有限次元非正曲率距離空間への群作用の固定点性質

加藤本子 (愛媛大学)*

概　要

群が位相次元有限の完備CAT(0)空間に等長かつ半単純に作用するとき, 群のある元が常に固定点を持つための条件について述べる. またその条件を用いて, Richard Thompsonの群Fの有限次元完備CAT(0)空間への等長かつ半単純な作用について, 交換子部分群の任意の有限生成部分群が固定点を持つことを調べる. 応用として, Kim, Koberda, Lodhaによって考えられている単位区間（もしくは単位円）の向きを保つ自己同相写像の成す有限生成群について, 固定点性質を調べる. 特にThompson群TおよびHigman-Thompsonの群T_nについては, 有限次元完備CAT(0)空間への半単純な等長作用が大域的固定点を持つと言える（Farbの性質F$\mathcal{A}_k$）.

1. 導入

本稿では, 有限生成群の「ある種の距離空間に等長に作用するとき常に大域的固定点を持つ」（すなわち, 距離空間上の一点であって, 群の任意の元によって固定されるものが存在する）という性質について述べる. このような性質を, 群の**固定点性質**と呼ぶことにする.

群が固定点性質を持つということは, 定義より, 考えている距離空間にその群が"良い作用"（例えば自由な作用や固有な作用）を持たないということを意味している. また, 特別な距離空間の族について固定点性質を考えることで, その群についてのさらに深い情報が得られることがある. このような現象の代表的な例は, 群の単体的木への作用を考えることによって得られる. ある群の, 単体的木への等長かつ単体的な作用が常に大域的固定点を持つとき, その群は**Serreの性質FA**を持つという. Serreの性質FAは, 群の組み合わせ的な構造を記述していることが知られている. 実際, ある群がSerreの性質FAを持つことは, その群が非自明な融合積の構造を持たず, $\mathbb{Z}$への全射を持たず, 有限生成であることと同値である（[13]）.

以下で扱う固定点性質は, Serreの性質FAの"高次元化"に当たる一般化である. 具体的には, 次のようなものを考える: ある群の, k次元完備CAT(0)空間への等長な半単純作用が常に大域的固定点を持つとき, その群は **性質F$\mathcal{A}_k$** を持つという（[5]）. ただし次元は位相次元を意味する（以下同じ）. 作用が半単純であることの定義は2章で後述する. 以下, CAT(0)空間について定義を述べる.

CAT(0)空間とは, 測地的距離空間であって, 任意の測地三角形がユークリッド空間内での比較三角形と比べて"太っていない"ものである. すなわち, 測地的距離空間(X, d)内の任意の測地三角形$\Delta(x, y, z)$に対して, $\mathbb{R}^2$内に各頂点間の距離が等しい三角形$\bar{\Delta}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$が合同を除いて一意的に存在するが, $\Delta(x, y, z)$上の任意の二点a, bと,

---

本稿の内容は科研費(課題番号:17J07711)の助成を受けた研究に基づいている.
2010 Mathematics Subject Classification: 20F65, 20F67
キーワード：群作用の固定点性質, CAT(0)空間, リチャード・トンプソンの群
* 〒790-8577 松山市文京町2番5号
e-mail: kato.motoko.yy@ehime-u.ac.jp
web: https://researchmap.jp/katomotoko

$\bar{\Delta}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ 上の対応する二点 $\bar{a}, \bar{b}$ の間に

$$d(a,b) \leq d_{\mathbb{R}^2}(\bar{a},\bar{b}) \tag{1.1}$$

の関係が成り立つ（図1）．多くの重要な距離空間が CAT(0) 空間の性質を持つ．例えば, 単体的木は1次元の CAT(0) 空間である．ここで単体的木への等長作用は常に半単純なので, 性質 $\mathrm{F}\mathcal{A}_1$ は Serre の性質 FA より強い．Hilbert 空間も完備 CAT(0) 空間の例である．また, 単連結で完備な Riemann 多様体の場合には, CAT(0) 空間であることは, 断面曲率が正でないという条件と一致する（[2] 参照）．この意味で CAT(0) 性は, 距離空間に対して非正曲率性を記述する性質となっている．

