群作用と多面体 - トーリックトポロジーの観点から -

枡田 幹也（大阪市立大学）

序

1970 年頃に Demazure, Mumford, 三宅-小田らによりトーリック幾何の基礎理論が構築され，トーリック幾何は今も他分野と関わりながら，また一般論がテストできる場として発展している．トーリック幾何の基礎となるのは「トーリック多様体という代数幾何の対象と扇という組合せ論の対象の間に一対一の対応がある」という事実である ([9], [15] 参照)．これ故，トーリック幾何は，代数幾何と組合せ論を繋ぐ架け橋と言える．

このトーリック幾何をトポロジーの観点から展開する試みがあった．最初の試みは，1991 年の Davis-Januszkiewicz による論文である ([8])．この論文は暫く日の目を見なかったが，2000 年頃に Buchstaber-Panov により取り上げられ一般化がなされた ([5])．一方，この動きを知らずに，筆者は（服部晶夫先生の協力も得て）トーリック幾何をトポロジーの観点から展開する試みを行っていた ([13], [10])．その後これらの動きが合流して，トーリックトポロジーという分野が生まれた ([6])．この経緯からして，トーリックトポロジーも組合せ論と密接に関係している．

本講演では，トーリックトポロジーにおいて筆者が遭遇した多面体に関連する話題の内，次の 3 つを紹介する．

(1) トーラス群作用と軌道空間
(2) 凸多面体から得られる平坦リーマン多様体と 3 次元双曲多様体
(3) 旗多様体内の複素トーラス軌道の閉包，置換多面体，置換群上の距離

(1) はトーリック幾何で知られていた事実のトポロジーの観点からの拡張，(2) はトーリック幾何の実数版に対応する話題，(3) はトーリック幾何の範疇における話題であるが，これまでの観点にはなかったと思われる最近の結果である．

1. トーラス群作用と軌道空間

簡単な例から始める．S^1 を長さ 1 の複素数からなる群

$$S^1 = \{g \in \mathbb{C} \mid |g| = 1\},$$

S^2 を空間 $\mathbb{C} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$ 内の原点を中心とした単位球面

$$S^2 = \{(z, x) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mid |z|^2 + x^2 = 1\}$$

とする．このとき，S^1 の S^2 への自然な作用（軸の周りの回転）

$$S^1 \times S^2 \to S^2, \qquad (g, (z, x)) \to (gz, x)$$

の軌道空間 S^2/S^1 は，(z, x) の軌道を x に写す対応により，区間 $I = [-1, 1]$ と同一視できる．S^2 上の S^1 作用の不動点集合 $\mathrm{Fix}(S^1, S^2)$ は北極 $(0, 1)$ と南極 $(0, -1)$ の 2 点から

本研究は科研費 (課題番号:19K03472) の助成を受けたものである。.

なり，これらは区間 I の頂点集合 $V(I)$（または，境界）の 2 点 $\{\pm 1\}$ に対応している．特に

$$|\operatorname{Fix}(S^1, S^2)| = |V(I)| = 2$$

である．一方，S^2 のオイラー標数 $\chi(S^2)$ も 2 であるが，これらの一致は偶然ではない．

上記の例の高次元化として，n 個の直積 $(S^2)^n$ を考える．ここには，$(S^1)^n$ が自然に作用しており，軌道空間 $(S^2)^n/(S^1)^n$ は n 次元立方体 I^n になる．このとき，不動点集合 $\operatorname{Fix}((S^1)^n, (S^2)^n)$ と I^n の頂点集合 $V(I^n)$ に 1 対 1 の対応があり，

$$|\operatorname{Fix}((S^1)^n, (S^2)^n)| = |V(I^n)| = \chi((S^2)^n) = 2^n$$

が成立している．

上の例が示すように，軌道空間の頂点集合は作用をもつ空間のオイラー標数と関連しているが,「ある条件下」では，軌道空間はもっと沢山の情報を持っている．まず「ある条件下」について述べる．$\mathbb{C}^n$ 上の標準的な $(S^1)^n$ 作用

$$(1.1) \qquad (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \to (g_1 z_1, \dots, g_n z_n) \in \mathbb{C}^n \qquad (g_1, \dots, g_n) \in (S^1)^n$$

