ラグランジュ・フレアー理論から構成された部分擬準同型とその諸応用

川崎 盛通 (京都大学 学術振興会特別研究員PD)*

令和元年八月七日

1. 導入

本稿では多様体は全て連結で境界のないものを考えるとする. また, 本稿では常に C^∞ 級の多様体を考え, 滑らかな写像といえば常に C^∞ 級とする.

定義 1.1 M を $2n$ 次元多様体とする. M 上の二次微分形式 ω がシンプレクティック形式であるとは, ω が閉形式, つまり $d\omega = 0$ であって, 任意の $x \in M$ について $(\omega^n)_x \neq 0$ となることである. 偶数次元多様体 M とその上のシンプレクティック形式 ω の組 (M, ω) を**シンプレクティック多様体**という.

初等的な線形代数の帰結として, シンプレクティック形式 ω と $x \in M$ について, $\omega_x \colon T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}$ は二次形式として非退化となることが知られている.

以下の例のように余接束には自然なシンプレクティック構造が入る. これこそがシンプレクティック幾何学が古典力学から誕生した歴史的起源である.

例 1.2 N を多様体とする. N の余接束 T^*N は以下のような自然なシンプレクティック形式 ω_0 をもつ.

$\pi \colon T^*N \to N$ を自然な射影とする. このとき, 一次微分形式 λ_0 を $\lambda_0(v) = p(\pi_* v)$ ($q \in N$, $p \in T_q^*N$, $v \in T_{(p,q)}(T^*N)$) により定義する. $\omega_0 = d\lambda_0$ とすると, ω_0 はシンプレクティック形式である.

シンプレクティック幾何学を考える他の動機は, 測地流を通したリーマン幾何との関係, ミラー対称性の A 模型との関係, ケーラー幾何を通した代数幾何との関係など多岐に渡るが, ここでは割愛する.

(M, ω) をシンプレクティック多様体とし, その上の C^∞ 級ベクトル場の成す集合を $\mathcal{X}(M)$ とする. M 上の函数 $H \colon M \to \mathbb{R}$ について, その**ハミルトン・ベクトル場** X_H を

$$\text{任意の } V \in \mathcal{X}(M) \text{ について}, \ \omega(X_H, V) = -dH(V)$$

によって定義する (ω は非退化二次形式なので, このような X_H は一意に定まる).

円周 S^1 を $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ によって定める. また, 本稿では時間依存しコンパクト台をもつハミルトン函数を考える. つまり本稿において, **シンプレクティック多様体 (M, ω) 上のハミルトン函数とは, 滑らかな函数 $H \colon [0,1] \times M \to \mathbb{R}$ であって, その台 H が $[0,1] \times M$ 内のコンパクト部分集合となるものを指す**. また, ハミルトン函数 $H \colon [0,1] \times M \to \mathbb{R}$ について, その時間パラメータ t を固定したものを H_t で定める. つまり $H_t \colon M \to \mathbb{R}$ を $H_t(x) = H(t, x)$ によって定義する.

本研究は科研費 (課題番号:18J00765) の助成を受けたものである。
キーワード：擬準同型, ハミルトン微分同相群, ラグランジュ・フレアー理論
* 〒606-8317 京都府京都市左京区北白川追分町 京都大学数理解析研究所
e-mail: kawasaki@kurims.kyoto-u.ac.jp

ハミルトン函数$H\colon [0,1]\times M \to \mathbb{R}$について, そのハミルトン・イソトピー$\{\phi_H^t\}_{t\in[0,1]}$を時間変化するベクトル場$\{X_{(H_t)}\}_t$による積分として定義する. つまり, 微分方程式$\phi_H^0 = \mathrm{id}$, $\frac{d\phi_H^t}{dt} = X_{(H_t)}$の解として定義する. 更に, ϕ_H^1をϕ_Hと略記し, これをH**により生成されたハミルトン微分同相写像**と呼び, ハミルトン函数から生成される微分同相写像を**ハミルトン微分同相写像**と呼ぶ.

シンプレクティック多様体(M,ω)についてハミルトンの成す集合を**ハミルトン微分同相群**と呼び, $\mathrm{Ham}(M,\omega)$と表記する. これは名前の通り写像の合成について群を成す. (ただし,「ハミルトン函数で生成される」という形での定義のため, 実際に群を成すことを証明するのは少し非自明である.)

さて, ここでシンプレクティック多様体上の自然な変換群としてハミルトン微分同相群を定義したわけだが, トポロジーや微分幾何の専門家からすればシンプレクティック構造を保つ微分同相写像の成す群であるシンプレクティック微分同相群も自然な概念であろう. 任意のハミルトン微分同相写像はシンプレクティック形式を保存し, 更にいえばハミルトン微分同相群はシンプレクティック微分同相群の正規部分群である.

ハミルトン微分同相群$\mathrm{Ham}(M,\omega)$を「リー群」とみなす場合, その「リー環」である$\mathrm{Lie}(\mathrm{Ham}(M,\omega))$はハミルトン・ベクトル場の成す線形空間となる. ハミルトン・ベクトル場がハミルトン函数の微分のみで決まることを考えると, $\mathrm{Lie}(\mathrm{Ham}(M,\omega))$は$C^\infty(M)/\mathbb{R}$と同一視でき, 特にハミルトン微分同相群は「無限次元リー群」である.

以下, シンプレクティック幾何学 (ハミルトン力学系) のおける non-displaceability の問題を考えるのだが, 変換群が無限次元となるハミルトン力学系が本稿で述べるような「剛性」を持つことにこの問題の面白さがある. X, Yをシンプレクティック多様体(M,ω)の部分集合とする. XがYから**displaceable**であるとは, ある$f\in \mathrm{Ham}(M,\omega)$が存在して, $f(X)\cap \bar{Y} = \emptyset$となることである. ここで, $\bar{Y}$はYの閉包である. 単にXが**displaceable**といった場合には, XがX自身から displeceable であることを指す.

まずは二次元の場合を考えよう. 二次元の場合, シンプレクティック形式は面積形式と一致するのもあって, この問題を易しく理解する上で有効である.