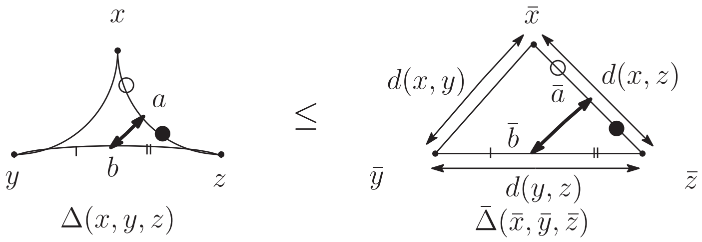

図 1: CAT(0) 空間の測地三角形と $\mathbb{R}^2$ の比較三角形．

CAT(0) 空間の様々な性質は, より一般的な **Busemann 非正曲率距離空間**（以下 **Busemann 空間**）についても成り立つ．Busemann 空間とは, 距離関数が凸であるような測地的距離空間を言う．すなわち, 測地的距離空間 (X,d) が Busemann 空間であるとは, X の任意の測地線分の組 $c_1 : [0,a_1] \to X$, $c_2 : [0,a_2] \to X$ に対して,

$$d(c_1(a_1t), c_2(a_2t)) \leq td(c_1(a_1), c_2(a_2)) + (1-t)d(c_1(0), c_2(0)) \tag{1.2}$$

が満たされるときを言う．CAT(0) 空間は Busemann 空間であり, 単連結完備 Riemann 多様体の場合には, これらの概念は共に断面曲率が正でないことを表す．しかし一般には, Busemann 空間であって CAT(0) 空間でない場合がある．例えば p ノルムを入れた Banach 空間 l^p を考えると, これらは $1 < p < \infty$ のとき Busemann 空間であるが, $p \neq 2$ のときは CAT(0) 空間でない．本稿では Busemann 空間への群作用の固定点性質については述べないが, Busemann 空間の場合にも空間の固有性などを仮定することで, 完備 CAT(0) 空間の場合と同様に議論することができる（[11]）．

いくつかの重要な群については, 性質 $\mathrm{F}\mathcal{A}_k$ が調べられている．例えば, 任意の自然数 k と任意の3以上の自然数 n について, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ は性質 $\mathrm{F}\mathcal{A}_k$ を持つ（[5] 参照）．Farb [5] は任意の3以上の自然数 n について, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}[1/p])$ が性質 $\mathrm{F}\mathcal{A}_{n-2}$ を持つことを示した．Bridson [1] は向き付け可能種数 g 閉曲面の写像類群が性質 $\mathrm{F}\mathcal{A}_{g-1}$ を持つことを示した（$g \geq 1$ は自然数）．Varghese [15] は自由群の自己同型群 $\mathrm{Aut}(F_n)$ について, これらが性質 $\mathrm{F}\mathcal{A}_k$ を持つことを, $n \geq 4$ かつ $k < \min\{i\lfloor n/(i+2)\rfloor \mid 2 \leq i \leq k+1\}$ のときに示した．

本稿では [10] に基づいて, 群に内在する条件のみを用いて性質 $\mathrm{F}\mathcal{A}_k$ を保証する方法について述べる（定理2.3）．次にその方法を応用し, **Richard Thompson** の群と呼ばれる群とその一般化について固定点性質を議論する（定理3.1, 定理3.3）．

2. 有限次元CAT(0)空間への群作用の固定点

(X,d) を距離空間, γ を X の等長変換とする. X の部分集合 $\mathrm{Min}(\gamma)$ を次式で定める:

$$\mathrm{Min}(\gamma)=\{x\in X \mid d(x,\gamma(x))=\inf_{x\in X}\{d(x,\gamma(x)) \mid x\in X\}\}. \tag{2.1}$$

$\mathrm{Min}(\gamma)$ が空でないとき, γ は**半単純**と言う. 群の等長作用の半単純性は, 「群の任意の元が半単純な等長変換として作用していること」と定義する. 半単純な γ について, γ が X 内に固定点を持たないとき, **双曲的**と言う. 完備CAT(0)空間の双曲的な等長変換 γ については, 以下の補題のように, $\mathrm{Min}(\gamma)$ が「γ が平行移動で作用する軸が平行に並んだ」構造を持つことが知られている.

補題 2.1 ([2] 参照)**.** X を完備CAT(0)空間とし, γ を X の双曲的な等長変換とする. このとき $\mathrm{Min}(\gamma)$ は直積距離空間 $\mathbb{R}\times Y$（Y はあるCAT(0)空間）に等長同型.

さらに γ' が γ と可換な等長変換とすると, γ' は $\mathrm{Min}(\gamma)=\mathbb{R}\times Y$ を直積の構造を込めて保つ. 制限 $\gamma'|_{\mathrm{Min}(\gamma)}$ を $\mathrm{Min}(\gamma)$ の等長変換とみなすと, 第一成分 $\mathbb{R}$ の平行移動と第二成分 Y の等長変換に分解する.

半単純な等長作用を考える際は次が成り立つ.

