW 複体の多面体をグラフと呼び、その0胞体を頂点、1胞体を辺と呼ぶことにする。グラフ G の \mathbb{R}^3 への埋め込み $f: G \rightarrow \mathbb{R}^3$ を G の空間埋め込みといい、その像 $f(G)$ を G の空間グラフという (図 1.1)。 G の部分グラフ (部分複体) で円周に同相なものをサイクルといい、 G の空間埋め込み f 及びサイクル (の非交和) λ に対し、 $f(\lambda)$ は $f(G)$ 内の結び目 (絡み目) にほかならない。

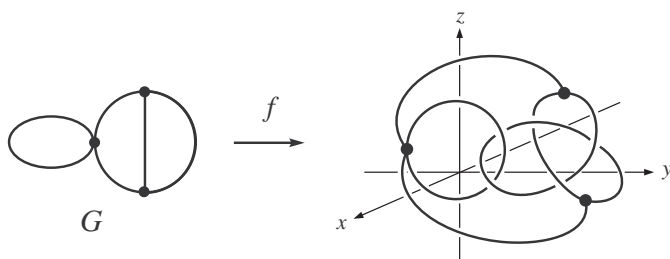


図 1.1: 空間グラフ



図 1.2: 樹下の θ 曲線

グラフ G の2つの空間グラフ $f(G), g(G)$ が同値であるとは、 \mathbb{R}^3 の自己同相写像 Φ が存在して $\Phi(f(G)) = g(G)$ となるときとする。空間グラフ $f(G)$ が自明であるとは、 $f(G)$ が \mathbb{R}^3 内の平面に含まれるある空間グラフ $h(G)$ に同値であるときをいう。結び目理論と同様、空間グラフの分類は基本的問題であり、結び目理論において考えられている概念や不変量の多くが空間グラフに一般化される。図 1.2 の樹下の θ 曲線のように、含まれる結び目や絡み目がみな自明でも、自身は非自明な空間グラフが存在することが、分類問題を研究する1つの動機である。また、空間グラフの正則近傍の分類を考えることで、 \mathbb{R}^3 内のハンドル体 (ハンドル体結び目) や閉曲面の研究にも応用される。これらは空間グラフの外在的性質の研究といえる。一方、グラフが十分「大きい」ならば、その任意の空間グラフはある特有の性質を持ち、それをグラフ自体の構造から特徴付けようという研究が1980年代中盤以降、盛んに行われている。これらはいわば空間グラフの内在的性質の研究であり、その嚆矢となったのが Conway-Gordon の定理である。以下、グラフ G のちょうど k 個の頂点を含むサイクルを k サイクルと呼び、 k サイクル全体の集合を $\Gamma_k(G)$ で、また、 k サイクルと l サイクルとの非交和全体の集合を $\Gamma_{k,l}(G)$

本研究は JSPS 科研費 JP15K04881, JP19K03500 の助成を受けたものです。

* 東京都杉並区善福寺 2-6-1 東京女子大学現代教養学部数理科学科
e-mail: nick@lab.twcu.ac.jp

で表す. また, $(n-1)$ 単体の 1 骨格として得られるグラフを n 頂点完全グラフといい, K_n で表す.¹ 特に $n=6,7$ のとき, Conway-Gordon は次の定理を示した.

定理 1.1. (Conway-Gordon の定理 [6])

- (1) K_6 の任意の空間埋め込み f において, $\sum_{\lambda \in \Gamma_{3,3}(K_6)} \text{lk}(f(\lambda)) \equiv 1 \pmod{2}$. ここで lk は \mathbb{R}^3 における絡み数²を表す.
- (2) K_7 の任意の空間埋め込み f において, $\sum_{\gamma \in \Gamma_7(K_7)} a_2(f(\gamma)) \equiv 1 \pmod{2}$. ここで a_2 は Conway 多項式³ の z^2 の係数を表す.

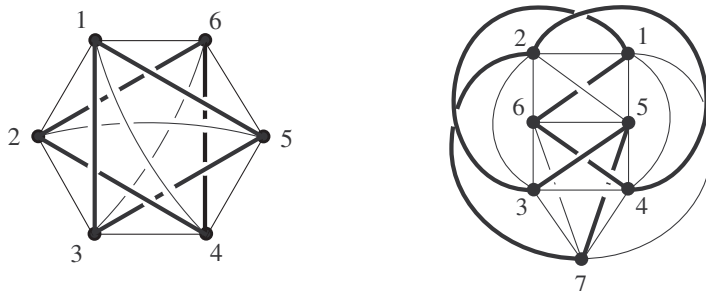


図 1.3: K_6, K_7 の空間グラフ. 太線部は左が Hopf 絡み目, 右が三葉結び目に同値.

定理 1.1 から, K_6 の空間グラフは必ず非分離な 2 成分絡み目を含むこと, また K_7 の空間グラフは必ず非自明結び目を含むことが導かれ (図 1.3), この事実を指して Conway-Gordon の定理といわれることも多い.⁴ 一般に前者/後者の性質を持つグラフは絡み目内在/結び目内在であるといい, これらの性質を持つグラフの特徴付けは空間グラフの理論における重要な研究テーマである. 特に Robertson-Seymour-Thomas による, 絡み目内在グラフのグラフマイナー理論による特徴付けは大きな成果の 1 つであり [34], 一方で結び目内在グラフの特徴付けは未だ成されていない (例えば [9, §§2-6] を参照). しかし我々の本稿での興味は別の方向にある. いま, 空間グラフ $f(G)$ 内の結び目/絡み目で全ての頂点を含むものを, グラフ理論の用語に倣って **Hamilton 結び目/絡み目** と呼ぶことにする. 我々の目的は, 定理 1.1 を, 空間グラフ内の結び目・絡み目を代数的不変量で縛るという立場から頂点数 $n \geq 8$ の K_n に一般化し, Hamilton 結び目/絡み目の振る舞いを調べることである. そのような研究はこれまでほとんどなかったように思われ, 少なくとも筆者は以下の結果しか知らなかった.

定理 1.2. (1) (Foisy [11], 平野 [13])⁵ K_8 の任意の空間埋め込み f において,

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_8(K_8)} a_2(f(\gamma)) \equiv 3 \pmod{6}.$$

(2) (平野 [13]) $n \geq 9$ のとき, K_n の任意の空間埋め込み f において,

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_n(K_n)} a_2(f(\gamma)) \equiv 0 \pmod{2}.$$

¹ K_n は, n 頂点のうちどの異なる 2 頂点も, ちょうど 1 本の辺で結ばれたグラフである.