の軌道空間は，$(z_1, \dots, z_n)$ の軌道に $(|z_1|, \dots, |z_n|)$ を対応させせることにより，$\mathbb{R}^n$ の第 1 象限 $(\mathbb{R}_{\geq 0})^n$ と同一視できる．$(S^1)^n$ の自己同型群 $\operatorname{Aut}((S^1)^n)$ の元で作用を捩じっても軌道空間は変わらない．

定義. $2n$ 次元閉多様体 M の $(S^1)^n$ 作用は，局所的に (1.1) の作用と同じであるとき（正確には，$\operatorname{Aut}((S^1)^n)$ の元で捩じった作用と同じであるとき），locally standard という．

$2n$ 次元閉多様体 M が，locally standard な $(S^1)^n$ 作用をもっているとする．このとき，上の考察より，軌道空間 $M/(S^1)^n$ は局所的に第 1 象限 $(\mathbb{R}_{\geq 0})^n$ であるから，n 次元の角付多様体となる．角付多様体の典型例として単純凸多面体がある．ここで，n 次元凸多面体が単純とは，各頂点において，その頂点を含む余次元 1 の面が丁度 n 個であること，または，各頂点から丁度 n 個の辺が出ていると言ってもよい．

Q を n 次元角付多様体とすると，凸多面体の場合と同様に，各 $0 \leq i \leq n$ に対して i 次元面が定義でき，Q の i 次元面の数を $f_i(Q)$ と書く．ここで，Q 自身は Q の n 次元面と思い $f_n(Q) = 1$ と了解する．0 次元面を頂点，1 次元面を辺，$n-1$ 次元面をファセットともいう．$f_i(Q)$ をを係数とした多項式

$$f_Q(t) := \sum_{i=0}^{n} f_i(Q) t^i$$

を Q の f-多項式といい，この多項式の変数をずらして得られる多項式

$$h_Q(t) := f_Q(t-1)$$

を Q の h-多項式という．f-多項式と h-多項式は同じ情報を持っているが，以下では h-多項式が自然に現れる．

例. $f_i(I^n) = 2^{n-i}\binom{n}{i}$ より，$f_{I^n}(t) = (t+2)^n$．したがって $h_{I^n}(t) = (t+1)^n$.

I^n は $(S^2)^n$ の $(S^1)^n$ 作用による軌道空間であったが，上の例より，$h_{I^n}(t)$ は $(S^2)^n$ のポアンカレ多項式 $\sum_{j=0}^{n} \operatorname{rank}_{\mathbb{Z}} H_{2j}((S^2)^n) t^j$ と一致している．この事実は，I^n の頂点以外の面も数えることにより，$(S^2)^n$ のベッチ数が分かることを示している．$(S^2)^n$ はトーリック多様体の一例で，このような事実がトーリック多様体の場合に成立することは知られていたが，次の定理は，この現象がトーリック多様体に限らず，トポロジーの範疇で成立することを述べたものである．

定理 1.1 ([14]). M を，奇数次のコホモロジーが消えている $2n$ 次元閉微分可能多様体とする．このとき，M 上の不動点をもつ $(S^1)^n$ 作用は *locally standard* になり，軌道空間 $Q = M/(S^1)^n$ の各面は（Q 自身も）非輪状．さらに

$$h_Q(t) = \sum_{j=0}^{m} \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}} H_{2j}(M) t^j$$

