

光的点を持つ曲面の幾何学

本田 淳史 (横浜国大工)*

1. はじめに

ローレンツ多様体は理論物理学, とくに一般相対論において重要な役割を果たす一方で, 純粋な幾何学的対象としても興味深い. ローレンツ多様体の計量は非退化であるが, その部分多様体に誘導される計量は正定値計量や不定値計量, さらに退化することもあり, それらが混在する場合もある. ここでは, 3次元ローレンツ多様体内の連結な正則曲面を考える. とくに, 誘導計量が正定値である部分, 不定値である部分, さらに退化した部分を混在して持つような曲面, **混合型曲面**を対象とする. 混合型曲面の計量が退化する点 (光的点) は, 誘導計量の特異点とみなされる. 誘導計量が非退化である部分において定義される不変量や幾何構造は一般に発散し, 光的点の近傍における混合型曲面の構造は解明されていない部分が多い.

本稿では, 混合型曲面の光的点を写像の特異点のように扱い, とくに波面の微分幾何学的研究の手法を適用することで, ガウス曲率などの様々な幾何学的不変量の光的点における挙動を調べた結果を報告する. まず第2節において, 本研究の動機付けとなる混合型曲面の近年に至るまでの研究を紹介する. 第3節では, 混合型曲面の非退化な光的点におけるガウス曲率の有界性の特徴付けを与えるために, 光的特異曲率や光的法曲率などの基本的な不変量を導入する. さらに, 光的特異曲率の幾何学的意味や, 有界なガウス曲率を持つ混合型曲面に対するガウス・ボンネ型の定理を紹介する. 第4節では, 不変量の内在性・外在性を議論する. 一般に, 光的特異曲率は内的不変量であるが, 光的法曲率はそうとは限らない. まず, ガウス曲率の漸近挙動の系として, 光的特異曲率が恒等的に消える場合には光的法曲率が内的不変量であることを紹介する. さらに, 実解析的, かつ, 光的特異曲率が消えない場合には, 光的法曲率が外的不変量であることを導く.

本稿の内容は [17] と [18], および佐治健太郎氏 (神戸大学), 寺本圭佑氏 (九州大学) との共同研究 [19] に基づく.

2. 混合型曲面

(M^3, h) を向きづけられた3次元ローレンツ多様体とする ($h = \langle \cdot, \cdot \rangle$ はローレンツ計量). 点 $p \in M^3$ において, 接ベクトル $\mathbf{v} \in T_p M^3$ ($\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$) が $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle > 0$ を満たすとき, 空間的であるという. 同様に, $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle < 0$ (resp. $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$) が成り立つとき, \mathbf{v} を時間的 (resp. 光的) と呼ぶ.

3次元ローレンツ多様体 $M^3 = (M^3, h)$ の**曲面**とは, 連結な2次元 C^∞ 級多様体 Σ のはめ込み $f: \Sigma \rightarrow (M^3, h)$ を表すこととする. このとき,

$$(ds^2)_p(\mathbf{v}, \mathbf{w}) := \langle df_p(\mathbf{v}), df_p(\mathbf{w}) \rangle \quad (\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_p \Sigma, p \in \Sigma)$$

により定まる Σ のなめらかな計量 ds^2 を第1基本形式 (もしくは誘導計量) と呼ぶ.

本研究は科研費 (課題番号:19K14526) の助成を受けたものである.

* 〒240-8501 神奈川県横浜市保土ヶ谷区常盤台 79-1 横浜国立大学大学院工学研究院
e-mail: honda-atsufumi-kp@ynu.jp

点 $p \in \Sigma$ が空間的点であるとは, $(ds^2)_p$ が $T_p\Sigma$ の正定値対称双線形形式を定めるときをいう. 同様に, $(ds^2)_p$ が不定値 (resp. 退化) のとき, $p \in \Sigma$ を時間的点 (resp. 光的点) と呼ぶ. 空間的点集合 (resp. 時間的点集合, 光的点集合) を Σ_+ (resp. Σ_-, LD) で表す. $\Sigma = \Sigma_+$ (resp. $\Sigma = \Sigma_-$) となるとき, 曲面 $f: \Sigma \rightarrow M^3$ は空間的 (resp. 時間的) と呼ばれる.