例 1.3 二次元球面S^2を$S^2 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$によって定義し, 標準的なシンプレクティック形式 (面積形式)ω_0を考える. 函数$F\colon S^2\to\mathbb{R}$を$F(x,y,z) = z$で定める.

このとき, $F^{-1}(c)$は$c\neq 0$のとき displaceable で, $c = 0$のとき non-displaceable である. 前者は$\mathrm{SO}(3)\leq \mathrm{Ham}(S^2,\omega_0)$からしたがう (ここで, $\mathrm{SO}(3)$は標準的な計量を入れたS^2の向きを保つ等長変換の成す群と同一視). 後者はハミルトン微分同相写像がシンプレクティック形式 = 面積形式を保存することから従う.

$F^{-1}(0)$は明らかに微分同相写像で displaceable であるので, この例からどうもシンプレクティック幾何特有の「剛性」がありそうなのが察せられるであろう.

例 1.4 二次元トーラスT^2を$T^2 = S^1\times S^1$で定義し, 標準的なシンプレクティック形式 (面積形式)ω_0を考える. このとき, 任意の$c\in S^1$について経線$\{c\}\times S^1 \subset T^2$は non-displaceable である.

この例は非専門家には驚かれることの多いものである. というのも$\{c\}\times S^1$はT^2上の平行移動$(x,y)\mapsto(x+a,y)$ $(a\neq 0)$で容易に displace され, この平行移動はシンプレクティック形式ω_0を保つからである. つまり, これはシンプレクティック微分同相写像とハミルトン微分同相写像とで displaceability に差があることを示しており, ハミルトン

力学系特有の「剛性」の存在を強く示唆するものである. また, ハミルトン力学系にはホーファー幾何や不変測度・周期点の存在など他の「剛性」も知られているが, これらと non-displaceability との関係も研究されている (例えば [Po98, Po14]).

シンプレクティック多様体 (M, ω) 上の時間依存しないハミルトン函数 $F, G\colon M \to \mathbb{R}$ について, そのポアソン括弧 $\{F, G\}$ を $\omega(X_G, X_F)$ によって定義する.

定義 1.5 (M, ω) を $2n$ 次元シンプレクティック多様体とする. 滑らかな写像 $\Phi\colon M \to \mathbb{R}^k$ が任意の i, j について $\{\Phi_i, \Phi_j\} = 0$ を満たすとき, **運動量写像**であるという.

運動量写像のファイバーの (non-)displaceability は広く研究され, 特にトーリック多様体の運動量写像のそれは2000 年代以降様々な研究がなされている. 運動量写像のファイバーの (non-)displaceability についての古典的結果で, 本稿で特に重要となるのはエントフとポルテロヴィッチによる以下の定理である.

定理 1.6 ([EP06]) $\Phi\colon M \to \mathbb{R}^k$ を閉シンプレクティック多様体上の運動量写像とする. このとき, Φ は non-displaceable なファイバーをもつ, つまり, ある $y_0 \in \mathbb{R}^k$ が存在して $\Phi^{-1}(y_0)$ は non-displaceable となる.

本稿の主題は上記定理の「相対版」を考えることである. 定理 1.6 はハミルトン・フレアー理論を用いて証明されたが, その相対版を考えるにあたってはラグランジュ・フレアー理論を用いることになる. それにより生じる技術的困難については後に説明する.

定義 1.7 (M, ω) を $2n$ 次元シンプレクティック多様体とする. M の部分多様体 L が (M, ω) のラグランジュ部分多様体であるとは, L の次元が n で $\omega|_L = 0$ となることである.

例 1.8 多様体 N の余接束 T^*N の零切断 0_N は (T^*N, ω_0) のラグランジュ部分多様体.

本稿においては比較的「条件の良い」ラグランジュ部分多様体を主に考えるが, この先の議論を簡単にするために「良い条件」というものをここでまとめておく.

定義 1.9 (M, ω) のラグランジュ部分多様体 L が条件 $(*)$ を満たすとは, 以下の条件のいずれかを満たすことをいう.

(i) (M, ω) がある閉多様体 N の余接束 T^*N とその標準的なシンプレクティック形式 ω_0 で, L はその零切断 0_N である,

(ii) (M, ω) が閉シンプレクティック多様体で $\pi_2(M, L) = 0$.

注意 1.10 本稿に登場する定理の多くはより一般の状況でも証明可能であるが, ややこしさを避けるために上のように書いた. 専門家向けに注意すると, ラグランジュ・フレアーホモロジーの非自明性が本質的な条件である.

定理 1.11 L をシンプレクティック多様体 (M, ω) のラグランジュ部分多様体で条件 $(*)$ を満たすものとする. $\Phi\colon M \to \mathbb{R}^k$ を (M, ω) 上の運動量写像とする. このとき, ある $y_0 \in \mathbb{R}^k$ が存在して, $\Phi^{-1}(y_0)$ は L からも $\Phi^{-1}(y_0)$ からも non-displaceable となる.

本稿では定理 1.11 を二通りの方法で精密化する形で話を進める. この二つの精密化は片方がもう片方を包含するものではなく, それぞれ特有の応用を持っているものである.

2. ポアソン括弧不変量

シンプレクティック多様体 (M,ω) 上の 1 の分割 $\vec{F}=\{F_1,\dots,F_N\}$ に対し, $\kappa(\vec{F})$ を

$$\kappa(\vec{F}) = \max_{x,y\in[0,1]^N} \|\{\sum_i x_i F_i, \sum_j y_j F_j\}\|,$$

により定義する. (M,ω) の有限開被覆 $\mathcal{U}=\{U_1,U_2,\dots,U_N\}$ について, そのポアソン括弧不変量 $\mathrm{pb}(\mathcal{U})$ を $\mathrm{pb}(\mathcal{U})=\inf\kappa(\vec{F})$ によって定義する. ここで下限 inf は $\mathcal{U}$ に付随する, つまり $\mathrm{Supp}(F_i)\subset U_i (i=1,\dots,N)$ となる 1 の分割 $\vec{F}$ 上のものである.