補題 2.2 ([2] 参照)**.** 補題2.1で γ' が X の半単純な等長変換だったとする. このとき $\gamma'|_{\mathrm{Min}(\gamma)}$ は $\mathrm{Min}(\gamma)$ の等長変換としても半単純. さらに, $\gamma'|_{\mathrm{Min}(\gamma)}$ の定める Y の等長変換も半単純.

この章の主結果である定理2.3を述べるため, 群とその部分群の組についても固定点性質を定義しておく: 群と部分群の組 (G,H) が性質 $\mathrm{F}\mathcal{A}_k$ を満たすとは, G が k 次元CAT(0)空間 X に等長かつ半単純に作用するならば, H が常に固定点を持つときを言う.

定理 2.3 ([10])**.** k を任意の自然数とする. G は群であって $g_0\in G$ とする. G の元の列 $\{g_i\}_{1\le i\le k}$ があって次を満たすとする:

- g_i は $\bigcap_{j=0}^{i-1} Z_G(g_j)$ に含まれる $(1\le i\le k)$. ただし $Z_G(h)$ は h の G での中心化群を表す.
- g_1 は g_0 と G 内で共役であり, g_{i+1} は g_i と $\bigcap_{j=0}^{i-1} Z_G(g_j)$ 内で共役 $(1\le i\le k)$.
- g_i は $\bigcap_{j=0}^{i-1} Z_G(g_j)$ のアーベル化の元として位数有限.

このとき組 $(G,\langle g_0\rangle)$ は性質 $\mathrm{F}\mathcal{A}_k$ を持つ.

証明. 背理法によって示す. そのため, G が k 次元完備CAT(0)空間 X に等長かつ半単純に作用しており, g_0 が固定点を持たないとする. 作用の半単純性の仮定より, g_0 は双曲的. 補題2.2より, $Z_G(g_0)$ は $\mathrm{Min}(g_0)$ に半単純に作用する. 元 g_1 は g_0 の共役なので, 仮定より固定点を持たず, $g_1|_{\mathrm{Min}(g_0)}$ は $\mathrm{Min}(g_0)$ の双曲的な等長変換.

補題2.1より, $\mathrm{Min}(g_0)$ は直積 $\mathbb{R}\times Y_1$ の構造を持ち, $Z_G(g_0)$ の $\mathrm{Min}(g_0)$ への作用は $\mathbb{R}$ の平行移動と Y_1 への等長作用に分解する. まず $\mathbb{R}$ の平行移動について見てみると, g_1 は $Z_G(g_0)^{ab}$ 内で有限位数なので, g_1 の定める平行移動は長さ0. 次に Y_1 への等長作用について見てみると, 補題2.2よりこの作用は半単純なので, g_1 は Y_1 の双曲的な等長変換を定める. Y_1 の位相次元は $k-\dim(\mathbb{R})=k-1$ 以下なので, X を Y_1 と置き換え, G を $Z_G(g_0)$ と置き換え, g_0 を g_1 と置き換えた上で同じ議論が可能になる. すると

$Y_1 \supset \mathrm{Min}(g_1) = \mathbb{R} \times Y_2$ に対し, g_2 が Y_2（次元 $k-2$ 以下）の双曲的な等長変換であることがわかる. 同様のプロセスを最大 $k+1$ 回繰り返すと, $g_{\leq k}$ が次元 0 の $Y_{\leq k}$ の双曲的な等長変換となる. $Y_{\leq k}$ は 1 点になるため, 矛盾する. □

定理 2.3 は, 群のある元が固定点を持つことを保証している. 大域的な固定点の存在を示すには, 定理 2.3 に加えて次の補題を用いる. この補題は, 有限次元ユークリッド空間の凸集合族に関する「Helly の定理」の一般化として得られる.

補題 2.4 ([1], [15] 参照)**.** k を自然数, X を位相次元 k の完備 CAT(0) 空間とする. $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$ が $0 < k < \Sigma_{i=1}^{n} k_i$ を満たすとする. $\{S_i\}_{1\leq i\leq n}$ を, $\mathrm{Isom}(X)$ の互いに可換かつ互いに共役な部分集合とする. 各 S_i の, 任意の k_i-元部分群が X に固定点を持つならば, 任意の S_i の任意の有限部分集合は共通の固定点を持つ.