定義 1. 連結な 2次元 C^∞ 級多様体 Σ に対し, 空間的点集合 Σ_+ と時間的点集合 Σ_- がどちらも空でない曲面 $f: \Sigma \rightarrow M^3$ を **混合型曲面** と呼ぶ.

非光的点集合 $\Sigma_* := \Sigma_+ \cup \Sigma_-$ 上では, ガウス曲率 K や平均曲率 H が定義されるが, 光的点集合 LD に近づくにつれて一般には発散する. 混合型曲面の第 1 基本形式は型変化計量 (signature-changing metric) を与える [1, 29, 30, 31, 21, 22, 12, 37, 38, 39, 11, 23, 34, 42, 36]. 型変化計量は量子重力理論や一般相対論においても考察されている [41, 3].

2.1. Carathéodory 予想

Carathéodory 予想とは, 3次元ユークリッド空間 \mathbf{R}^3 の閉凸曲面には少なくとも臍点が 2つ存在するのではないかというものである. Carathéodory 予想は未解決である一方, F. Tari [44] は \mathbf{R}^3 ではなく, 3次元ミンコフスキー空間 \mathbf{R}_1^3 の閉凸曲面の場合に, Carathéodory 予想を肯定的に解決した. ここで, 3次元ミンコフスキー空間 \mathbf{R}_1^3 とは, 3次元アファイン空間に標準ローレンツ内積

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = x^2 + y^2 - z^2 \quad (\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbf{R}_1^3)$$

を備えた, 平坦な 3次元ローレンツ多様体である. 一般に, 臍点是非光的点集合 $\Sigma_* = \Sigma_+ \cup \Sigma_-$ において定義されるが¹, [44] では光的点に対しても臍点の概念を導入している. \mathbf{R}_1^3 にはめ込まれた閉曲面は混合型曲面であり, 光的点集合 LD の連結成分の個数は 2つ以上であることも示されている [44].

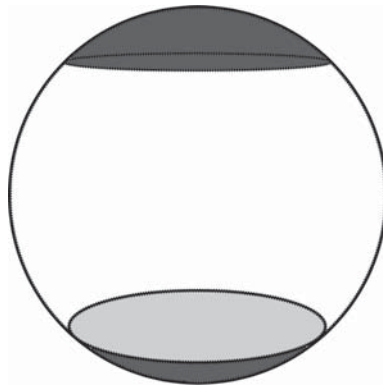


図 1: 3次元ユークリッド空間 \mathbf{R}^3 の単位球面 $S^2 = \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ は 3次元ミンコフスキー空間 \mathbf{R}_1^3 の凸な混合型閉曲面を与える.

2.2. 平均曲率零の混合型曲面

3次元ミンコフスキー空間 \mathbf{R}_1^3 のグラフ $z = \varphi(x, y)$ が

$$(1 - \varphi_x^2) \varphi_{yy} + 2\varphi_x \varphi_{xy} \varphi_y + \varphi_{xx} (1 - \varphi_y^2) = 0$$

¹ 第 1 基本形式と第 2 基本形式が比例する点を臍点という.

を満たすとき, $z = \varphi(x, y)$ は平均曲率零グラフ²³と呼ばれる. 3次元ユークリッド空間 \mathbf{R}^3 の極小曲面の場合, 「全平面で定義された極小グラフは平面に限る」という Bernstein の定理が成り立つ. 同様に, \mathbf{R}_1^3 の場合も, 全平面で定義された極大グラフ (つまり, 空間的な平均曲率零グラフ) は平面に限ることが Calabi により示された. しかし, 混合型の場合, 全平面で定義された混合型平均曲率零グラフで, 実解析的かつ平面でない例が存在する. [25] において与えられた

$$z = x \tanh y, \quad z = \log(\cosh x / \cosh y)$$

はそのような混合型平均曲率零グラフを与える. 近年, 全平面で定義された混合型平均曲率零グラフの系統的な構成法が [8] により与えられた (cf. [2]).

混合型の平均曲率零曲面は近年盛んに研究されている [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 13, 24]. 平均曲率零曲面は流体力学においても興味深い対象であり, 型変化は音速から超音速への流れ関数の変化に対応することが知られている [6]. また, 混合型の零でない平均曲率一定超曲面は存在しない [20].