注意 2.1 マグニチュード κ の背景には量子情報理論や量子測定理論がある. この不変量の量子化が「正作用素値測度の交換子」に対応し、これは「ノイズ」の下からの評価を与える ([PR] の Section 9, [P]). これは不確定性関係 (原理) の「従兄弟」([PR]) である.

命題 2.2 $\Phi\colon M \to \mathbb{R}^k$ を運動量写像とし, $\mathcal{V}=\{V_1,V_2,\dots,V_N\}$ を $\Phi(M)$ の有限開被覆とする. このとき, M の有限開被覆 $\Phi^{-1}\mathcal{V}=\{\Phi^{-1}(V_1),\Phi^{-1}(V_2),\dots,\Phi^{-1}(V_N)\}$ に対し $\mathrm{pb}(\Phi^{-1}\mathcal{V})=0$ となる.

この命題は任意の運動量写像 $\Phi\colon M\to\mathbb{R}^k$ と任意の滑らかな函数 $A,B\colon \Phi(M)\to\mathbb{R}$ について $\{A\circ\Phi, B\circ\Phi\}=0$ が成り立つことを用いれば容易に示せる.

ハミルトン函数 $H\colon [0,1]\times M\to\mathbb{R}$ のホーファー長 $\|H\|$ を以下のように定義する.

$$\|H\| = \int_0^1 (\max_{x\in M} H_t(x) - \min_{x\in M} H_t(x))dt.$$

M の部分集合 X,Y について, X の Y からの **displacement energy** $E(X;Y)$ を以下のように定義する.

$$E(X;Y) = \inf\{\|H\|; H\in C_c^\infty([0,1]\times M), \phi_H^1(X)\cap\bar{Y}=\emptyset\}.$$

X が Y から non-displaceable な場合には $E(X;Y)=+\infty$ とする. また, $\bar{E}(X;Y)$ を $\bar{E}(X;Y)=\min\{E(X;X),E(X;Y)\}$ により定義する. M の開被覆 $\mathcal{U}=\{U_1,\dots,U_N\}$ について, $E(\mathcal{U})$, $\bar{E}(\mathcal{U};L)$ をそれぞれ $E(\mathcal{U})=\max_i E(U_i;U_i)$, $\bar{E}(\mathcal{U};L)=\max_i \bar{E}(U_i;L)$ により定義する.

これについて, ポルテロヴィッチは以下を示した.

定理 2.3 ([P]) $\mathcal{U}=\{U_1,\dots,U_N\}$ は M の開被覆で, 各 U_i は displaceable であるとする. このとき, $\bar{E}(\mathcal{U})>0$ で,

$$\mathrm{pb}(\mathcal{U}) \geq (2N^2\cdot E(\mathcal{U}))^{-1} > 0.$$

命題 2.2 と定理 2.3 から定理 1.6 が従う. 項数の関係で証明は割愛するが,「displaceable な閉集合の十分小さい開近傍は displaceable」いう事実を用いれば軽い練習問題である.

定理 2.4 ([Ka18]) L を条件 $(*)$ を満たすラグランジュ部分多様体とする. $\mathcal{U}=\{U_1,\dots,U_N\}$ は開被覆で, 各 U_i は L もしくは U_i から displaceable とする. このとき, $\bar{E}(\mathcal{U};L)>0$ で,

$$\mathrm{pb}(\mathcal{U}) \geq (2N^2\cdot\bar{E}(\mathcal{U};L))^{-1} > 0.$$

命題 2.2 と定理 2.4 から定理 1.11 が従うのは定理 1.6 の場合と同様である.

例 2.5 $\{U_1,\dots,U_M,V_1,\dots,V_N\}$ と $\{W_1,W_2\}$ をそれぞれ S^1 の開被覆で以下を満たすとする.

- 任意の i, j と k について $U_i \neq S^1$, $V_j \neq S^1$ と $W_k \neq S^1$ が成立,
- 任意の $i = 1.\dots, M$ について $0 \in U_i$, 任意の $j = 1, \dots, N$ について $0 \notin V_j$ が成立.

このとき, T^2 の開被覆 $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \mathcal{U}_3$ を以下で定義する.

$$\mathcal{U}_1 = \{U_i \times S^1, V_j \times S^1\}_{i,j}, \mathcal{U}_2 = \{U_i \times W_k, V_j \times S^1\}_{i,j,k}, \mathcal{U}_3 = \{U_i \times W_k, V_j \times W_k\}_{i,j,k}.$$

このとき, $\mathrm{pb}(\mathcal{U}_1) \leq \mathrm{pb}(\mathcal{U}_2) \leq \mathrm{pb}(\mathcal{U}_3)$ が知られており, 命題2.2より $\mathrm{pb}(\mathcal{U}_1) = 0$, 定理2.3より $\mathrm{pb}(\mathcal{U}_3) > 0$ となる. そして, 筆者の定理2.4より真ん中の $\mathrm{pb}(\mathcal{U}_2) > 0$ が分かる.

3. 幹と相対的幹

定理1.11のもう一つの証明に話を移そう.

まずはエントフとポルテロヴィッチにより導入された幹という概念を説明する.

定義 3.1 ([EP06]) X をシンプレクティック多様体 (M, ω) のコンパクト部分集合とする. M のコンパクト集合 Y は以下の条件を満たす運動量写像 $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_k)\colon M \to \mathbb{R}^k$ が存在するときに**幹**という.

(i) ある $y_0 \in \mathbb{R}$ が存在して $Y = \Phi^{-1}(y_0)$,

(ii) 任意の $y \neq y_0$ について $\Phi^{-1}(y)$ はdisplaceableである.

[EP06]においては(M が閉多様体の場合に)任意の幹がnon-displaceableであることが証明され, それからただちに定理1.6が得られた. その後, [EP09]において幹はさらに強い「剛性」をもつことが以下の定理の形で示された.

定理 3.2 ([EP09]) (M, ω) を閉シンプレクティック多様体とし, X, Y を (M, ω) の幹とする. このとき, X は Y からnon-displaceableである.

上の定理で $X = Y$ の場合を考えれば幹のnon-displaceabilityがしたがう.

幹の「相対版」として筆者が導入した概念は以下である.