² 有向絡み目 $L = J \cup K$ に対し, $H_1(\mathbb{R}^3 - K) \cong \mathbb{Z}$ の生成元を Σ として, $[J] = \text{lk}(L)\Sigma$ となる $\text{lk}(L)$ を L の絡み数といい, L の図式から計算できる. L が分離絡み目 (特に自明) なら $\text{lk}(L) = 0$ である.

³ 有向絡み目 L の Alexander 多項式 $\Delta_L(t) \in \mathbb{Z}[t^{\pm \frac{1}{2}}]$ を適当に正規化し, 変数変換 $z = t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}$ を施して得られる整係数多項式 $\nabla_L(z)$. 特に有向結び目 K の Conway 多項式は向きに依らず, また必ず $1 + \sum_{i \geq 1} a_{2i}(K)z^{2i}$ の形に表される. K が自明なら $\nabla_K(z) = 1$, 特に $a_2(K) = 0$ である.

⁴ K_6 に関しては Sachs も独立に示していて [36], Conway-Gordon-Sachs の定理といわれることもある.

⁵ Foisy は $\sum_{\gamma \in \Gamma_8(K_8)} a_2(f(\gamma)) \equiv 0 \pmod{3}$ を示し [11], 平野は $\sum_{\gamma \in \Gamma_8(K_8)} a_2(f(\gamma)) \equiv 1 \pmod{2}$ を示した [13].

- (3) (Kazakov-Korablev [19]) $n \geq 7$ のとき, K_n の任意の空間埋め込み f において,

$$\sum_{p+q=n} \sum_{\lambda \in \Gamma_{p,q}(K_n)} \text{lk}(f(\lambda)) \equiv 0 \pmod{2}.$$

定理 1.1 のオリジナルの証明は以下のように成された. K_7 の空間埋め込み f に対し, まず $\alpha(f) \equiv \sum_{\gamma \in \Gamma_7(K_7)} a_2(f(\gamma)) \pmod{2}$ が辺の間の交差交換で不変であることを示す. 従って $\alpha(f)$ は埋め込み f に依らず, 次に具体的に $\alpha(h) = 1$ となる埋め込み h を与え, $\alpha(f) = \alpha(h) = 1$ を得る (実際, 図 1.3 の K_7 の空間グラフは, 全 360 個の Hamilton 結び目のうち唯一つだけ非自明で $a_2 = 1$). K_6 の空間埋め込み f に対しても, $\sigma(f) \equiv \sum_{\lambda \in \Gamma_{3,3}(K_6)} \text{lk}(f(\lambda)) \pmod{2}$ に対し全く同じプロセスを踏んで $\sigma(f) = 1$ が示される. 議論はスマートかつ図式を用いた初等的なもので極めてアクセシブルである反面, より大きな頂点数の K_n への一般化, あるいは合同式の精密化を安直に図ると大変煩雑となり, 更に具体的な埋め込み h について $\alpha(h)$ を計算することも一般には容易でない. それがこの方向の研究が敬遠された原因の1つであるように思われる. しかし筆者は10年前, もとの頂点数 $n = 6, 7$ において, 定理 1.1 の整数持ち上げを与えて精密化することに成功し, 更に最近, 森下央子氏 (東京女子大学) との共同研究により, それを頂点数 $n \geq 8$ の K_n に一般化することに成功した. 本稿では, その概要を報告する.

2. Conway-Gordon の定理の精密化

定理 1.1 (1), (2) は, いずれも以下のように整数上の等式に持ち上がる.

定理 2.1. (新國 [26])

- (1) K_6 の任意の空間埋め込み f において,

$$2 \sum_{\gamma \in \Gamma_6(K_6)} a_2(f(\gamma)) - 2 \sum_{\gamma \in \Gamma_5(K_6)} a_2(f(\gamma)) = \sum_{\lambda \in \Gamma_{3,3}(K_6)} \text{lk}(f(\lambda))^2 - 1. \quad (2.1)$$

- (2) K_7 の任意の空間埋め込み f において,

$$7 \sum_{\gamma \in \Gamma_7(K_7)} a_2(f(\gamma)) - 14 \sum_{\gamma \in \Gamma_5(K_7)} a_2(f(\gamma)) = 2 \sum_{\lambda \in \Gamma_{3,4}(K_7)} \text{lk}(f(\lambda))^2 + 3 \sum_{\lambda \in \Gamma_{3,3}(K_7)} \text{lk}(f(\lambda))^2 - 42. \quad (2.2)$$

実際, (2.1) の両辺の mod 2 を取ると定理 1.1 (1) が得られる. また, (2.2) の両辺の mod 2 を取ると $\sum_{\gamma \in \Gamma_7(K_7)} a_2(f(\gamma)) \equiv \sum_{\lambda \in \Gamma_{3,3}(K_7)} \text{lk}(f(\lambda))$ で, 実は右辺は奇数 (後述) なので定理 1.1 (2) が得られる.

定理 2.1 は以下のようにして証明された. いま, K_6 から 2 つの 3 サイクルの非交和を除いて得られるグラフを $K_{3,3}$ で表すとき, $G = K_5$ または $K_{3,3}$ の空間埋め込み f に対し, **Simon 不変量** と呼ばれる奇数値不変量 $\mathcal{L}(f)$ が定義される.⁶ また, Γ' を $G = K_5$ のとき $\Gamma' = \Gamma_5(K_5)$, $G = K_{3,3}$ のとき $\Gamma' = \Gamma_6(K_{3,3})$ とするとき, α 不変量 $\alpha(f)$ が

$$\alpha(f) = \sum_{\gamma \in \Gamma'} a_2(f(\gamma)) - \sum_{\gamma \in \Gamma_4(G)} a_2(f(\gamma)) \quad (2.3)$$

で定義される.⁷ Simon 不変量と α 不変量との間には, 以下の関係:

⁶ X の 2 点配置空間 $C_2(X) = \{(x, y) \in X \times X \mid x_1 \neq x_2\}$ 及びその上の対合 $\iota(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$ に対し, チェイン複体 $\text{Ker}(1 + \iota_{\#})$ の整係数コホモロジー群を $H^*(C_2(X), \iota)$ と表す. $G = K_5$ または $K_{3,3}$ の空間埋め込み f に対し, $H^2(C_2(\mathbb{R}^3), \iota) \cong \mathbb{Z}$ の生成元 Σ の $(f \times f)^*$ による像 $(f \times f)^*(\Sigma) \in H^2(C_2(G), \iota) \cong \mathbb{Z}$ を f の **Simon 不変量** といい, $\mathcal{L}(f)$ で表す. これも f の図式から計算できる [40].