3. Richard Thompson の群への応用

定理 2.3 で述べた性質 $\mathrm{F}\mathcal{A}_k$ の判定条件は, **Richard Thompson の群**（以下 **Thompson 群**）への応用を念頭に置いている. Thompson 群には F, T, V の 3 種類があり, それぞれ単位区間, 単位円, カントール集合の同相写像の成す群として記述される. これらの群はいずれも有限表示群（特に有限生成群）である. T と V は単純群であり, 有限表示単純群の歴史上初めての例として有名である. F は単純群ではないが, F の交換子部分群は単純群になっている. これらの群は様々な非自明な性質を持つことが知られており, 特に F が従順群であるかどうかは有名な未解決問題である. 以下では F, T とその一般化についてのみ, 定義と固定点性質を示すための議論を述べるが, V やその一般化の場合にも同様に議論できる（[10]）.

Thompson 群 F は, 単位区間の向きを保つ自己同相写像全体の中で、図 2 の元 x_0, x_1 から生成される（[4] 参照）. これらの元は, 定義域と値域が同じ個数（有限個）の区間にそれぞれ分割され, 各区間上アファインであるような写像になっている. 例えば図 2 の f_1 に関しては $[0,1] = [0, \frac{1}{4}] \cup [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, 1]$（定義域）および $[0,1] = [0, \frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \cup [\frac{3}{4}, 1]$（値域）のように分割されている. これらの分割は全て, 単位区間から区間の二等分によって得られる分割である（以下**二項分割**と呼ぶ）. 群 F には, このようにして得られる（すなわち定義域と値域の分割が有限の二項分割によって得られ, 写像が区分的にアファインであるような）$[0,1]$ の向きを保つ自己同相写像が全て含まれる（[4] 参照）. 同様に, Thompson 群 T は単位円の向きを保つ自己同相写像全体の中で, 図 2 の元 x_0, x_1, π から生成される. また, 定義域と値域の分割が有限の二項分割によって得られ, 写像が区分的にアファインであるような単位円の向きを保つ自己同相写像を全て含む.

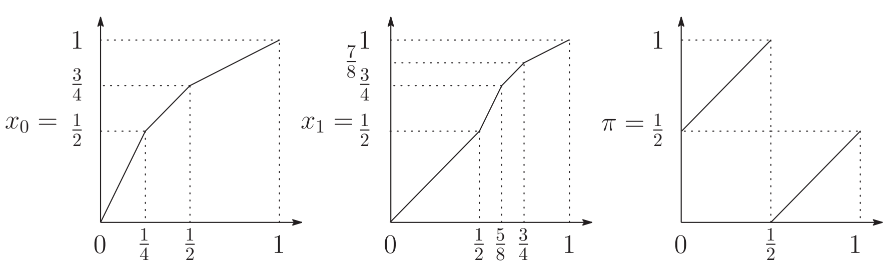

図 2: F, T の生成系. F は x_0 と x_1 から, T は x_0, x_1, π（単位区間の両端を同一視し, S^1 間の写像とみなす）から生成される.

以下, F や T の複雑な元を表示するため, **根付き二分岐木**の組による表示を用いる. 根付き無限2分岐木とは図3に示すグラフであり, その頂点は一つを除いて3価である. 一つだけある2価の頂点を根と呼ぶ. 根付き無限二分岐木の各頂点は, 図3のように, 単位区間の二項分割によって得られる区間と対応づけられているとする. この対応を介して, 根付き有限2分岐木の1価の頂点たちは, 単位区間 $[0,1]$ の分割に対応している. したがって F, T の各元を根付き有限二分岐木の組を用いて表すことができる（例えば図4）. ただし T の元を表す際は, 0を含む区間の写り先にラベル0を付して表すことにする.

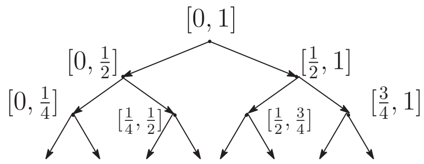

図 3: 根付き無限二分岐木の各頂点と区間の対応（見やすさのため, 各辺に根から遠ざかる向きを入れて描いている）.

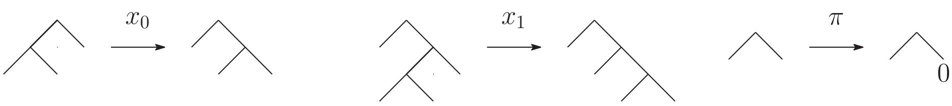

図 4: 図2の x_0, x_1, t と対応する根付き有限二分岐木の組.