定義 3.3 ([Ka18]) X をシンプレクティック多様体 (M, ω) のコンパクト部分集合とする. M のコンパクト集合 Y は以下の条件を満たす運動量写像 $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_k)\colon M \to \mathbb{R}^k$ が存在するときに **X-幹**という.

(i) $Y = \Phi^{-1}(0)$,

(ii) 任意の $y \neq 0$ について $\Phi^{-1}(y)$ は X または $\Phi^{-1}(y)$ 自身からdisplaceableである.

例 3.4 リーマン多様体 (N, g) 上の余接束 T^*N 上で函数 $H(q, p) = \frac{1}{2}\|p\|_g^2$ を考える. H は函数一個のみで構成されるので運動量写像で, $H^{-1}(0) = 0_N$ 以外のファイバーは 0_N と互いに交わらない, 特に 0_N からdisplaceableである. したがって, 零切断 0_N は 0_N-茎である.

この幹の「相対版」について定理3.2に該当するのは以下の定理である.

定理 3.5 ([Ka18, KO19b]) シンプレクティック多様体 (M, ω) のラグランジュ部分多様体 L は条件 $(*)$ を満たすものとし, X, Y を L-幹とする. このとき, X は Y からnon-displaceableである.

この定理から定理 1.11 がただちに従う. この定理より新たな L-幹を見つければそれが強い「剛性」を持つことが分かるのであるが, それを実際に見つけているのが筆者と折田龍馬氏との共同研究 [KO19c] である.

定義 3.6 滑らかな函数 $H\colon T^*N \to \mathbb{R}$ が条件 $(\star)$ を満たすとは, 以下の

(i) 任意の $c \in \mathbb{R}$ について部分集合 $H^{-1}((-\infty, c]) \subset T^*N$ がコンパクト,

(ii) 任意の $q \in N$ について,
$$H(q, 0) = \min_{p \in T_q^*N} H(q, p),$$

を満たすことである.

条件 $(\star)$ を満たす函数 $H\colon T^*N \to \mathbb{R}$ について,
$$m_H = \max_{q \in N} \min_{p \in T_q^*N} H(q, p) \tag{1}$$
として, T^*N の部分集合 S_H を以下のように定義する.
$$S_H = \{ (q, p) \in T^*N \mid H(q, p) = m_H \}. \tag{2}$$

条件 $(\star)$ を満たす函数としては, エネルギー函数 $H(q, p) = \frac{1}{2}\|p\|_g^2 + U(q)$ などがある. ただし, $\frac{1}{2}\|p\|_g^2$ は運動エネルギー (g はリーマン計量), $U(q)$ は位置エネルギーである.

定理 3.7 ([KO19c]) N を閉多様体とし, $\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_k)\colon T^*N \to \mathbb{R}^k$ を余接束上の運動量写像とする. 更に, Φ_1 は条件 $(\star)$ を満たしており, $\Phi(S_{\Phi_1})$ が単集合 つまり, $y_0 \in \mathbb{R}^k$ が存在して $\Phi(S_{\Phi_1}) = \{y_0\}$ となると仮定する. このとき, $\Phi^{-1}(y_0)$ 以外の Φ のファイバーは零切断 0_N から displaceable である. 特に, $\Phi^{-1}(y_0)$ は 0_N-幹である. 定理 3.5, 例 3.4 より $\Phi^{-1}(y_0)$ は 0_N からも $\Phi^{-1}(y_0)$ 自身からも non-displaceable である.

この定理によって, 例えば $T^*\mathrm{SO}(3)$ 上の可積分系であるラグランジュの独楽 $T^*\mathrm{SO}(3) \to \mathbb{R}^3$ の上で $0_{\mathrm{SO}(3)}$-幹を発見できる. 他には以下の系がある.

系 3.8 ([KO19c]) N を閉多様体 $H\colon T^*N \to \mathbb{R}$ は条件 $(\star)$ を満たす函数とする. このとき, $H^{-1}(m_H)$ は 0_N からも $H^{-1}(m_H)$ 自身からも non-displaceable である.

H がエネルギー函数の場合に $H^{-1}(m_H)$ が non-displaceable なのは [CFP] により証明されているが, 0_N からの non-displaceablity はおそらく知られていない結果である.

また, 定理 3.7 で行った議論を用いて以下の副産物が得られる. この不思議な定理がどれほど可積分系の専門家の興味を惹くものなのか, 本稿執筆時点では筆者もよく分かっていない.

定理 3.9 ([KO19c]) ハミルトン函数 $H_1, \ldots, H_k\colon T^*N \to \mathbb{R}$ は条件 $(\star)$ を満たし, 任意の i, j について $\{H_i, H_j\} = 0$ も満たしているとする. このとき, $\bigcap_{i=1}^k S_{H_i} \neq \emptyset$.

4. 分裂長

この章ではラグランジュ・スペクトル不変量のもう一つの応用について考える. ハミルトン微分同相群は様々な距離を持つことが知られており, それが粗幾何的にどのような性質を持つかは広く研究されている. 中でも特に有名なものはホーファー距離や交換子長であるが, ここでは分裂長というものを扱う.

以下, ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ には通常の L^2 ノルム $\|\cdot\|$ を入れて考える. $\mathbb{Z}^n$ では $\|\cdot\|$ の $\mathbb{Z}^n$ への制限を考え, 同じく $\|\cdot\|$ と書く.

U をシンプレクティック多様体 (M,ω) の開集合とする. このとき, バンヤガの分裂補題 ([Ba]) により, 任意の $\phi \in \mathrm{Ham}(M,\omega)$ について, 非負整数 k, $[0,1]\times U$ にコンパクト台を持つハミルトン函数 $H_1,\ldots,H_k \in C_c^\infty([0,1]\times U)$ とハミルトン微分同相写像 $\psi_1,\ldots,\psi_k$ が存在し, $\phi = \psi_1^{-1}\phi_{H_1}\psi_1\cdots\psi_k^{-1}\phi_{H_k}\psi_k$ と書ける. ϕ の (U についての) 分裂長 $\|\phi\|_U$ をこのような k のうち最小のものとして定義する.