⁷ 定理 1.1 (2) の証明における K_7 の埋め込み f に依らない量 $\alpha(f)$ のアイデアを捉え直し, $G = K_5, K_{3,3}$ に限らず, より一般的な設定の下で, 空間グラフのホモトピー不変量として導入された [39].

$$\sum_{\gamma \in \Gamma'} a_2(f(\gamma)) - \sum_{\gamma \in \Gamma_4(G)} a_2(f(\gamma)) = \frac{\mathcal{L}(f)^2 - 1}{8} \quad (2.4)$$

が成り立つ [28] (本質的には本橋-谷山 [22]). 改めて K_6 の任意の空間埋め込み f に対し, K_6 はちょうど6個の K_5 に同型な部分グラフ G_i ($i = 1, 2, \dots, 6$), ちょうど10個の $K_{3,3}$ に同型な部分グラフ H_j ($j = 1, 2, \dots, 10$) を含み,

$$\sum_{j=1}^{10} \mathcal{L}(f|_{H_j})^2 - \sum_{i=1}^6 \mathcal{L}(f|_{G_i})^2 = 4 \sum_{\lambda \in \Gamma_{3,3}(K_6)} \text{lk}(f(\lambda))^2$$

が成り立つことが, K_6 の空間グラフの「ホモロジー分類」 [40] の応用により示される. そこで各 $\mathcal{L}(f|_{H_i})$, $\mathcal{L}(f|_{G_j})$ に (2.4) を適用し整理すると (1) が得られる. (2) は, K_7 の任意の空間埋め込み f に対し, K_7 の部分グラフで K_6 に同相なもの F を全て考え (図 2.1), $f|_F$ に定理 2.1 (1) を適用し, 全ての F について足し合わせ整理して得られる.

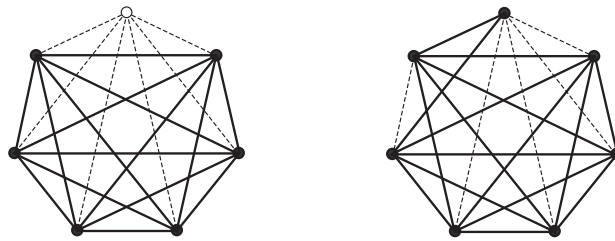


図 2.1: K_7 の部分グラフで K_6 に同相なもの

定理 2.1 (1) の証明の肝は, 空間グラフのホモロジー不変量を結び目成分の a_2 を用いて構成し, そこにホモロジー完全分類を適用して一般的な関係式を得るところである.⁸ これは関係式 (2.4) を得る際に用いられたアイデアでもあった.

3. Conway-Gordon の定理の一般化

定理 2.1 (2) の証明の手法は一般の K_n ($n = 8, 9, \dots$) に次々と適用でき, 実際に $f(K_n)$ 内の Hamilton 結び目の a_2 の総和が⁹, 5 サイクル結び目の a_2 , 及び 2 成分絡み目の lk^2 から決まることは認識していたが, k サイクル結び目と l サイクル結び目からなる 2 成分絡み目を (k, l) 絡み目と呼ぶとき ($6 \leq k + l \leq n$), 各 (k, l) 絡み目の lk^2 の総和の一般的な現れ方がわからず, 明晰な関係式に表せないでいた. しかし, K_7 の空間グラフが持つ以下の性質に (ようやく) 気が付いたことが, 突破口を開く鍵となった.

定理 3.1. (森下-新國 [20]) K_7 の任意の空間埋め込み f において,

$$\sum_{\lambda \in \Gamma_{3,4}(K_7)} \text{lk}(f(\lambda))^2 = 2 \sum_{\lambda \in \Gamma_{3,3}(K_7)} \text{lk}(f(\lambda))^2. \quad (3.1)$$

証明は, 定理 2.1 (1) と同様の手法で O'Donnol が示した完全 3 組グラフ $K_{3,3,1}$ の精密化 Conway-Gordon 型公式 [29] を, K_7 が含む全ての $K_{3,3,1}$ に同型な部分グラフに適用することによる. そこで定理 3.1 と定理 2.1 (2) から, K_7 の空間埋め込み f において

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_7(K_7)} a_2(f(\gamma)) - 2 \sum_{\gamma \in \Gamma_5(K_7)} a_2(f(\gamma)) = \sum_{\lambda \in \Gamma_{3,3}(K_7)} \text{lk}(f(\lambda))^2 - 6 \quad (3.2)$$

⁸ 全ての n について, K_n の空間グラフの全てのホモロジー類が明示的にわかっている [38], [25].

が成り立ち、「Hamilton 結び目の a_2 の総和は、5 サイクル結び目の a_2 の総和と (3, 3) 絡み目の lk^2 の総和で然るべく表される」という仮定の帰納法に乗る. 大雑把にはこのようにして、我々は以下の結果を得た.

定理 3.2. (森下-新國 [20]) $n \geq 6$ のとき, K_n の任意の空間埋め込み f において,

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_n(K_n)} a_2(f(\gamma)) - (n-5)! \sum_{\gamma \in \Gamma_5(K_n)} a_2(f(\gamma)) = \frac{(n-5)!}{2} \left(\sum_{\lambda \in \Gamma_{3,3}(K_n)} \text{lk}(f(\lambda))^2 - \binom{n-1}{5} \right).$$

定理 3.2 から, $f(K_n)$ の Hamilton 結び目の振る舞いがいろいろ見えてくる. まず, $n \geq 6$ のとき, K_n の2つの3サイクルの非交和 $\lambda \in \Gamma_{3,3}(K_n)$ を含む部分グラフで K_6 に同型なものは唯一つであることを注意する. このことと定理 1.1 (1) から, $f(K_n)$ の (3, 3) 絡み目の lk^2 の総和は, K_n の K_6 に同型な部分グラフの個数 $\binom{n}{6}$ 以上である. 従って定理 3.2 より, 以下の系が得られる.

系 3.3. $n \geq 6$ のとき, K_n の任意の空間埋め込み f において,

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_n(K_n)} a_2(f(\gamma)) - (n-5)! \sum_{\gamma \in \Gamma_5(K_n)} a_2(f(\gamma)) \geq \frac{(n-5)(n-6)(n-1)!}{2 \cdot 6!}.$$

注意 3.4. 遠藤-大槻は, 標準的空間グラフの研究の一環として K_n の正準本表現と呼ばれる埋め込み f_b を導入し [7], 更に大槻は, $f_b(K_n)$ の全ての非分離 (3, 3) 絡み目はちょうど $\binom{n}{6}$ 個の Hopf 絡み目であることを示した [30]. 従って系 3.3 の下界は最良である. 更に $f_b(K_n)$ の全ての5サイクル結び目は自明なので, 特に

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_n(K_n)} a_2(f_b(\gamma)) = \frac{(n-5)!}{2} \left(\binom{n}{6} - \binom{n-1}{5} \right) = \frac{(n-5)(n-6)(n-1)!}{2 \cdot 6!} \quad (3.3)$$

が得られる. Hamilton 結び目たちの結び目型の内訳を知らずとも a_2 の総和がわかったことに注目して欲しい. そしてこの計算が系 3.5 の証明で重要な役割を果たす.