が成立する．

<u>M の復元</u>. M のベッチ数は上記のように軌道空間から決まるが，M のコホモロジー環の環構造は軌道空間 Q だけでは決まらない．M のコホモロジー環を記述するには，Q のファセットに対応する M の余次元 2 の部分多様体を固定する S^1 部分群の情報が必要である．もう少し詳しく述べると，Q のファセットを $Q_1, \ldots, Q_m$ とし，射影 $\pi\colon M \to Q$ による Q_i の引き戻し $\pi^{-1}(Q_i)$ を M_i と書くと，M_i は余次元 2 の閉部分多様体で，$(S^1)^n$ のある S^1 部分群 S_i の不動点集合になっている．この S_i を，定める準同型写像を

$$v_i\colon S^1 \to (S^1)^n, \qquad (v_i(S^1) = S_i)$$

とする．$\mathrm{Hom}(S^1, (S^1)^n)$ を $\mathbb{Z}^n$ を同一視すると v_i は $\mathbb{Z}^n$ の元と思え，さらに v_i は ± 1 以外の整数で割れないと仮定してよい（このとき，v_i は符号を除いて唯一つに決まる）．これら $\{v_i\}_{i=1}^m$ たちは次の条件 (1.2) をみたす．I を $\{1, 2, \ldots, m\}$ の部分集合で $|I| = n$ とする．

(1.2) $\displaystyle\bigcap_{i \in I} Q_i$ が Q の頂点ならば，$\{v_i \mid i \in I\}$ は $\mathrm{Hom}(S^1, (S^1)^n) = \mathbb{Z}^n$ の基底である．

軌道空間 Q とデータ $\{v_i\}_{i=1}^m$ が M のコホモロジー環 $H^*(M)$ の環構造を決める．実はもっと強く，M は Q と $\{v_i\}_{i=1}^m$ から $Q \times (S^1)^n$ の商空間

$$M = (Q \times (S^1)^n)/\sim \tag{1.3}$$

として復元できる．ここで $(x, t) \sim (y, s)$ は，$x = y$ で，x が $Q_I = \bigcap_{i \in I} Q_i$ の内点ならば（I は $\{1, 2, \ldots, m\}$ のある部分集合で $|I| = n$ とは限らない），$t^{-1}s$ は $v_i(S^1) = S_i$ $(i \in I)$ で生成される $(S^1)^n$ の部分群に含まれるという条件である．つまり，$Q \times (S^1)^n$ において，Q の k 次元面 Q_I 上（$k = n - |I|$）にある $(S^1)^n$ を，$\{v_i(S^1) \mid i \in I\}$ で生成される k 次元トーラス T_I で潰す（つまり T/T_I を考える）と M が復元できる．シリンダー $[-1, 1] \times S^1$ において，2 つの境界の S^1 を 1 点に潰すと S^2 が得られるが，これの一般化である．

2. 多面体から得られる平坦リーマン多様体と 3 次元双曲多様体

前節における複素数体 $\mathbb{C}$ を実数体 $\mathbb{R}$ に置き換えれば，ある程度同様の議論が成立する．一つ大きな違いは，前節で取り扱った多様体は，基本的に単連結なものであるが，本節で取り扱う $(S^0)^n$ 作用をもつ n 次元多様体は，単連結ではなく，多くの場合 aspherical 多様体である．

S^1 の代わりに $S^0 = \{\pm 1\}$ を考え，n 次元閉多様体 N 上の $(S^0)^n$ 作用が，局所的に

$$(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \to (g_1 x_1, \ldots, g_n x_n) \in \mathbb{R}^n \qquad (g_1, \ldots, g_n) \in (S^0)^n \tag{2.1}$$

と同じであるとき，locally standard という（(1.1) 参照）．このとき，軌道空間 $Q = N/(S^0)^n$ は n 次元角付多様体になり，(1.3) と同様に，N は $Q \times (S^0)^n$ の商空間

$$N = (Q \times (S^0)^n)/\sim \tag{2.2}$$

と表される．今の場合，(1.2), (1.3) における v_i は $\mathrm{Hom}(S^0,(S^0)^n)) = (\mathbb{Z}/2)^n$ の元と思う．(1.3) は，2^n 個の Q を，v_i たちのデータを基に Q の境界に沿って貼り合せて N が復元できることを意味する．Q が単純凸多面体であるとき N を small cover という ([8]).