バンヤガの分裂補題は元々は閉シンプレクティック多様体のハミルトン微分同相群が単純であることの証明で用いられたもので, 分裂可能という性質はハミルトン微分同相群の群論的性質と深くかかわる. 近年だと円盤の測度保存同相群の単純性という長年の未解決問題が分裂長と関連することも知られている ([LR]).

Σ_g を種数 g の閉リーマン面とし, ω をその上のシンプレクティック形式とする. ブランデンブルスキは分裂長について以下のことを示した.

定理 4.1 ([Br]) g を 2 以上の正の数とし, U を Σ_g の可縮な開集合とする. このとき, 双リプシッツ単射準同型

$$I\colon (\mathbb{Z}^{2g-2},\|\cdot\|) \to (\mathrm{Ham}(\Sigma_g),\|\cdot\|_U),$$

が存在する.

ここで歴史的な説明を挟んでおくと, これ以前にブラゴ, イヴァノフとポルテロヴィッチ [BIP] が g が正の場合に $(\mathbb{Z},\|\cdot\|)$ から $(\mathrm{Ham}(\Sigma_g),\|\cdot\|_U)$ への双リプシッツ単射準同型を構成している. 彼らの構成はハミルトン・スペクトル不変量を用いる一方, ブランデンブルスキの方法はまるで異なる. 彼は基本群 $\pi_1(\Sigma_g)$ 上の擬準同型から $\mathrm{Ham}(\Sigma_g)$ 上の擬準同型を構成するポルテロヴィッチ構成と呼ばれる手法によりこれを解決した. 彼の手法はフレアー理論を一切用いないものである.

上の定理 4.1 で埋め込まれたのは $\mathbb{Z}^{2g-2}$ であったが, ブランデンブルスキは一般の正の数 N について $\mathbb{Z}^N$ を埋め込めないかを問うた [Br, Remark 1.5]. この問題を筆者と折田龍馬氏は以下のように解決した.

定理 4.2 ([KO19a]) g, N を正の数とし, U を Σ_g の可縮な開集合とする. このとき, 双リプシッツ単射準同型

$$I\colon (\mathbb{R}^N,\|\cdot\|) \to (\mathrm{Ham}(\Sigma_g),\|\cdot\|_U),$$

が存在する.

ブランデンブルスキの問題が解けたのみならず, 種数 g の評価も良くした上に $\mathbb{Z}^N$ の埋め込みを $\mathbb{R}^N$ にまで拡張していることに注意する. 我々の手法は Σ_g 内の非可縮単純閉曲線についてのラグランジュ・スペクトル不変量を用いるものである. Σ_g 内の非可縮単純閉曲線は (ハミルトン・イソトピーでの差を除いても) 無限に存在し, それらについてのラグランジュ・スペクトル不変量は一次独立となるのが, この定理の証明の鍵である.

5. スペクトル不変量とフィルター付きフレアー理論

本稿の諸結果の証明においてはスペクトル不変量を用いる. 後に説明するように, これはハミルトン微分同相群上の擬準同型のようなものである. 簡単のため, 係数は全て $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ とする.

まずは有限次元モース理論における易しいモデルから話を始めるとする. (M, g) を閉リーマン多様体とし, その上のモース・スメール函数 $F\colon M \to \mathbb{R}$ を考える. $r \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ について $\mathrm{Crit}^r(F)$ を $F(x) < r$ となる F の臨界点の集合とする. $\mathrm{Crit}^r(F)$ で生成される $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 可群を $CH^r_*(F)$ とし, この上でモース指数を考え, 勾配流の数え上げによりチェイン複体の微分を定義する. このチェイン複体のホモロジーを $HM^r_*(F)$ とする. つまり, HM^∞_* が通常のモース・ホモロジーで各 $HM^r_*(F)$ は通常のモース・スメール複体の部分複体のホモロジーで, $r < s$ に対し写像 $i_{r,s}\colon HM^r_*(F) \to HM^s_*(F)$ が定まる (これは**フィルター付きモースホモロジー**と呼ばれ, 近年ではデータ解析での記法に合わせて**パーシステントホモロジー**と呼ばれることも多い). ここで非自明な $\mathrm{a} \in H_*(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ に対し, スペクトル不変量 $c_{\mathrm{a}}(F)$ を $c_{\mathrm{a}}(F) = \inf\{r \mid \mathrm{a} \in \mathrm{Im}(i_{r,+\infty})\}$ によって定義する. なお, 一般の函数 $F\colon M \to \mathbb{R}$ については F をモース・スメール函数で近似することで $c_{\mathrm{a}}(F)$ を定義できる.

次にハミルトン・スペクトル不変量について説明する. 本稿では簡単のため, (M, ω) を $\pi_2(M) = 0$ を満たす閉シンプレクティック多様体とする. ハミルトン・フレアー理論とは以下の空間の上での「モース理論」である.

$$\mathcal{L}_0(M) = \{z \in C^\infty(S^1, M); [z] = 0 \in [S^1, M]\}.$$

ハミルトン函数 $H\colon [0,1] \times M \to \mathbb{R}$ について, 以下の汎函数 $\mathcal{A}_H\colon \mathcal{L}_0(M) \to \mathbb{R}$ を考える.

$$\mathcal{A}_H(z) = \int_0^1 H_t(z(t))dt - \int_{D^2} \hat{z}^*\omega.$$

ただし, $\hat{z}\colon D^2 \to M$ は $\hat{z}|_{\partial D^2} = z$ となる滑らかな写像で, $\pi_2(M) = 0$ より $\int_{D^2} \hat{z}^*\omega$ は $\hat{z}$ の選び方に依らず, $\mathcal{A}_H(z)$ は well-defined となる. $r \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ について集合

$$\mathcal{P}^r(H) = \{z \in \mathcal{L}_0(M); z(t) = \phi^t_H(z(0)), \mathcal{A}_H(z) < r\}.$$

を考えると, これは $\mathcal{A}_H(z) < r$ となる $\mathcal{A}_H$ の臨界値 z の集合となる. H が「非退化」なハミルトン函数のときに, $\mathcal{P}^r(H)$ で生成される $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 可群についてコンレー・ゼンダー指数と微分を定めてホモロジーを考えると, **フィルター付きハミルトン・フレアーホモロジー** $HF^r(H)$ が定義できる. 量子ホモロジー $QH_*(M, \omega)$ の非自明な元 a に対し, 有限次元と同様にして**ハミルトン・スペクトル不変量** $c_{\mathrm{a}}(H)$ が定義される. 以上, 粗い説明になってしまったが, 詳しくは [Sch], [Oh05] など参照.