次に, $n \geq 7$ のとき, K_n の空間グラフ $f(K_n), g(K_n)$ において, それぞれの Hamilton 結び目の a_2 の総和の差の $\text{mod } (n-5)!$ を取ってみよう. 定理 3.2 から

$$\begin{aligned} & \sum_{\gamma \in \Gamma_n(K_n)} a_2(f(\gamma)) - \sum_{\gamma \in \Gamma_n(K_n)} a_2(g(\gamma)) \\ & \equiv \frac{(n-5)!}{2} \left(\sum_{\lambda \in \Gamma_{3,3}(K_n)} \text{lk}(f(\lambda))^2 - \sum_{\lambda \in \Gamma_{3,3}(K_n)} \text{lk}(g(\lambda))^2 \right) \pmod{(n-5)!} \quad (3.4) \end{aligned}$$

となるが, $f(K_n), g(K_n)$ の (3, 3) 絡み目の lk^2 の総和は, 定理 1.1 (1) からいずれも $\text{mod } 2$ で $\binom{n}{6}$ に合同なので, その差は偶数である. 従って (3.4) から

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_n(K_n)} a_2(f(\gamma)) \equiv \sum_{\gamma \in \Gamma_n(K_n)} a_2(g(\gamma)) \pmod{(n-5)!} \quad (3.5)$$

となる. 即ち, Hamilton 結び目の a_2 の総和は $\text{mod } (n-5)!$ で埋め込みに依らない. そこで g として注意 3.4 で述べた正準本表現 f_b を選べば, (3.3) と (3.5) から

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_n(K_n)} a_2(f(\gamma)) \equiv \frac{(n-5)!}{2} \left(\binom{n}{6} - \binom{n-1}{5} \right) \pmod{(n-5)!} \quad (3.6)$$

が任意の空間埋め込み f について成り立つ. $\binom{n}{6} \equiv 1 \pmod{2}$ と $n \equiv 6, 7 \pmod{8}$, $\binom{n-1}{5} \equiv 1 \pmod{2}$ と $n \equiv 0, 6 \pmod{8}$ がそれぞれ同値であることに注意して (2項係数に関する Lucas の定理を用いれば良い), 以下の系が得られる.

系 3.5. $n \geq 7$ のとき, K_n の任意の空間埋め込み f において, 次の $\text{mod } (n-5)!$ の合同式が成り立つ:

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_n(K_n)} a_2(f(\gamma)) \equiv \begin{cases} -\frac{(n-5)!}{2} \binom{n-1}{5} & (n \equiv 0 \pmod{8}) \\ 0 & (n \not\equiv 0, 7 \pmod{8}) \\ \frac{(n-5)!}{2} \binom{n}{6} & (n \equiv 7 \pmod{8}). \end{cases}$$

例えば $n = 7$ のときは, $\sum_{\gamma \in \Gamma_7(K_7)} a_2(f(\gamma)) \equiv 7 \equiv 1 \pmod{2}$ となり定理 1.1 (2) が, また $n = 8$ のときは, $\sum_{\gamma \in \Gamma_8(K_8)} a_2(f(\gamma)) \equiv -63 \equiv 3 \pmod{6}$ となり定理 1.2 (1) が得られる. 更に $n \geq 9$ のときは定理 1.2 (2) の一般化で, もちろん新結果である.

さて我々は, 2成分 Hamilton 絡み目の絡み数の振る舞いという観点から, 定理 1.2 (3) を以下のように精密化することもできた.

定理 3.6. (森下-新國 [21]) $n \geq 6$ とし, $p, q \geq 3$ を $n = p + q$ なる整数とするととき, K_n の任意の空間埋め込み f において,

$$\sum_{\lambda \in \Gamma_{p,q}(K_n)} \text{lk}(f(\lambda))^2 = \begin{cases} (n-6)! \sum_{\lambda \in \Gamma_{3,3}(K_n)} \text{lk}(f(\lambda))^2 & (p = q) \\ 2(n-6)! \sum_{\lambda \in \Gamma_{3,3}(K_n)} \text{lk}(f(\lambda))^2 & (p \neq q). \end{cases}$$

特に,

$$\sum_{p+q=n} \sum_{\lambda \in \Gamma_{p,q}(K_n)} \text{lk}(f(\lambda))^2 = (n-5)! \sum_{\lambda \in \Gamma_{3,3}(K_n)} \text{lk}(f(\lambda))^2.$$

証明は(今のところ)ちょっと面倒で, $n = 7$ のときの (3.1) に加えて, $n = 8$ のとき

$$\sum_{\lambda \in \Gamma_{3,5}(K_8)} \text{lk}(f(\lambda))^2 = 4 \sum_{\lambda \in \Gamma_{3,3}(K_8)} \text{lk}(f(\lambda))^2, \quad \sum_{\lambda \in \Gamma_{4,4}(K_8)} \text{lk}(f(\lambda))^2 = 2 \sum_{\lambda \in \Gamma_{3,3}(K_8)} \text{lk}(f(\lambda))^2$$

が成り立つことを示してから帰納法に乗せる. 定理 3.6 から, K_n の任意の空間グラフにおいて, Hamilton 結び目の a_2 の場合と同じく, 2成分 Hamilton 絡み目の lk^2 の総和も $\text{mod } (n-5)!$ で埋め込みに依らないのは興味深いことである. 既に見たように $\sum_{\lambda \in \Gamma_{3,3}(K_n)} \text{lk}(f(\lambda))^2 \geq \binom{n}{6}$ であったから, 次の系も直ちに得られる.

系 3.7. $n \geq 6$ とし, $p, q \geq 3$ を $n = p + q$ なる整数とするととき, K_n の任意の空間埋め込み f において,

$$\sum_{\lambda \in \Gamma_{p,q}(K_n)} \text{lk}(f(\lambda))^2 \geq \begin{cases} \frac{n!}{6!} & (p = q) \\ 2 \cdot \frac{n!}{6!} & (p \neq q). \end{cases}$$

特に,

$$\sum_{p+q=n} \sum_{\lambda \in \Gamma_{p,q}(K_n)} \text{lk}(f(\lambda))^2 \geq (n-5) \cdot \frac{n!}{6!}.$$

注意3.4で述べた通り, K_n の正準本表現 f_b によって系3.7の下界も実現され, 従って最良である. K_n の空間グラフ内の非分離絡み目の最小個数の研究は, 例えば Fleming-Mellor [10] に見られ, 系3.3はその代数的な下からの評価を与えたものといえよう.