3. 光的点におけるガウス曲率の挙動

本節では, 混合型曲面の非退化な光的点におけるガウス曲率の挙動を調べた結果を紹介する. まず, カスプ辺をモデルとした光的点である **第1種光的点**を導入する. さらに, 第2種光的点 (第1種でない非退化光的点) の特別なクラスである L_3 -点も定義する. L_3 -点はツバメの尾をモデルとした光的点である. その後, 第1種光的点における不変量として, **光的特異曲率**, **光的法曲率**を導入し, それらがガウス曲率の有界性や曲面の形状に大きく影響することを示す. さらに, 有界なガウス曲率を持つ混合型曲面に対する Gauss-Bonnet 型の定理が成り立つことを紹介する.

3.1. 第1種光的点, L_3 -点

$f: \Sigma \rightarrow M^3$ を混合型曲面とする. Σ の座標近傍 $(U; u, v)$ において, $E := \langle f_u, f_u \rangle$, $F := \langle f_u, f_v \rangle$, $G := \langle f_v, f_v \rangle$ とおくと, 第1基本形式 ds^2 は

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

と表される. 関数 λ を

$$\lambda := EG - F^2$$

とおく. 点 $p \in U$ が光的点 (resp. 空間的点, 時間的点) であることと, $\lambda(p) = 0$ (resp. $\lambda(p) > 0$, $\lambda(p) < 0$) は同値である. $d\lambda(p) \neq 0$ である光的点 $p \in LD$ を **非退化** と呼ぶ. このとき,

- 陰関数定理より, ある正数 $\varepsilon > 0$ と Σ の正則曲線 $\gamma(t)$ ($|t| < \varepsilon$) で $\gamma(0) = p$ かつ LD は p の近傍で $\gamma(t)$ によりパラメトライズされるようなものが存在する. $\gamma(t)$ を特性曲線と呼ぶ.
- 一方, $\gamma(t)$ に沿うベクトル場 $\eta(t)$ で $L(t) := df(\eta(t))$ は M^3 の光的ベクトル場を与えるものが存在する. $\eta(t)$ を特性曲線 $\gamma(t)$ に沿う退化ベクトル場と呼ぶ.

²非光的点集合 Σ_* 上では, 平均曲率零グラフは $H = 0$ を満たす.

³曲面 $f: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}_1^3$ が適当な合同変換を施したのちに局所的に平均曲率零グラフで与えられるとき, 平均曲率零曲面と呼ばれる.

定義 2. 非退化な光的点 $p \in LD$ に対して, $\gamma(t)$ ($|t| < \varepsilon$) を $p = \gamma(0)$ を通る特性曲線, $\eta(t)$ を $\gamma(t)$ に沿う退化ベクトル場とする. このとき,

- $\gamma'(0)$ と $\eta(0)$ が 1 次独立であるとき, p を **第 1 種光的点**⁴ と呼ぶ. そうでないとき, p を **第 2 種** と呼ぶ.
- $\delta(t) := \det(\gamma'(t), \eta(t))$ とおくとき, $p = \gamma(0)$ が第 1 種 (resp. 第 2 種) であるための必要十分条件は $\delta(0) \neq 0$ (resp. $\delta(0) = 0$) で与えられる. 非退化な光的点 $p \in LD$ が

$$\delta(0) = 0, \quad \delta'(0) \neq 0$$

を満たすとき, L_3 -点⁵ と呼ぶ.

特性曲線 $\gamma(t)$ の f による像を $\hat{\gamma}(t) := (f \circ \gamma)(t)$ とおくと, M^3 の正則曲線である. このとき, p が第 1 種 (resp. 第 2 種) であることと $\hat{\gamma}'(0) \in T_{f(p)}M$ が空間的 (resp. 光的) であることが同値である. p が第 1 種光的点であるとき, ある正数 $\varepsilon > 0$ が存在して, 任意の $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ に対して $\gamma(t)$ も第 1 種光的点となる. つまり, $\hat{\gamma}(t)$ ($|t| < \varepsilon$) は M^3 の空間的な正則曲線である.