本稿では簡単のため, L を条件 $(*)$ を満たすラグランジュ部分多様体とする. ラグランジュ・フレアー理論とは以下の空間の上での「モース理論」である.

$$\Omega_0(L) = \{z \in C^\infty([0,1], M); z(0), z(1) \in L, [z] = 0 \in \pi_1(M, L)\}.$$

ハミルトン函数 $H\colon [0,1] \times M \to \mathbb{R}$ について, 以下の汎函数 $\mathcal{A}^L_H\colon \mathcal{L}_0(M) \to \mathbb{R}$ を考える.

$$\mathcal{A}^L_H(z) = \int_0^1 H_t(z(t))dt - \int_{D^2} \hat{z}^*\omega.$$

ただし, $\hat{z}\colon D^2 \to M$ は「z と L を張る円盤」で, $\pi_2(M,L)=0$ と $\omega|L=0$ より $\int_{D^2}\hat{z}^*\omega$ は $\hat{z}$ の選び方に依らず, $\mathcal{A}_H^L(z)$ は well-defined となる. $r \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ について集合

$$\mathsf{Ch}^r(H;L)=\{z\in\Omega_0(L); z(t)=\phi_H^t(z(0)), \mathcal{A}_H^L(z)<r\}.$$

を考えると, これは $\mathcal{A}_H^L(z)<r$ となる $\mathcal{A}_H^L$ の臨界値 z の集合となる. H が「非退化」なハミルトン函数のときに, $\mathsf{Ch}^r(H;L)$ で生成される $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 可群についてコンレー・ゼンダー指数と微分を定めてホモロジーを考えると, フィルター付きラグランジュ・フレアーホモロジー $HF^r(H;L)$ が定義できる. 量子ホモロジー $QH_*(L)$ の非自明な元 a に対し, 有限次元と同様にしてラグランジュ・スペクトル不変量 $c_{\mathsf{a}}^L(H)$ が定義される. 以上, 粗い説明になってしまったが, 詳しくは [Oh97], [Oh99],[L], [LZ] など参照.

有限次元と同様に「非退化」函数による近似で一般の函数 H についても $c_{\mathsf{a}}(H), c_{\mathsf{a}}^L(H)$ は定義され, c_{a}, c_{a}^L を $C_c^\infty([0,1]\times M)$ 上の汎函数と見なせる. 以下, こうして構成した $C_c^\infty([0,1]\times M)$ 上の汎函数のことをそれぞれハミルトン・スペクトル不変量, ラグランジュ・スペクトル不変量と呼ぶとする.

6. 部分擬準同型と技術的困難

以上, スペクトル不変量を函数空間上で定義したが, これをハミルトン微分同相群の普遍被覆 $\widetilde{\mathrm{Ham}}(M,\omega)$ 上で定義する. ただし, $\mathrm{Ham}(M,\omega)$ には C^∞ 位相を入れている. その上で (初等的な代数的位相幾何の授業で習うように) $\mathrm{Ham}(M,\omega)$ 上の恒等写像 id を基点とする道の空間を適当な同値関係で割ることで普遍被覆 $\widetilde{\mathrm{Ham}}(M,\omega)$ を構成する. ハミルトン函数 $H\colon [0,1]\times M\to\mathbb{R}$ に対し $\tilde{\phi}_H$ は道 $\{\phi_H^t\}_{t\in[0,1]}$ の代表する元を表すとする.

さて, $c\colon C_c^\infty([0,1]\times M)\to\mathbb{R}$ をハミルトン・スペクトル不変量もしくはラグランジュ・スペクトル不変量とする. これについて, 同じ記号で恐縮だが, $c\colon \widetilde{\mathrm{Ham}}(M,\omega)\to\mathbb{R}$ を $c(\tilde{\phi})=c(H)$ により定義する. ここで, $H\colon [0,1]\times M\to\mathbb{R}$ は $\tilde{\phi}_H=\tilde{\phi}$ となるハミルトン函数であり, これは H の選び方によらす well-defined である. ただし, M が閉の場合には正規化条件 $\int_M H_t\omega^n=0$ $(\forall t\in[0,1])$ も課す.

定義 6.1 $c\colon \widetilde{\mathrm{Ham}}(M,\omega)\to\mathbb{R}$ をシンプレクティック多様体 (M,ω) 上のハミルトン・スペクトル不変量, またはラグランジュ・スペクトル不変量とする.

M の開集合 U の c についてのスペクトル容量 $C_c(U)$ を以下のように定義する.

$$C_c(U)=\sup_{F\in C_c^\infty([0,1]\times U)}\{c(\tilde{\phi}_F)+c(\tilde{\phi}_F^{-1})\}.$$

定理 1.6, 定理 2.3, 定理 3.2 の証明で鍵となるのは以下の補題である.

補題 6.2 U を閉シンプレクティック多様体 (M,ω) の displaceable な開集合, $c\colon C_c^\infty([0,1]\times M)\to\mathbb{R}$ をハミルトン・スペクトル不変量とする. このとき, $C_c(U)\le E(U;U)<+\infty$

一方でこれらの「相対版」である定理 1.11, 定理 2.4, 定理 3.5 の証明では以下の補題がカギとなる.

補題 6.3 L をシンプレクティック多様体 (M,ω) のラグランジュ部分多様体で条件 $(*)$ を満たすものとする. U を L, もしくは U 自身から displaceable な開集合, $c\colon C^\infty([0,1]\times M)\to\mathbb{R}$ を L についてのラグランジュ·スペクトル不変量とする. このとき, $C_c(U)\le\bar{E}(U;L)<+\infty$.

補題6.3がまさに補題6.2の「相対版」なのがお分かりであろう. それでは補題6.3さえ証明できれば, 後はエントフやポルテロヴィッチらによる既存の議論を当てはめれば本稿の諸定理が自動的に得られるのだろうか. 実はそこに難点がある.