4. 線形空間グラフへの応用

定理3.2の応用が最も直接的に見出せる空間グラフのクラスとして, 線形空間グラフが挙げられる. いま, 単純グラフ (= 1次元単体的複体の多面体) G の空間埋め込み f_r が線形である⁹とは, G の任意の辺 e に対し, その像 $f_r(e)$ が \mathbb{R}^3 の(まっすぐな)線分であるときをいう. n 頂点の単純グラフは K_n の部分グラフであり, K_n の各頂点を \mathbb{R}^3 内の曲線 (t, t^2, t^3) 上に置き, 異なるどの2頂点も1本の線分で結ぶことで1つの線形な空間埋め込みが得られる(図4.1). これを K_n の標準的な線形空間埋め込みと呼ぶことにする.¹⁰ 従って任意の単純グラフは線形空間埋め込みを持つ.

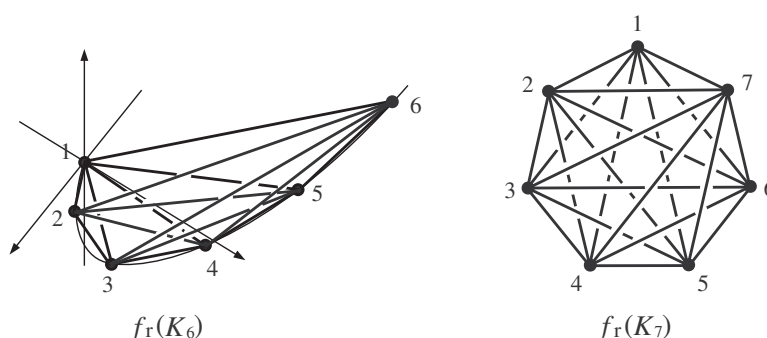


図 4.1: K_n の標準線形空間グラフ ($n = 6, 7$)

線形空間グラフは, 分子トポロジーにおいて分子化合物の数学的モデルとして自然に現れる対象で(例えば [1, §7] を参照), 空間グラフの同値類に強い制約がかかる. 特に我々は, 線形空間グラフの結び目/絡み目内在性や Hamilton 結び目/絡み目の挙動に関心がある. K_n の線形空間グラフ内の Hamilton 結び目/絡み目は棒指数が n 以下であることに注意しよう. ここで絡み目 L の棒指数 $s(L)$ とは, L の \mathbb{R}^3 内での単体分割における1単体の最小数のことであり, 低い棒指数については以下の事実が知られている.

命題 4.1. ([1], [24], [2], [5]) 絡み目 L の棒指数 $s(L)$ について, 次が成り立つ.¹¹

- (1) L が非自明結び目なら, $s(L) \geq 6$.
- (2) $s(L) = 6 \iff L$ は $3_1, 0_1^2, 2_1^2$ のいずれかと同値.
- (3) $s(L) = 7 \iff L$ は $4_1, 4_1^2$ のいずれかと同値.
- (4) $s(L) = 8 \iff L$ は $5_1, 5_2, 6_1, 6_2, 6_3, 3_1 \# 3_1, 3_1 \# 3_1^*, 8_{19}, 8_{20}$ または 5_1^2 のいずれかと同値. ここで $\#$ は連結和, $*$ は鏡像を表す.

命題4.1 (1)により, 5本の1単体からなる結び目は自明である. 従って, 線形空間グラフ内の5サイクル結び目は全て自明となり, 定理3.2から以下の定理が直ちに得られる.


⁹ ここでは線形としたが, linear, rectilinear, straight edge などの用語が使われ, 統一されていない.

¹⁰ 図4.1の K_7 の標準的な線形空間埋め込みは, 実は図1.3の K_7 の空間埋め込みと同値である.

¹¹ 各結び目・絡み目のラベルは, いわゆる Rolfsen テーブル [35] に従った.

定理 4.2. (森下-新國 [20]) $n \geq 6$ のとき, K_n の任意の線形空間埋め込み f_r において,

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_n(K_n)} a_2(f_r(\gamma)) = \frac{(n-5)!}{2} \left(\sum_{\lambda \in \Gamma_{3,3}(K_n)} \text{lk}(f_r(\lambda))^2 - \binom{n-1}{5} \right).$$

命題 4.1 (2) により, 6本の1単体からなる2成分絡み目は, 自明な絡み目 0_1^2 か Hopf 絡み目 2_1^2 のいずれかに同値であり, $\text{lk}(0_1^2) = 0$, $\text{lk}(2_1^2) = \pm 1$ である. 従って (3,3) 絡み目の lk^2 の和は (3,3) Hopf 絡み目の個数に等しく, 定理 4.2 により, K_n の線形空間グラフ内の Hamilton 結び目の a_2 の総和は, いかなる $n \geq 6$ についても, 絡んだトライアングルのペア  の個数で明示的に決まる. 筆者はこの結果が大変気に入っている.

定理 4.2 から, 系 3.3 と全く同様にして $\sum_{\gamma \in \Gamma_n(K_n)} a_2(f_r(\gamma))$ の下界が得られる. 一般の空間埋め込みについては上に有界でないが, 特に線形空間埋め込み f_r については上にも有界であることが, 以下に述べる K_6 の線形空間グラフ内の (3,3) Hopf 絡み目の個数にかかる強い制約からわかる.

命題 4.3. (Hughes [15], Huh-Jeon [16], 新國 [26]) K_6 の任意の線形空間埋め込み f_r において, $f_r(K_6)$ が含む Hopf 絡み目の個数は1個または3個である.

命題 4.3 から $\binom{n}{6} \leq \sum_{\lambda \in \Gamma_{3,3}(K_n)} \text{lk}(f_r(\lambda))^2 \leq 3\binom{n}{6}$ となり, 従って定理 4.2 から次の結果が得られる.