Thompson 群の群作用の固定点性質についてはいくつかの先行研究がある. 例えば Farley [7] は, T と V が Serre の性質 FA を持つことを示した. ここで, F は HNN 拡大の構造を持つため, Serre の性質 FA を持たない. また F, T, V は**無限次元の** CAT(0) 複体に等長かつ固有に（したがって大域的固定点を持たずに）作用することも, Farley [6] によって知られている. Genevois [8] は V の有限次元の CAT(0) 方体複体（cubical complex）への作用が常に大域的固定点を持つことを示した. 有限次元の CAT(0) 方体複体への等長な群作用は半単純作用なので, この結果は性質 $\mathrm{F}\mathcal{A}_k$（k は任意の自然数）よりも弱い結果である. これらの結果を踏まえると, T や V の性質 $\mathrm{F}\mathcal{A}_k$ を調べることは自然である.

定理 3.1 ([10]). k を任意の自然数とする. Thompson 群 F の交換子部分群 $[F,F]$ の任意の元 f に対して, 組 $(F,\langle f\rangle)$ は性質 $\mathrm{F}\mathcal{A}_k$ を持つ.

証明. 定理2.3 と補題2.4を用いて議論する. 交換子部分群 $[F,F]$ が F の部分集合として「0, 1の各近傍で傾き1となる写像の成す F の部分集合」と一致すること（[4] 参照）を用いると, 任意の $f\in[F,F]$ に対して, $(0,1)$ 内の閉区間 J_1 が存在して $\mathrm{supp}(f)\subset J_1$ を満たす. また, 単位区間の二項分割によって得られる区間 J_2 であって $\mathrm{supp}(f)$ と交わらないものが取れる. F は単位区間の自己同相写像の成す群なので, 開区間 $(0,1)$ に自然な作用を持つ. この作用は, 任意のコンパクト集合を任意の開集合内に写す作用である（[4] 参照）. したがって, J_1 を J_2 の内部に写す元 $h_1\in F$ が存在する. このとき $\mathrm{supp}(f^{h_1})=h_1(\mathrm{supp}(f))$ は $\mathrm{Int}(J_2)$ 内の閉区間 $h_1(J_1)$ に含まれる. 台が J_2 に含まれる F の元全体は, F の部分群を成す. この部分群を $F(J_2)$ とおく. J_2 と $[0,1]$ の同一視に

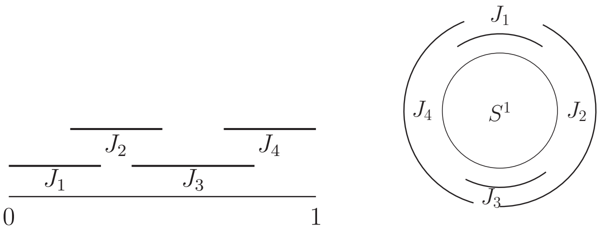

図 5: 区間の4-チェインと4-リング．$J_i - J_{i+1}$ と $J_{i+1} - J_i$ (リングの場合, 添字は mod n) は空でなく, $J_i \cup J_k$ ($|i-k| \geq 2$) は空.

より, $F(J_2)$ と F の間の同型が得られる．この同型を介することで, f^{h_1} が $F(J_2)$ の交換子部分群に含まれていることがわかる．f と $F(J_2)$ は可換なので, $F(J_2)$ は $Z_F(f)$ に含まれる．したがって f^{h_1} は $[Z_F(f), Z_F(f)]$ に含まれる．同じ議論を組 (G, f) の代わりに $(F(J_2), f^{h_1})$ について繰り返し, F の元 $\{h_i\}_{1\leq i\leq k+1}$ を得る．F の元の列 $\{g_i\}_{1\leq i\leq k+1}$ を $g_i = f^{h_1\cdots h_i}$ で定めると, これらは定理2.3の仮定を満たす． □

F の一般化や T の場合に性質 $\mathrm{F}\mathcal{A}_k$ を議論するため, Kim, Koberda と Lodha [12] の導入した F, T の一般化の言葉を用いる．これらの一般化は $\mathrm{Homeo}_+([0,1])$ もしくは $\mathrm{Homeo}_+(S^1)$ の有限生成部分群として定義される．$n \geq 2$ を自然数とする．順序づけられた n 個の開区間の列 $(J_1, \ldots, J_n)$ が,「添字が隣り合うときのみ共通部分が空でない」という条件を満たすとき, これらを **n-チェイン**と呼ぶ（図5）．$\mathcal{F} = \{f_i\}_{1\leq i\leq n} \subset \mathrm{Homeo}^+(\mathbb{R})$ を, 列 $(\mathrm{supp}(f_1), \ldots, \mathrm{supp}(f_n))$ が n-チェインを成すような元とする．任意の n について $\langle f_i, f_{i+1}\rangle$ が Thompson 群 F と同型になるとき, $\mathcal{F}$ で生成される $\mathrm{Homeo}^+(\mathbb{R})$ の部分群を **n-チェイン群** と呼ぶ．開区間の添字を mod n で考えることで, 上と同様に **n-リング**および **n-リング群**を定義する（図5）．この定義の中で,「隣り合う生成元が F を生成する」という仮定は, 次のような結果に基づいている．