$c\colon \widetilde{\mathrm{Ham}}(M,\omega) \to \mathbb{R}$ を (冪等元についての) ハミルトン・スペクトル不変量もしくはラグランジュ・スペクトル不変量とする. このとき, c の同次化 $\sigma_c\colon \widetilde{\mathrm{Ham}}(M,\omega) \to \mathbb{R}$ を以下のように定義する.

$$\sigma_c(\tilde{\phi}) = \lim_{k\to+\infty} \frac{c(\tilde{\phi}^k)}{k}.$$

スペクトル不変量の三角不等式から上の極限の存在がいえる.

$\tilde{f}, \tilde{g} \in \widetilde{\mathrm{Ham}}(M,\omega)$ について, 不変量 $q_{c,\tilde{f}}(\tilde{g})$ を以下のように定義する.

$$q_{c,\tilde{f}}(\tilde{g}) = \sup_{k\in\mathbb{Z}}\{c(\tilde{f}^{-k}\tilde{g}\tilde{f}^k)\} + \sup_{k\in\mathbb{Z}}\{c(\tilde{f}^{-k}\tilde{g}^{-1}\tilde{f}^k)\}.$$

簡単のために $q_{c,\mathrm{id}}(\tilde{g})$ のことを $q_c(\tilde{g})$ と書く. これはスペクトル・ノルムと呼ばれ, スペクトル不変量の文脈では古くから知られているものである. なお, 任意の $\tilde{f}, \tilde{g} \in \widetilde{\mathrm{Ham}}(M,\omega)$ について $q_{c,\tilde{f}}(\tilde{g}) < +\infty$ が成立するかは現在のところ分かっていない.

このとき, 以下の不等式が成り立つ.

命題 6.4 函数 $c\colon \widetilde{\mathrm{Ham}}(M,\omega) \to \mathbb{R}$ をハミルトン・スペクトル不変量もしくはラグランジュ・スペクトル不変量とする. このとき, 任意の $\tilde{f}, \tilde{g} \in \widetilde{\mathrm{Ham}}(M,\omega)$ について以下が成立する.

$$|\sigma_c(\tilde{f}\tilde{g}) - \sigma_c(\tilde{f}) - \sigma_c(\tilde{g})| \leq q_{c,\tilde{f}}(\tilde{g}).$$

さて, **問題となるのは** $q_{c,\tilde{f}}(\tilde{g})$ **の評価**である. まず, ハミルトン・スペクトル不変量には**共役不変性**がある, つまり任意の $\tilde{f}, \tilde{g} \in \widetilde{\mathrm{Ham}}(M,\omega)$ について $c(\tilde{f}^{-1}\tilde{g}\tilde{f}) = c(\tilde{g})$ が成立する. これにより $q_{c,\tilde{f}}(\tilde{g}) = q_c(\tilde{g})$ も従う. よって, 特に g が displaceable な開集合 U に台を持つハミルトン函数で生成される場合には補題6.2により

$$q_{c,\tilde{f}}(\tilde{g}) = q_c(\tilde{g}) < C_c(U) < E(U;U) < +\infty$$

が成立する. なお、このような群上の函数のことを**部分擬準同型**と呼ぶ. 「g の台が小さい」場合には擬準同型のようにふるまうというのが理由である.

一方で, **ラグランジュ・スペクトル不変量は共役不変ではない**ので, 補題6.3を用いて上と同様の式変形をしようとすると最初の等式で破綻してしまうのである. これは本稿で述べた結果 (定理1.11, 定理2.4, 定理3.5, 定理4.2) を示す際に問題を生じさせる. この問題を解決したのが筆者の仕事であるが, 問題の解決策はアドホック, つまり問題ごとに上手い「抜け道」を探し出すもので, 統一的な解決策があるわけではない. したがって, 具体的な解決策については各論文に説明を譲りたい.

ハミルトン・スペクトル不変量で成立した共役不変性がラグランジュ・スペクトル不変量だと成立しない理由だが, これはラグランジュ・フレアー理論が共役という操作について安定しないことによる. このことは例えば以下の事実に象徴的である.

事実 6.5 任意の $f, g \in \mathrm{Ham}(M,\omega)$ について, $\#\mathrm{Fix}(g) = \#\mathrm{Fix}(f^{-1}gf)$ は常に正しいが, $\#(L\cap g(L)) = \#(L\cap f^{-1}gf(L))$ は一般には正しくない. ここで, $\mathrm{Fix}(h)$ と書いた場合には写像 $h\colon M\to M$ の固定点集合を指す.

#Fix(h) がハミルトン・フレアー理論の生成元, #$(L \cap h(L))$ がラグランジュ・フレアー理論の生成元に対応することを思い起こせば, 非専門家の読者にもある程度の問題の本質は伝わるであろう (と信じたい).

さて, 上で書いたラグランジュ・スペクトル不変量が共役不変でないことで生じる困難のいくつかを筆者は解決したわけだが, 全てが解決されたわけではない. 最後に, 今も未解決のまま残されている以下の問題を紹介する.

問題 6.6 g, N を正の数とし, C を Σ_g 内の非可縮単純閉曲線とする. C から displaceable な Σ_g の任意の開集合 U について, $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|)$ から $(\mathrm{Ham}(\Sigma_g), \|\cdot\|_U)$ への双リプシッツ単射準同型は存在するか.

注意 6.7 上の説明ではさも命題6.4から先行研究が従うかのように書いたが, これは数学的には正しくとも歴史的には正確な叙述ではない. 命題6.4自体は筆者の発見であり, 紹介した先行研究はそれ以前のものである.

注意 6.8 ラグランジュ・スペクトル不変量 c の同次化 σ_c の応用については既に先行研究 [MVZ] があるが, これは補題6.3の応用に重きを置く本稿の研究とは大きく方向性の異なるものである. ただし, 定理4.2は例外で, その証明には補題6.3ではなく [MVZ] のアイディアを用いる.