例． (2.1) の $(S^0)^n$ 作用は，n 次元（平坦）トーラス $\mathbb{R}^n/(2\mathbb{Z})^n$ 上の作用を導く．この作用は locally standard で，軌道空間は n 次元立方体となる．

上の例は，2^n 個の n 次元立方体を境界に沿って貼り合せて平坦トーラスが得られることを示しているが，貼り合せ方を変えると（言い換えれば，v_i たちを取り換えると），トーラスとは異なるコンパクト平坦リーマン多様体が得られる．実は，このようにして得られる平坦リーマン多様体は，実 Bott 塔と呼ばれる $\mathbb{R}P^1$ 束の列

$$B_n \to B_{n-1} \to \cdots \to B_1 \to B_0 = \{1\text{ 点}\}$$

のトップにある多様体 B_n として得られる．ここで，各 $\mathbb{R}P^1$ 束 $B_i \to B_{i-1}$ は，B_{i-1} 上の 2 つの直線束の Whitney 和の射影化である（2 つの直線束の内，一方は自明束としても一般性は失われない）．B_n を実 Bott 多様体とよぶ．

コンパクト平坦リーマン多様体は各次元有限個で基本群で区別できるが（Bieberbach の定理），実 Bott 多様体に限れば次が成立する．

定理 2.1 ([11], [7]). *実 Bott 多様体は $\mathbb{Z}/2$ 係数のコホモロジー環で区別出来る．*

実 Bott 多様体 B_n は，ホロノミー群が $(S^0)^n$ の部分群という特別なものであるが，コンパクト平坦リーマン多様体の例を具体的に豊富に提供する（下の Table 1 参照）．

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Diff n	1	2	4	12	54	472	8,512	328,416	?	?
Ori n	1	1	2	3	8	29	222	3,607	131,373	?
Symp n	0	1	0	2	0	6	0	31	0	416

Table 1. Diff n, Ori n, Symp n は，それぞれ，n 次元 Bott 多様体の微分同相類，その内向き付可能なもの，さらにシンプレクティック構造が入るものの数を表す.

(2.2) において，Q が角付多様体であれば微分可能多様体 N が得られるが，上記のようにリーマン計量を考えるならば，面角が直角である必要がある．上記では平坦計量を考えたが，次に 3 次元双曲計量を考える．3 次元双曲計量に関して各面角が直角となる凸多面体は Pogorelov 多面体と呼ばれ，次の組合せ論的特徴付けが知られている．

定理 2.2 ([1], [16]). *3 次元単純凸多面体が Pogorelov 多面体である必要十分条件は，4 面体でなく，3 ベルトと 4 ベルトを持たないことである（特に，3 角形と 4 角形の面はない）．*

3 次元凸多面体 P の k ベルトとは $(k \geq 3)$，P の k 個の面の巡回列 $(P_1, P_2, \ldots, P_k)$ で，隣同士は 1 辺を共有し，隣同士以外は交わりがなく，さらに 3 つの面は頂点を共有していないことである．Pogorelov 多面体は無限に沢山ある．例えば正 12 面体，一般に面が 5 角形か 6 角形だけである 3 次元凸多面体 (combinatorial fulleren と呼ばれている）は Pogorelov 多面体である ([3]).

Pogorelov 多面体 Q を用いて (2.2) の構成を行う，つまり，Q を $8(=2^3)$ 個用意し，それらを面に沿って貼り合せる．双曲空間の中で Q の各面角が直角ゆえ，この構成で 3 次元双曲閉多様体が得られるが，これは Löbell 型と呼ばれている．Mostow の剛性定理に

よれば，3 次元以上の双曲閉多様体は基本群で区別できるが，Löbell 型の 3 次元双曲閉多様体に限れば，定理 2.1 と類似の次が成立する．

定理 2.3 ([4])**.** *Löbell 型の 3 次元双曲多様体は* $\mathbb{Z}/2$ *係数のコホモロジー環で区別出来る．*

この定理の証明には，moment-angle 多様体というトーリックトポロジーで研究されている対象を用いる（が，やや迂回した感がある）．

参考． Nikulin の面の数に関する不等式から，各面角が直角となる 5 次元以上の凸多面体は存在しないことが分かるが，4 次元ではそのような凸多面体 Q が存在する（例えば 120 個の正 12 面体を 3 次元面にもつ 120 胞体）．このようなものに対して (2.2) の構成を行うと（つまり，Q を $16(=2^4)$ 個用意して境界で貼り合せて）4 次元の双曲閉多様体が得られるが，これらに対して上記の定理が成立するかどうかは分かっていない．