系 4.4. $n \geq 6$ のとき, K_n の任意の線形空間埋め込み f_r において,

$$\frac{(n-5)(n-6)(n-1)!}{2 \cdot 6!} \leq \sum_{\gamma \in \Gamma_n(K_n)} a_2(f_r(\gamma)) \leq \frac{3(n-2)(n-5)(n-1)!}{2 \cdot 6!}.$$

例 4.5. (1) 系 4.4 で $n = 6$ とすると $\sum_{\gamma \in \Gamma_6(K_6)} a_2(f_r(\gamma)) = 0, 1$ となる. 命題 4.1 (2) より $f_r(\gamma)$ は自明な結び目 0_1 または三葉結び目 3_1 であり, $a_2(0_1) = 0$, $a_2(3_1) = 1$ から, $f_r(K_6)$ が含む三葉結び目の個数は, 0個または1個である ([16] で組合せ論的手法により示されていた事実の別証明).

(2) $n = 7$ のとき, 系 4.4 と定理 1.1 (2) から

$$1 \leq \sum_{\gamma \in \Gamma_7(K_7)} a_2(f_r(\gamma)) \leq 15, \quad \sum_{\gamma \in \Gamma_7(K_7)} a_2(f_r(\gamma)) \equiv 1 \pmod{2}$$

である. 命題 4.1 (2), (3) から, $f_r(\gamma)$ は 0_1 , 3_1 または8の字結び目 4_1 のいずれかであり, $a_2(4_1) = -1$ から, $f_r(K_7)$ は必ず三葉結び目を含む (Brown [4], Ramírez Alfonsín [32] で組合せ論的手法により示されていた事実の別証明).

(3) $n = 8$ のとき, 系 4.4 と定理 1.2 (1) から

$$21 \leq \sum_{\gamma \in \Gamma_8(K_8)} a_2(f_r(\gamma)) \leq 189, \quad \sum_{\gamma \in \Gamma_8(K_8)} a_2(f_r(\gamma)) \equiv 3 \pmod{6}$$

である. 命題 4.1 によって8本の1単体からなる結び目は全てわかっている, うち $3_1, 5_1, 5_2, 6_3, 3_1 \# 3_1, 3_1 \# 3_1^*, 8_{19}, 8_{20}$ について $a_2 > 0$ である. 従って $f_r(K_8)$ は必ずこれらのいずれかを含む. 特にこれら結び目の a_2 の値の最大値が $a_2(8_{19}) = 5$ であることから, $f_r(K_8)$ は, $a_2 > 0$ なる Hamilton 結び目を少なくとも $\lceil 21/5 \rceil = 5$ 個含む (注意 5.2 も参照せよ).

注意 4.6. 系 4.4 の下界は標準的な線形空間埋め込みにより実現され、最良である。一方、上界について、例えば $n = 7$ のとき、我々が得た上界は 15 であるが、Jeon et al. [18] における有向マトロイド理論の応用による計算機探索によれば、 K_7 の線形空間埋め込み f_Γ で $\sum_{\gamma \in \Gamma_7(K_7)} a_2(f_\Gamma(\gamma)) = 13, 15$ となるものは存在しないらしい。これは定理 4.2 から、(3, 3) Hopf 絡み目の個数が 19, 21 であるものが存在しないことと同値である。一般に $n \geq 7$ について、系 4.4 の最良の上界は知られていない。

問題 4.7. $n \geq 7$ のとき、 K_n の線形空間グラフ全体において、Hamilton 結び目の a_2 の総和の最大値を決定せよ。または、(3, 3) Hopf 絡み目の個数の最大値を決定せよ。

例 4.8. 図 4.2 の 2 つの K_8 の空間グラフを考える。左は [3] で与えられたもの、右は K_8 の標準的な線形空間グラフで互いに同値でないが、¹² いずれの空間グラフも、全ての非自明な Hamilton 結び目として、ちょうど 21 個の三葉結び目を含む [3], [33] (それらを探してみよ)。筆者はこの「21」という数に何か意味があると感じつつも、10 年以上わからずにいた。しかし今回、特に系 3.3 で $n = 8$ のとき、もし全ての 5 サイクル結び目が自明なら、Hamilton 結び目の a_2 の総和は 21 以上で、更に全ての非自明な Hamilton 結び目が三葉結び目ならば、必ず 21 個以上となる。これが「21」の 1 つの意味であった。

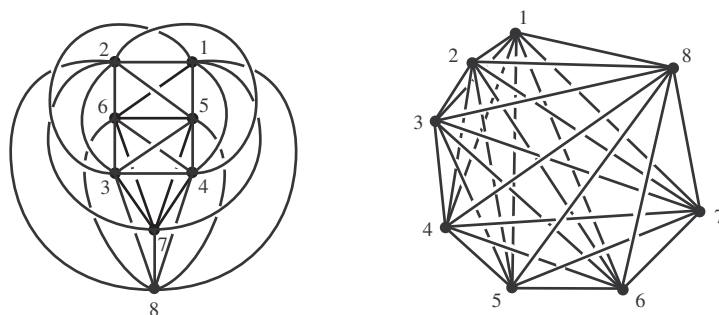


図 4.2: K_8 の 2 つの空間グラフ

5. 更なる応用など

定理 4.2 の応用についてもう少し見て行こう。1 つ目は、 K_n の線形空間グラフの非自明な Hamilton 結び目の最小個数である。 $c(K)$ で結び目 K の最小交差数を表すとき、 $c(K) \leq (s(K) - 3)(s(K) - 4) / 2$ が成り立つこと (Calvo [5]), また $a_2(K) \leq c(K)^2 / 8$ が成り立つことから (Polyak-Viro [31]), n 本の 1 単体からなる結び目 K について

$$a_2(K) \leq \left\lfloor \frac{(n - 3)^2(n - 4)^2}{32} \right\rfloor \tag{5.1}$$

が得られる ($\lfloor \cdot \rfloor$ は床関数)。そこで系 4.4 の下界と (5.1) を用いて、 K_n の線形空間グラフの非自明な Hamilton 結び目の最小個数の下からの評価を与えることができる。

定理 5.1. (森下-新國 [20]) $n \geq 7$ のとき、 K_n の線形空間グラフの非自明な Hamilton 結び目で $a_2 > 0$ なるものの最小個数は、次の r_n 以上である ($\lceil \cdot \rceil$ は天井関数):

$$r_n = \left\lceil \frac{(n - 5)(n - 6)(n - 1)! / (2 \cdot 6!)}{\lfloor (n - 3)^2(n - 4)^2 / 32 \rfloor} \right\rceil.$$

¹² 左の空間グラフは 3 サイクルと 5 サイクルがなす lk = 2 の絡み目 [257] \cup [13846] を含むが、右の空間グラフでは、任意の $\lambda \in \Gamma_{3,5}(K_8)$ に対し、その像は実は自明絡み目か Hopf 絡み目である。

r_n の $7 \leq n \leq 16$ における具体的な値は以下の通りである.

n	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	...
r_n	1	2	12	92	772	7187	73628	823680	10015889	131436569	...