注意 6.9 本稿で触れた部分擬準同型という概念は, 筆者の知る限りエントフとポルテロヴィッチの仕事 [EP06] の中で初めて登場したものである. 彼らの構成はフレアー理論を用いたもので本稿での構成もそうであったが, 自然な問いとして (擬準同型でない) 部分擬準同型がフレアー理論を用いない文脈でも現れうるかというものがある.

この解答として, 筆者は実際にフレアー理論を用いずに $\mathrm{Ham}(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ 上に部分擬準同型を構成した [Ka16]. その後に木村 [Ki] が無限次元ブレイド群上で, ブランデンブルスキとケドラ [BK] が体積保存同相群上での部分擬準同型の構成に成功している. また, 部分擬準同型版のババア双対定理も特殊な群に対して証明されている [Ka17].

謝辞

まずは本稿執筆の機会を与えてくださった世話人の皆様に感謝いたします. 本稿でも紹介した論文のいくつかは折田龍馬氏との共同研究によるもので, この機会に彼にも感謝したく思います. また, 本研究は筆者が基礎科学研究院数理物理研究団 (大韓民国慶尚北道浦項市) にいた二年間の間に受けた刺激が元になっており, 最後に当時お世話になった呉龍根先生にも改めて感謝の念を記して, ここに筆を擱くものとします.

参考文献

[Ba] A. Banyaga, Sur la structure du groupe des difféomorphismes qui préservent une forme symplectique, *Comment. Math. Helv.* **53** (1978) no. 2 174–227.

[Br] M. Brandenbursky, *Bi-invariant metrics and quasi-morphisms on groups of Hamiltonian diffeomorphisms of surfaces*, Internat. J. Math. **26** (2015) no. 9 1550066.

[BK] M. Brandenbursky and J. Kędra, *Fragmentation norm and relative quasimorphisms*, arXiv:1804.06592., to appear in Proc. Amer. Math. Soc.

[BIP] D. Burago, S. Ivanov and L. Polterovich, *Conjugation-invariant norms on groups of geometric origin*, Adv. Stud. Pure Math. **52** (2008) 221–250.

[CFP] K. Cieliebak, U. Frauenfelder and G. Paternain, *Symplectic topology of Mañé's critical values*, Geom. Topol. **14** (2010), no. 3, 1765–1870.

[En] M. Entov, *Quasi-morphisms and quasi-states in symplectic topology*, The Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Seoul, 2014).

[EP06] M. Entov and L. Polterovich, *Quasi-states and symplectic intersections*, Comment. Math. Helv. **81** (2006), no. 1, 75–99.

[EP09] M. Entov and L. Polterovich, *Rigid subsets of symplectic manifolds*, Compos. Math. **145** (2009), no. 3, 773–826.

[Ka16] M. Kawasaki, *Relative quasimorphisms and stably unbounded norms on the group of symplectomorphisms of the Euclidean spaces*, J. Symplectic Geom., **14** (2016), no. 1 297–304.

[Ka17] M. Kawasaki, *Bavard's duality theorem on conjugation-invariant norms*, Pacific J. Math. **288** (2017), no. 1, 157–170.

[Ka18] M. Kawasaki, *Function theoretical applications of Lagrangian spectral invariants*, Preprint (2018), `arXiv:1811.00527`.

[KO19a] M. Kawasaki and R. Orita, *Disjoint superheavy subsets and fragmentation norms*, Preprint (2019), `arXiv:1901.01647`, to appear in J. Topol. Anal.

[KO19b] M. Kawasaki and R. Orita, *Existence of pseudo-heavy fibers of moment maps*, Preprint (2019), `arXiv:1901.09395`.

[KO19c] M. Kawasaki and R. Orita, *Rigid fibers of spinning tops*, Preprint (2019), `arXiv:1905.13112`.

[Ki] M. Kimura, *Conjugation-invariant norms on the commutator subgroup of infinite braid group*, J. Topol. Anal. ,**10** (2018), no. 2, 471–476.

[L] R. Leclercq, *Spectral invariants in Lagrangian Floer theory*, J. Mod. Dyn., **2** (2008), no. 2, 249–286.

[LZ] R. Leclercq and F. Zapolsky, *Spectral invariants for monotone Lagrangians*, J. Topol. Anal., Online Ready, `https://doi.org/10.1142/S1793525318500267`.

[LR] F. Le Roux, *Simplicity of* $\mathrm{Homeo}(\mathbb{D}^2, \partial\mathbb{D}^2, \mathrm{Area})$ *and fragmentation of symplectic diffeomorphisms*, J. Symplectic Geom. **8** (2010) no. 1 73–93.

[MVZ] A. Monzner, N. Vichery and F. Zapolsky, *Partial quasimorphisms and quasistates on cotangent bundles, and symplectic homogenization*, J. Mod. Dyn. **6** (2012), no. 2, 205–249.

[Oh97] Y.-G. Oh, *Symplectic topology as the geometry of action functional. I. Relative Floer theory on the cotangent bundle.*, J. Differential Geom. **46** (1997), no. 3, 499–577.

[Oh99] Y.-G. Oh, *Symplectic topology as the geometry of action functional. II. Pants product and cohomological invariants.*, Comm. Anal. Geom. **7** (1999), no. 1, 1–54.

[Oh05] Y.-G. Oh, *Construction of spectral invariants of Hamiltonian paths on closed symplectic manifolds*, in The Breadth of Symplectic and Poisson Geometry, eds. J. E. Marsden and T. Ratiu (Birkhäuser/Springer, 2005), 525–570.

[Po98] L. Polterovich, *Hofer's diameter and Lagrangian intersections*, Int. Math. Res. Not. **1998** (1998), no. 4, 217–223.

[P] L. Polterovich, *Quantum unsharpness and symplectic rigidity*, Lett. Math. Phys., **102**(3) (2012), 245-264.

[Po14] L. Polterovich, *Symplectic intersections and invariant measures*, Ann. Math. Qu. Not. **38** (2014), no. 1, 81–93.

[PR] L. Polterovich and D. Rosen, *Function theory on symplectic manifolds*, CRM Monograph Series, Vol. 34 (American Mathematical Society, 2014).

[Sch] M. Schwarz, *On the action spectrum for closed symplectically aspherical manifolds*, Pacific J. Math. **193** (2000), no. 2, 419–461.