注意 3 (平均曲率の光的点における有界性と光的点の型). 一般に, 第 2 種光的点 $p \in LD$ に対し, $\hat{\gamma}'(0) \in T_{f(p)}M$ は光的であるが, $t \neq 0$ のとき $\hat{\gamma}'(t)$ は光的かどうかはわからない. ある正数 $\varepsilon > 0$ が存在して, 任意の $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ に対して $\hat{\gamma}(t)$ ($|t| < \varepsilon$) は M^3 の光的な正則曲線であるとき, p を L_∞ -点 と呼ぶ. 非退化な光的点 $p \in LD$ が L_∞ -点 であるための必要十分条件は, 任意の $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ に対して $\gamma'(t)$ と $\eta(t)$ が 1 次従属, つまり $\delta(t) \equiv 0$ となるような正数 $\varepsilon > 0$ が存在することである. 次の事実が知られている ([20, Proposition 3.5], [46]):

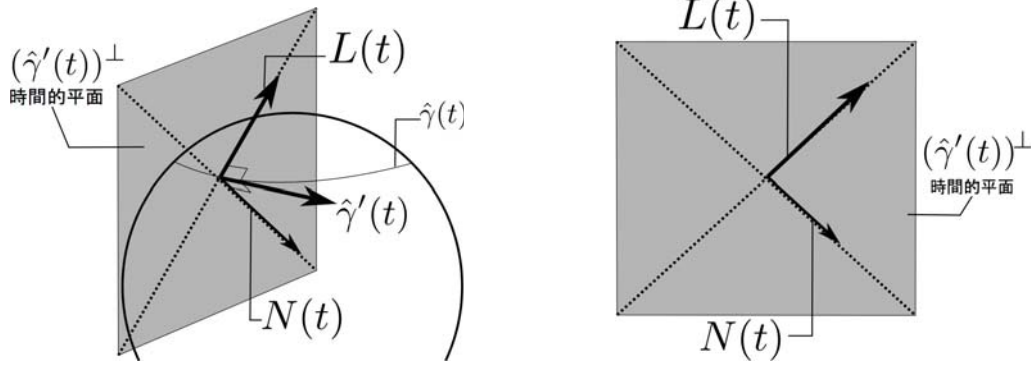
$f: \Sigma \rightarrow M^3$ を混合型曲面, $p \in LD$ を非退化な光的点とする. もし, 平均曲率 H が p の近傍で有界ならば, p は L_∞ -点 である.

とくに, 平均曲率零曲面の非退化な光的点は L_∞ -点 である. また, ローレンツ多様体内の平均曲率が有界である超曲面の光的点, とくに, 非退化でない場合の光的点の構造が [46] において調べられている.

3.2. 第 1 種光的点の不変量

$p \in LD$ を第 1 種光的点, $\gamma(t)$ ($|t| < \varepsilon$) を $p = \gamma(0)$ を通る特性曲線とする. 必要ならば $\varepsilon > 0$ を十分小さくとることで, 一般性を失わずに, 任意の $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ に対して $\gamma(t)$ は第 1 種光的点であると仮定してよい. このとき, $\gamma(t)$ の f による像 $\hat{\gamma}(t) := (f \circ \gamma)(t)$ ($|t| < \varepsilon$) は M^3 の空間的曲線なので, t を弧長パラメータに取り直すことができる.

- 各 t において $\hat{\gamma}'(t) (\in T_{\hat{\gamma}(t)}M^3)$ は空間的ベクトルなので, $\hat{\gamma}'(t)$ の直交補空間 $(\hat{\gamma}'(t))^\perp$ は $T_{\hat{\gamma}(t)}M^3$ の時間的な 2 次元部分空間である.
- $L(t) = df(\eta(t))$ は $\hat{\gamma}'(t)$ に直交する M^3 の光的ベクトルなので, $L(t) \in (\hat{\gamma}'(t))^\perp$ である.
- このとき, $\hat{\gamma}(t)$ に沿う M^3 の光的ベクトル場 $N(t)$ で, $N(t) \in (\hat{\gamma}'(t))^\perp$ かつ $\langle N(t), L(t) \rangle = 1$ を満たすものが存在する.