注意 5.2. K_n の線形とは限らない一般の空間グラフについて, $n = 8$ のときは a_2 が奇数の Hamilton 結び目が少なくとも 3 個存在し (平野 [14]), $n \geq 9$ のときは a_2 が奇数の Hamilton 結び目が少なくとも $(n - 1)(n - 2) \cdots 9 \cdot 8$ 個存在することが知られている (Foisy [3]). 我々は線形空間グラフの a_2 が正の Hamilton 結び目を考えているので立場は異なるが, $n = 9, 10, 11$ のとき r_n は Foisy の下界よりも大きい. 一方 $n = 8$ のとき, 例 4.5 (3) で見た通り, $r_2 = 2$ よりも良い評価「5」が得られる.¹³ いずれにしても, 定理 5.1 の評価は $n \geq 8$ については最良には程遠いと思われる.

問題 5.3. $n \geq 8$ のとき, K_n の線形空間グラフ全体において, 非自明な Hamilton 結び目 (で $a_2 > 0$ なるもの) の最小個数を決定せよ.

2つ目の応用は, K_n の線形空間グラフの Hamilton 結び目の a_2 の値の最大値である. いま系 4.4 から, K_n の線形空間埋め込み f_r において

$$\max_{\gamma \in \Gamma_n(K_n)} \{a_2(f_r(\gamma))\} \cdot \#\Gamma_n(K_n) \geq \sum_{\gamma \in \Gamma_n(K_n)} a_2(f_r(\gamma)) \geq \frac{(n - 5)(n - 6)(n - 1)!}{2 \cdot 6!}$$

であり, 両辺を $\#\Gamma_n(K_n) = (n - 1)!/2$ で割って以下が得られる.¹⁴

定理 5.4. (森下-新國 [21]) $n \geq 6$ のとき, K_n の任意の線形空間埋め込み f_r において,

$$\max_{\gamma \in \Gamma_n(K_n)} \{a_2(f_r(\gamma))\} \geq \frac{(n - 5)(n - 6)}{6!}.$$

定理 5.4 は, K_n の線形空間グラフは, n が十分大きければ, 任意に大きな a_2 の値を持つ Hamilton 結び目を必ず含むと言っている. これより, 特に次の結果が得られる.

系 5.5. 正の整数 m に対し, $n > (11 + \sqrt{2880m - 2879})/2$ なら, K_n の任意の線形空間グラフ $f_r(K_n)$ は, $a_2 \geq m$ なる Hamilton 結び目を含む.

注意 5.6. 白井-谷山は, K_n の線形とは限らない空間グラフについて, $K_{48 \cdot 2^k}$ の任意の空間グラフは $|a_2| \geq 2^{2k}$ なる結び目を含むこと, また正の整数 m に対し, $n \geq 96\sqrt{m}$ なら, K_n の任意の空間グラフ $f(K_n)$ は $|a_2| \geq m$ なる結び目を含むことを示した [37]. 特に線形空間グラフに限れば, 我々の結果の方がより良い (以下のテーブルを参照).

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
n (白井-谷山 [37])	48	136	167	96	215	236	254	272	288	304	...
n (森下-新國 [21])	7	33	44	52	60	66	72	77	82	87	...

実は, より強く結び目/絡み目 L について, n が十分大きければ, K_n の任意の線形空間グラフは L に同値な結び目/絡み目を含むことが既に知られており (根上 [24]), そのような n の最小値を L の **Ramsey 数** といって $R(L)$ で表す. 例えば $R(2_1^2) = 6$,

¹³更に $K_{3,3,1,1}$ と表される頂点数 8 の完全 4 組グラフの線形空間グラフは必ず $a_2 > 0$ なる Hamilton 結び目を含み (橋本-新國 [12]), これを K_8 の $K_{3,3,1,1}$ に同型な (280 個の) 部分グラフに適用することで, もっと良い評価「8」も得られるが, 恐らくこれも最良ではない.

¹⁴Hamilton 絡み目の lk^2 の値の最大値についても同様の結果が得られる.

$R(3_1) = 7$ である. 正の整数 m に対し, K_n の任意の線形空間グラフが $a_2 \geq m$ なる結び目を含むような n の最小値を $R(m)$ で表すことにすると, $a_2(K) > 0$ なる結び目 K に対し $R(a_2(K))$ は $R(K)$ を下から評価するが, $R(m)$ の決定自体が非常に難しい.

問題 5.7. $m \geq 2$ に対し, $R(m)$ を求めよ.

最後に今後の展望を挙げておく. Conway-Gordon の定理の精密化・一般化について, lk , a_2 に関する関係式としては定理 3.2, 定理 3.6 が決定版であるように思う. 一方, lk , a_2 はそれぞれ次数 1, 2 の有限型不変量 (Vassiliev 不変量) であるが, Hamilton 結び目/絡み目の振る舞いを縛る不変量としては, n が大きくなるとこれらでは不十分で, より高次の有限型不変量による縛りが予想される. そのような「高次の Conway-Gordon 型公式」を見出すのが 1 つの課題である.¹⁵ 例えば Naimi-Pavelescu は, K_9 の一般の空間グラフは 3 成分非分離絡み目を含むとは限らないが, 線形空間グラフは必ず含むことを計算機探索で示している [23], 一般の空間グラフと線形空間グラフとで結び目/絡み目内在性が異なる. その違いが上に述べたような「高次」の公式によって抽出できると面白い. また, §4 で触れたように, 線形空間グラフは分子トポロジーにおける分子化合物のモデルの 1 つであるが, Flapan-Kozai [8] では, 高分子化合物の絡み合いのモデル化の 1 つとして, 立方体内のランダムな n 点を頂点とする K_n のランダム線形空間グラフが研究されており, その方面への我々の結果の然るべき応用も期待される.