補題 3.2 ([12])**.** $G_{\mathcal{F}}$ を, $\{f_1, f_2\} \subset \mathrm{Homeo}^+(\mathbb{R})$ で生成される群とする．生成元の台の組 $(\mathrm{supp}(f_1), \mathrm{supp}(f_2))$ が2-チェインを成すとする．このとき $N \in \mathbb{N}$ を十分大きくとれば, $\langle f_1^N, f_2^N\rangle$ は F と同型となる．

定理 3.3 ([11])**.** n を2以上の自然数とする．$\mathcal{F} = \{f_i\}_{1\leq i\leq n} \subset \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ について, 開区間の列 $(\mathrm{supp}(f_i))_{1\leq i\leq n}$ が n-チェインまたは n-リングを成すとする．$G_{\mathcal{F}}$ を, $\mathcal{F}$ で生成される n-チェイン群または n-リング群とする．H を交換子部分群 $[G_{\mathcal{F}}, G_{\mathcal{F}}]$ の有限生成部分群とする．組 $(G_{\mathcal{F}}, H)$ は任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $\mathrm{F}\mathcal{A}_k$ を持つ．

証明. 各 $1 \leq i \leq n$ に対して $H_i = \langle f_i, f_{i+1}\rangle$ とおく．S を H の生成系とする．$[G_{\mathcal{F}}, G_{\mathcal{F}}]$ は $\{[f_i, f_{i+1}]\}_{1\leq i\leq n}$ によって正規生成されるので, $S = \{s_{i'}\}_{1\leq i'\leq n'}$ は $[f_i, f_{i+1}]$ の共役たちから成るとして良い．すると各 $1 \leq i' \leq n'$ に対して, $\mathrm{supp}(s_{i'})$ は $(0,1)$ 内の閉区間 $J_{i'}$ に含まれている．2-チェイン群 $\langle k_1, k_2\rangle$ は $\mathrm{supp}(k_1) \cup \mathrm{supp}(k_2)$ の任意の閉区間を任意の開集合内に写す（[12]）ので, 各 $1 \leq i' \leq n'$ に対して, $J_{i'}$ を $\mathrm{supp}(H_n)$ 内に写す元 $g_{i'}$ が $g_{i'} = h_1^{i'} \cdots h_i^{i'} \cdots h_n^{i'}$ ($h_i^{i'} \in [H_i, H_i]$) のようにして取れる．ここで S を $S' = \{s_{i'}^{g_{i'}}\}_{1\leq i'\leq n'} \cup \{h_i^{i'}\}_{1\leq i\leq n, 1\leq i'\leq n'}$ と取り替える．S' は H の有限生成系のままである．S' の各元は $[H_i, H_i]$ の共役に含まれる．

$G_{\mathcal{F}}$ が k 次元完備 CAT(0) 空間 X に等長かつ半単純に作用しているとする．H_i は F と同型であるから, 誘導される H_i の作用に対して定理3.1を適用できて, S' の各元はそれ

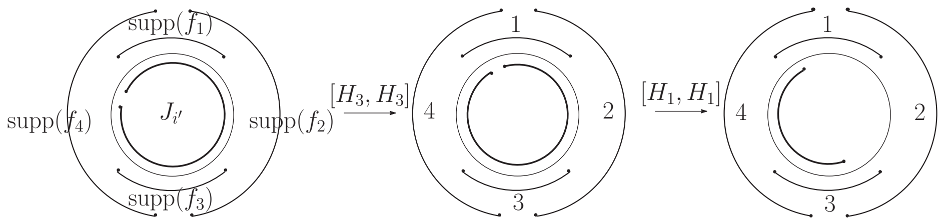

図 6: g_j の構成 (リング群の場合).