光的点 $p \in LD$ において, $T_p\Sigma$ の退化ベクトル全体は1次元部分空間をなす. $p \in LD$ の近傍 U において定義されたベクトル場 η で, 各点 $q \in LD$ において $\eta_q \in T_q\Sigma$ は退化ベクトルを与える, つまり $L_q := df_q(\eta) \in T_{f(q)}M^3$ は光的ベクトルであるとき, $\eta \in \mathfrak{X}(U)$ を**退化ベクトル場**と呼ぶ.

補題 4 ([19, Proposition 2.6]). 光的点 $p \in LD$ が第1種光的点であるための必要十分条件は, $\eta_p \langle df(\eta), df(\eta) \rangle \neq 0$ で与えられる.

定義 5 ([19]). (M^3, h) の Levi-Civita 接続を ∇ で表す. 第1種光的点 $p \in LD$ に対して,

$$\begin{aligned} \kappa_L(p) &:= \frac{1}{(\eta_p \langle df(\eta), df(\eta) \rangle)^{\frac{1}{3}}} \langle \nabla_{d/dt} \hat{\gamma}'(0), L(0) \rangle, \\ \kappa_N(p) &:= (\eta_p \langle df(\eta), df(\eta) \rangle)^{\frac{1}{3}} \langle \nabla_{d/dt} \hat{\gamma}'(0), N(0) \rangle \end{aligned}$$

とおく. $\kappa_L(p)$ を**光的特異曲率**, $\kappa_N(p)$ を**光的法曲率**と呼ぶ.

光的特異曲率 κ_L や光的法曲率 κ_N は $\gamma(t)$ や η のとり方に依らず定まる第1種光的点における不変量である. 光的特異曲率 κ_L と光的法曲率 κ_N は, [40] で導入されたカस्प辺に対する幾何学的不変量の特異曲率 κ_s , 極限法曲率 κ_ν にそれぞれ対応している. 特に, κ_L は κ_s に類似の性質を持つことを示すことができる. 例えば, κ_s は第1基本形式のみで表すことができる内的不変量であるが ([40, Proposition 1.18] を参照), κ_L も内的不変量である. また, [40, Corollary 1.14] で示されたように, κ_s はツバメの尾において $-\infty$ に発散するが, 同様のことが成り立つ.

定理 6 ([19, Theorem A]). 第2種光的点 $p \in LD$ に対して, 第1種光的点からなる点列 $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ で $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p$ とする. このとき, 光的特異曲率 κ_L は $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ に沿って $-\infty$ に発散する. さらに, もし p が L_3 -点でない第2種光的点ならば, 光的法曲率 κ_N も $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ に沿って $-\infty$ に発散する.

3.3. ガウス曲率の挙動

$p \in LD$ を第1種光的点とする. このとき, p の座標近傍 $(U; u, v)$ で, u -軸が光的点集合であり, $(\eta :=) \partial_v$ が退化ベクトル場であるようなものが存在する. このような座標系 (u, v) を**適合的 (adapted)** と呼ぶ. 適合的な座標系において, $ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$

⁴ 第1種光的点はカस्प辺をモデルとしている. 例えば [26], [33, 14] を参照.

⁵ L_3 -点はツバメの尾をモデルとしている. 例えば [26], [14] を参照.

と表すとき,

$$\kappa_B(p) := \frac{-1}{2E^2(G_v)^{\frac{5}{3}}} \left(G_v (E (E_{vv} - 2F_{uv}) + E_u F_v) - \frac{1}{5} E_v (EG_{vv} - 2(F_v)^2) \right) \Big|_{(u,v)=(0,0)}$$

は適合的な座標系 (u, v) のとり方によらない. κ_B を**平衡曲率** (balancing curvature) と呼ぶ.

定理 7 ([19, Theorem B]). $f : \Sigma \rightarrow M^3$ を混合型曲面, $p \in LD$ を非退化な光的点とする. もし, ガウス曲率 K が p の近傍 U で有界ならば, p は第1種光的点である. さらに, $p \in LD$ を第1種光的点とすると, ガウス曲率 K が p の近傍 U で有界であるための必要十分条件は, U 内の特性曲線に沿って

$$\kappa_L = 0 \quad \text{かつ} \quad \kappa_N = \kappa_B$$

が成り立つことである.