3. 旗多様体における複素トーラス軌道の閉包，置換多面体，置換群上の距離

群作用と多面体が関係する例をもう 1 つ挙げる．本節の話は，前節 2 つとはやや趣が異なる．旗多様体 $\mathrm{Fl}(\mathbb{C}^n)$ とそれに関連する基本的な事実を思い出す．まず

$$\mathrm{Fl}(\mathbb{C}^n) = \{V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n = \mathbb{C}^n \mid V_i \text{ は } \mathbb{C}^n \text{ の複素 } i \text{ 次元部分空間}\}.$$

$T = (\mathbb{C}^*)^n$ の各成分を $\mathbb{C}^n$ の各成分に掛ける作用は $\mathrm{Fl}(\mathbb{C}^n)$ 上の T 作用を導く．この作用の不動点集合は置換群 $\mathfrak{S}_n$ と同一視できる．実際，$w \in \mathfrak{S}_n$ に対して，旗

$$\langle e_{w(1)} \rangle \subset \langle e_{w(1)}, e_{w(2)} \rangle \subset \cdots \subset \langle e_{w(1)}, \ldots, e_{w(n)} \rangle$$

を対応させる対応が同一視を与える．ここで，$e_1, \ldots, e_n$ は $\mathbb{C}^n$ の標準基底で，$\langle\ \ \rangle$ は中にある元で生成される部分ベクトル空間を表す．

$\mathrm{Fl}(\mathbb{C}^n)$ には，Plücker 座標を用いてモーメント写像

$$\mu\colon \mathrm{Fl}(\mathbb{C}^n) \to \mathbb{R}^n$$

が定義でき，像 $\mu(\mathrm{Fl}(\mathbb{C}^n))$ は $(n-1)$ 次元置換多面体

$$\mathrm{Perm}_n := \{(v(1), \ldots, v(n)) \in \mathbb{R}^n \mid v \in \mathfrak{S}_n\} \text{ の凸包}$$

と一致する．これに関して次のことが知られている．

補題 3.1. $\mu(w) = (w^{-1}(1), \ldots, w^{-1}(n))$*．さらに，2 頂点* $\mu(w)$ *と* $\mu(v)$ *が* Perm_n *の辺で結ばれる必要十分条件は，*$w = vs_i$ *となる互換* $s_i = (i, i+1)$ *が存在することである．*

この補題に関連して，$\mathfrak{S}_n$ 上に次の距離 d を考える．

$$d(u, v) = \ell(u^{-1}v).$$

ここで，$\ell(w)$ は置換 w の長さで，w の転位数と思ってもよいし，w を互換 $s_1, \ldots, s_{n-1}$ の積で最短表示したときの s_i たちの個数と思ってもよい．上の補題より，$d(u,v)$ は，u と v を Perm_n の頂点 $\mu(u)$ と $\mu(v)$ と思うと，それらを結ぶ Perm_n の（辺からなる）道で最短のものの長さと思える．

$u \in \mathfrak{S}_n$ に対して

$$C(u) := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}^n = \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^*, T) \mid x_{u(1)} < x_{u(2)} < \cdots < x_{u(n)}\}$$

を考える（本質的に Weyl chamber）．$C(u)$ の元 λ は T の 1 パラメータ部分群を定め，

$$\mathrm{Fl}(\mathbb{C}^n)^{\lambda(\mathbb{C}^*)} = \mathrm{Fl}(\mathbb{C}^n)^T = \mathfrak{S}_n$$