ぞれ固定点を持つとわかる. 任意の $m > n$, 任意の n-チェイン群 G に対して G と同型な m-チェイン群が存在する（[12]）ので, n が k に比べて十分大きいと仮定して良い. すると S' の任意の $(k+1)$ 元部分集合 S'_{k+1} に対して, S'_{k+1} に含まれる元の台の和は, $(0,1)$ のある閉区間に含まれる. この閉区間を互いに交わらない開集合内に写すような $G_{\mathcal{F}}$ の元が $(k+1)$ 個取れる. 補題2.4を S' に適用して, S' の元たちが共通の固定点を持つことが従う. □

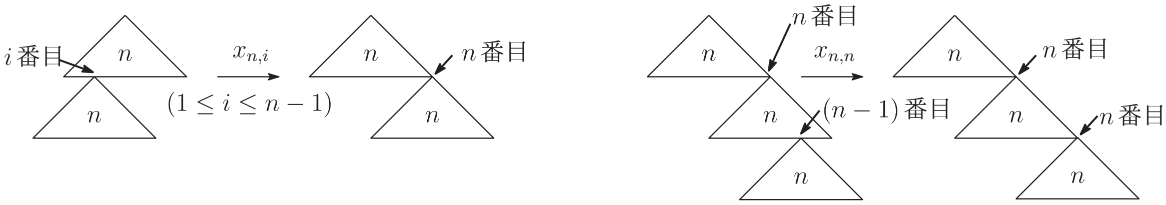

図 7: Higman-Thompson の群 F_n の生成系.

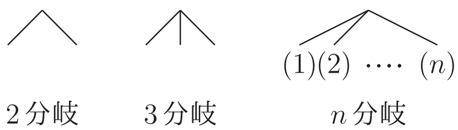

図 8: n 分岐のグラフ.

チェイン群とリング群は, F, T およびそれらの一般化であって *Higman-Thompson* の群 F_n と T_n と呼ばれるもの（[3], [9] 参照）を含んでいる. 任意の自然数 $n \geq 2$ に対して, $[0,1]$ および S^1 の n 項分割を考えると, F および T と同様の構成で $\mathrm{Homeo}_+([0,1])$, $\mathrm{Homeo}_+(S^1)$ の部分群が得られる. これらを Higman-Thompson の群と呼び, F_n, T_n と表す. F_2, T_2 はそれぞれ F, T と一致する. F, T の場合と同様に, n 項分割を根付きの有限 n 分岐木と対応させることで, F_n, T_n の元を根付き有限 n 分岐木の組で表示できる. F_n は図7に示された n 個の写像 x_i $(1 \leq i \leq n)$ で生成されている（[3], [4]）. ただし, n でラベルづけられた三角形は n 分岐を表す（図8）. T_n は F_n および, S^1 の向きを保つ $2\pi/n$ 回転で生成されている.

補題3.2には次のような一般化がある.

補題 3.4 ([12])**.** n を 2 以上の自然数とする. $\{f_i\}_{1\leq i\leq n} \subset \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ を, 開区間の列 $(\mathrm{supp}(f_i))_{1\leq i\leq n}$ が n-チェインであるような写像とする. $G_{\mathcal{F}}$ を $\{f_i\}_{1\leq i\leq n}$ で生成される $\mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ の部分群とする. $N \in \mathbb{N}$ を十分大きくとると, $G_{\mathcal{F}}$ の部分群 $\langle\{f_i^N\}_{1\leq i\leq n}\rangle$ は n-チェイン群となり, さらに F_n に同型となる.

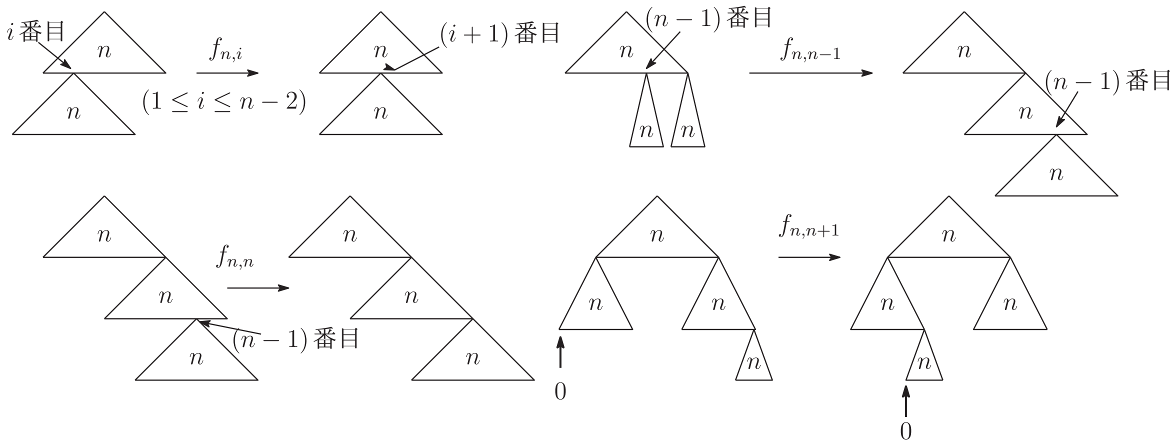

図 9: Higman-Thompson の群 T_n の新しい生成系.