参考文献

- [1] C. C. Adams, The knot book. An elementary introduction to the mathematical theory of knots. Revised reprint of the 1994 original. *American Mathematical Society, Providence, RI*, 2004.
- [2] C. C. Adams, B. M. Brennan, D. L. Greilsheimer and A. K. Woo, Stick numbers and composition of knots and links, *J. Knot Theory Ramifications* **6** (1997), 149–161.
- [3] P. Blain, G. Bowlin, J. Foisy, J. Hendricks and J. LaCombe, Knotted Hamiltonian cycles in spatial embeddings of complete graphs, *New York J. Math.* **13** (2007), 11–16.
- [4] A. F. Brown, Embeddings of graphs in E^3 , Ph. D. Dissertation, Kent State University, 1977.
- [5] J. A. Calvo, Geometric knot spaces and polygonal isotopy, Knots in Hellas '98, Vol. 2 (Delphi), *J. Knot Theory Ramifications* **10** (2001), 245–267.
- [6] J. H. Conway and C. McA. Gordon, Knots and links in spatial graphs, *J. Graph Theory* **7** (1983), 445–453.
- [7] T. Endo and T. Otsuki, Notes on spatial representations of graphs, *Hokkaido Math. J.* **23** (1994), 383–398.
- [8] E. Flapan and K. Kozai, Linking number and writhe in random linear embeddings of graphs, *J. Math. Chem.* **54** (2016), 1117–1133.
- [9] E. Flapan, T. Mattman, B. Mellor, R. Naimi and R. Nikkuni, Recent developments in spatial graph theory, *Knots, links, spatial graphs, and algebraic invariants*, 81–102, *Contemp. Math.*, 689, *Amer. Math. Soc., Providence, RI*, 2017.
- [10] T. Fleming and B. Mellor, Counting links in complete graphs, *Osaka J. Math.* **46** (2009), 173–201.
- [11] J. Foisy, Corrigendum to: “Knotted Hamiltonian cycles in spatial embeddings of complete graphs” by P. Blain, G. Bowlin, J. Foisy, J. Hendricks and J. LaCombe, *New York J. Math.* **14** (2008), 285–287.
- [12] H. Hashimoto and R. Nikkuni, Conway-Gordon type theorem for the complete four-partite graph $K_{3,3,1,1}$, *New York J. Math.* **20** (2014), 471–495.
- [13] Y. Hirano, Knotted Hamiltonian cycles in spatial embeddings of complete graphs, Doctor Thesis, Niigata University, 2010.

¹⁵ 新國-遠田 [27] において, 空間グラフの結び目/絡み目成分の, 次数 3 以下の有限型不変量による縛りが研究されている.

- [14] Y. Hirano, Improved lower bound for the number of knotted Hamiltonian cycles in spatial embeddings of complete graphs, *J. Knot Theory Ramifications* **19** (2010), 705–708.
- [15] C. Hughes, Linked triangle pairs in a straight edge embedding of K_6 , *Pi Mu Epsilon J.* **12** (2006), 213–218.
- [16] Y. Huh and C. Jeon, Knots and links in linear embeddings of K_6 , *J. Korean Math. Soc.* **44** (2007), 661–671.
- [17] Y. Huh, Knotted Hamiltonian cycles in linear embedding of K_7 into \mathbb{R}^3 , *J. Knot Theory Ramifications* **21** (2012), 1250132, 14 pp.
- [18] C. B. Jeon, G. T. Jin, H. J. Lee, S. J. Park, H. J. Huh, J. W. Jung, W. S. Nam and M. S. Sim, Number of knots and links in linear K_7 , slides from the International Workshop on Spatial Graphs (2010). <http://www.f.waseda.jp/taniyama/SG2010/talks/19-7Jeon.pdf>
- [19] A. A. Kazakov and Ph. G. Korablev, Triviality of the Conway-Gordon function ω_2 for spatial complete graphs, *J. Math. Sci. (N.Y.)* **203** (2014), 490–498.
- [20] H. Morishita and R. Nikkuni, Generalizations of the Conway-Gordon theorems and intrinsic knotting on complete graphs, *J. Math. Soc. Japan*, to appear. (arXiv:math.1807.02805)
- [21] H. Morishita and R. Nikkuni, in preparation.
- [22] T. Motohashi and K. Taniyama, Delta unknotting operation and vertex homotopy of graphs in R^3 , *KNOTS '96 (Tokyo)*, 185–200, *World Sci. Publ., River Edge, NJ*, 1997.
- [23] R. Naimi and E. Pavelescu, Linear embeddings of K_9 are triple linked, *J. Knot Theory Ramifications* **23** (2014), 1420001, 9 pp.
- [24] S. Negami, Ramsey theorems for knots, links and spatial graphs, *Trans. Amer. Math. Soc.* **324** (1991), 527–541.
- [25] R. Nikkuni, The second skew-symmetric cohomology group and spatial embeddings of graphs, *J. Knot Theory Ramifications* **9** (2000), 387–411.
- [26] R. Nikkuni, A refinement of the Conway-Gordon theorems, *Topology Appl.* **156** (2009), 2782–2794.
- [27] R. Nikkuni and K. Onda, A characterization of knots in a spatial graph II, *J. Knot Theory Ramifications* **11** (2002), 1133–1154.
- [28] R. Nikkuni and K. Taniyama, Symmetries of spatial graphs and Simon invariants, *Fund. Math.* **205** (2009), 219–236.
- [29] D. O’Donnol, Knotting and linking in the Petersen family, *Osaka J. Math.* **52** (2015), 1079–1100.
- [30] T. Otsuki, Knots and links in certain spatial complete graphs, *J. Combin. Theory Ser. B* **68** (1996), 23–35.
- [31] M. Polyak and O. Viro, On the Casson knot invariant, Knots in Hellas ’98, Vol. 3 (Delphi), *J. Knot Theory Ramifications* **10** (2001), 711–738.
- [32] J. L. Ramírez Alfonsín, Spatial graphs and oriented matroids: the trefoil, *Discrete Comput. Geom.* **22** (1999), 149–158.
- [33] J. L. Ramírez Alfonsín, Spatial graphs, knots and the cyclic polytope, *Beiträge Algebra Geom.* **49** (2008), 301–314.
- [34] N. Robertson, P. Seymour and R. Thomas, Sachs’ linkless embedding conjecture, *J. Combin. Theory Ser. B* **64** (1995), 185–227.
- [35] D. Rolfsen, Knots and links. Mathematics Lecture Series, No. 7. *Publish or Perish, Inc., Berkeley, Calif.*, 1976.
- [36] H. Sachs, On spatial representations of finite graphs, *Finite and infinite sets, Vol. I, II (Eger, 1981)*, 649–662, *Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai*, **37**, *North-Holland, Amsterdam*, 1984.
- [37] M. Shirai and K. Taniyama, A large complete graph in a space contains a link with large link invariant, *J. Knot Theory Ramifications* **12** (2003), 915–919.
- [38] M. Suzuki, Classification of the spatial-graph homology classes of a complete graph, Master thesis, Tokyo Denki University, 1996 (in Japanese).
- [39] K. Taniyama, Link homotopy invariants of graphs in \mathbf{R}^3 , *Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid* **7** (1994), 129–144.
- [40] K. Taniyama, Homology classification of spatial embeddings of a graph, *Topology Appl.* **65** (1995), 205–228.