である．ここで $X^G = \mathrm{Fix}(G, X)$．

さて，$\mathrm{Fl}(\mathbb{C}^n)$ から任意に 1 点 y を取り，その T 軌道の閉包 Y を考える．まず，

$$Y^T \subset \mathrm{Fl}(\mathbb{C}^n)^T = \mathfrak{S}_n$$

に注意する．Atiyah-Gullemin-Sternberg の定理より，$\mu(Y)$ は $\mu(Y^T)$ を頂点とする凸多面体である．$u \in \mathfrak{S}_n$ に対して $\lambda \in C(u)$ を任意にとり，

$$\lim_{t\to 0} \lambda(t)y \in Y^T \subset \mathfrak{S}_n$$

を考える．上記の極限点は λ の取り方には依らず u のみによる．したがって，写像

$$\mathrm{Ret}_Y \colon \mathfrak{S}_n \to Y^T \subset \mathfrak{S}_n$$

を得るが，この写像は次の意味をもつ．

定理 3.2 ([12])**.** Ret_Y はレトラクト（つまり Y^T 上恒等写像）．また，各 $u \in \mathfrak{S}_n$ に対して $d(u, v) = d(u, Y^T)$ となる $v \in Y^T$ は唯一つだけあり，それは $\mathrm{Ret}_Y(u)$ で与えられる．

上記の定理の後半は，$\mathfrak{S}_n$ の任意の部分集合に対して成り立つわけではなく，Y^T は $\mathfrak{S}_n$ の Coxeter matroid と呼ばれているものになっている ([2])．なお，Y^T が具体的に分かるとき，Ret_Y を具体的に求める方法がある．また，以上の話は一般 Lie 型の旗多様体に対して成立する．

References

[1] E. M. Andreev, *Convex polyhedra in Lobačevskiĭ spaces.* Mat. Sbornik **81** (123) (1970), no, 3, 445–478 (Russian); Math. USSR Sbornik **10** (1970), 413–440 (English translation).

[2] A. V. Borovik, I. M. Gelfand, and N. White, *Coxeter matroids*, Progress in Math. **216**, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2003.

[3] V. Buchstaber and N. Erokhovets, *Fullerenes, Polytopes and Toric Topology.* Lecture Note Series, IMS, National University of Singapore, Combinatorial and Toric Homotopy, 67–178 (2017).

[4] V. M. Buchstaber, N. Erokhovets, M. Masuda, T. Panov and S. Park, *Cohomological rigidity of manifolds defined by right-angles 3-dimensional polytopes*, Russian Math. Surveys **72** (2017), 199-256.

[5] V. M. Buchstaber and T. E. Panov, *Torus actions and their applications in topology and combinatorics*, University Lecture, vol. **24**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 2002.

[6] V. M. Buchstaber and T. E. Panov, *Toric Topology*, Mathematical Surveys and Monographs, AMS, 2015.

[7] S. Choi, M. Masuda and S.-i. Oum, *Classification of real Bott manifolds and acyclic digraphs*, Trans. Amer. Math. Soc. **369** (2017), 2987-3011.

[8] M. W. Davis and T. Januszkiewicz, *Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions*, Duke Math. J. **62** (1991), 417–451.

[9] W. Fulton, *An introduction to toric varieties*, Ann. of Math. Studies, vol. **113**, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1993.

[10] A. Hattori and M. Masuda, *Theory of multi-fans*, Osaka J. Math. **40** (2003), 1–68.

[11] Y. Kamishima and M. Masuda, *Cohomological rigidity of real Bott manifolds*, Algebr. Geom. Topol. **9** (2009), 2479–2502.

[12] E. Lee, M. Masuda and S. Park, *Torus orbit closures in the flag variety and a metric on the Weyl group*, preprint.

[13] M. Masuda, *Unitary toric manifolds, multi-fans and equivariant index*, Tohoku Math. J. **51** (1999), 237–265.

[14] M. Masuda and T. Panov, *On the cohomology of torus manifolds*, Osaka J. Math. **43** (2006), 711–746.

[15] T. Oda, *Convex bodies and algebraic geometry*, Ergeb. der Math. und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge Band **15**, A Series of Modern Surveys in Math., Springer-Verlag, 1988.

[16] A. V. Pogorelov, *Regular decomposition of the Lobačevskii space*, Mat. Zametki **1** (1967), no. 1, 3–8 (Russian).

〒558-8585 大阪市住吉区杉本 3-3-138 大阪市立大学大学院理学研究科
E-mail address: masuda@sci.osaka-cu.ac.jp