補題3.4より, F_n と同型な n-チェイン群が存在するので, F_n について定理3.3が適用できる.

系 3.5. $n \geq 3$ とする. H を F_n の交換子部分群の有限生成部分群とする. 組 (F_n, H) は任意の $k \in \mathbb{N}$ について性質 $\mathrm{F}\mathcal{A}_k$ を持つ.

T_n についても, リング群の構造を持つことが示せる.

補題 3.6 ([12])**.** $x,\ y,\ z,\ w \in \mathbb{R}$ が $-\infty \leq x < y < z < w \leq \infty$ を満たすとする. f, $g \in \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ を, 台が開区間 (x, z), (y, w) であるような元とする. $gf(y) \geq z$ ならば, $\langle f, g \rangle$ は F と同型.

補題 3.7 ([11])**.** 任意の $n \geq 2$ について, T_n は $(n+1)$-リング群.

証明. y_n を $2\pi/n$ 回転であって, 0を $1-1/n$ に写すものとする. T_n は図7の $\{x_{n,i}\}_{1\leq i\leq n}$ と $\{y_n\}$ で生成される. $f_{n,i} = x_{i+1}^{-1}x_i$ $(1 \leq i \leq n-1)$ とおき, $f_{n,n} = x_n$ とおくと, $\{f_{n,i}\}_{1\leq i\leq n}$ は F_n を生成する. また, y_n と F_n の元の積で表せる $f_{n,n+1}$（図9）を付け足すと, $\{\mathrm{supp}(f_{n,i})\}_{1\leq i\leq n+1}$ はリングを成し, T_n を生成する. また, 補題3.6により, $\langle f_{i,n}, f_{i+1,n} \rangle$ $(1 \leq i \leq n)$ と $\langle f_{n,n+1}, f_{n,1} \rangle$ は F と同型. よって T_n は $(n+1)$-リング群の構造を持つ. □

補題3.7および T_n が有限生成実質的単純群であること（[3]）を用いると, 定理3.3より次がしたがう.

系 3.8. $n \geq 2$ とする. T_n は任意の $k \in \mathbb{N}$ について性質 $\mathrm{F}\mathcal{A}_k$ を持つ.

参考文献

[1] M. R. Bridson, *On the dimension of CAT(0) spaces where mapping class groups act*, J. Reine Angew. Math. **673**, 55–68, 2012.

[2] M. R. Bridson and A. Haefliger, Metric spaces of nonpositive curvature, Grundlehren der Math. Wiss. **319**, Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[3] K. S. Brown, *Finiteness properties of groups*, J. Pure Appl. Algebra, **44** (1-3), 45–75, 1987.

[4] J. W. Cannon, W. J. Floyd, and W. R. Parry, *Introductory notes on Richard Thompson's groups*, Enseign. Math. (2) **42**, 215–256, 1996.

[5] B. Farb, *Group actions and Helly's theorem*, Advances in Mathematics **222** 1574–1588, 2009.

[6] D. S. Farley, *Actions of picture groups on $CAT(0)$ cubical complexes*, Geom. Dedicata **110**, 221–242, 2005.

[7] D. S. Farley, *A proof that Thompson's groups have infnitely many relative ends*, J. Group Theory **14**, 649–656, 2011.

[8] A. Genevois, *Hyperbolic and cubical rigidities of Thompson's group V*, J. Group Theory, published online, DOI: 10.1515/jgth-2018-0103.

[9] G. Higman, *Finitely presented infinite simple groups*, Notes Pure Math. **8**, Australian National University, Canberra, vii+82, 1974.

[10] M. Kato, *On groups whose actions on finite-dimensional $CAT(0)$ spaces have global fixed points*, Published Online, DOI: https://doi.org/10.1515/jgth-2018-0116.

[11] M. Kato, *Richard Thompson's groups from the viewpoint of geometric group theory*, Ph. D. Thesis, The University of Tokyo, 2019.

[12] S. Kim, T. Koberda and Y. Lodha, *Chain groups of homeomorphisms of the interval and the circle*, Ann. Sci. de l'ENS, to appear.

[13] J. P. Serre, *Arbres, amalgames, SL_2*, Soc. Mat. France, Astérisque **46**, 1977.

[14] C. Soulé, *Chevalley groups over polynomial rings*, Homological Group Theory, Proc. Sympos., Durham, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **36**, 359–367, 1977.

[15] O. Varghese, *Fixed points for actions of $Aut(F_n)$ on $CAT(0)$ spaces*, Münster J. of Math. **7**, 439–462, 2014.