定理 7 の証明の概要を紹介する. まず, 次のような特別な座標系の存在を示す:

補題 8. $f : \Sigma \rightarrow M^3$ を混合型曲面, $p \in LD$ を第1種光的点とする. このとき, p の座標近傍 $(U; u, v)$ で, (u, v) は適合的であり, $E(u, 0) = 1$, $\lambda_v(u, 0) = 1$ を満たすものが存在する. ここで, $ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$ であり, $\lambda = EG - F^2$ とする.

補題 8 のような座標近傍 $(U; u, v)$ において

$$\hat{K} := \lambda^2 K$$

は U 上に滑らかなに延長される. さらに, ある滑らかな関数 $\Phi(u)$, $C_2(u, v)$ が存在して

$$\hat{K}(u, v) = -\frac{1}{2} \kappa_L(u) + \frac{1}{2} \{ \kappa_N(u) - \kappa_B(u) + \kappa_L(u) \Phi(u) \} v + \frac{1}{2!} C_2(u, v) v^2 \quad (3.1)$$

と表されることがわかる. 一方, $\lambda(u, v) = v \hat{\lambda}(u, v)$ ($\hat{\lambda} \neq 0$) と表されことから, 定理 7 の後半が従う. このことに定理 6 を組み合わせると, 定理 7 の前半も従う.

また, 式 (3.1) から, もし $\kappa_L(p) > 0$ ならば $\hat{K}(0, 0) < 0$ であることがわかる. ここで, $\hat{K} = \lambda^2 K$ なので, ガウス曲率 K の符号と \hat{K} の符号は一致する. さらに, M^3 が 3 次元ミンコフスキー空間 $M^3 = \mathbf{R}_1^3$ の場合, $\text{sgn}(K) = -\text{sgn}(K_{\text{Euc}})$ が成り立つ. ここで, K_{Euc} は曲面 $f : \Sigma \rightarrow \mathbf{R}_1^3$ をユークリッド空間 \mathbf{R}^3 の曲面とみなした際のガウス曲率としている. つまり, $\kappa_L(p)$ の正負と $K_{\text{Euc}}(0, 0)$ の正負は一致する.

系 9 ([19, Corollary 5.7]). 埋め込まれた混合型曲面 $f : \Sigma \rightarrow \mathbf{R}_1^3$ に対し, $p \in LD$ を第1種光的点とする. もし $\kappa_L(p)$ が正ならば, f の像は $f(p)$ の近くでお椀型である. 一方, $\kappa_L(p)$ が負ならば, f の像は $f(p)$ の近くで鞍状である.

第2種光的点に第1種光的点が集積している場合, 定理 6 より κ_L の符号は負である. したがって第2種光的点の近傍では曲面は鞍状であることがわかる.

また, Pelletier [36], Steller [42] により, ‘generic’ な計量で特異曲線が‘測地線’からなる場合には Gauss-Bonnet 型の定理が成り立つことが知られている. (詳細は [19] を参照.) 定理 7 から, ガウス曲率が有界ならばその仮定を満たすことがわかり, 以下を得る.

系 10 ([19, Corollary D]). Σ を連結で向きづけられた 2次元閉多様体, $f: \Sigma \rightarrow M^3$ を混合型曲面とする. もし, f の全ての光的点が非退化であり, f が有界なガウス曲率を持つならば,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} K dA = \chi(\Sigma)$$

が成り立つ. ここで, $\chi(\Sigma)$ は Σ のオイラー数を表す.

4. 不変量の内在性・外在性

本節では, 光的特異曲率と光的法曲率の内在性・外在性を議論する. 光的特異曲率は内的不変量である一方で, 光的法曲率は内的不変量である場合やそうでない場合がある. ここでは, 光的法曲率は

- 光的特異曲率が恒等的に消えるとき内的不変量であること (系 11),
- 光的特異曲率が消えずに実解析的である場合には外的不変量であること (系 12)

を紹介する.

4.1. 光的特異曲率の内在性

$f: \Sigma \rightarrow M^3$ を混合型曲面とする. 関数 $I: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}$, もしくは $I: LD \rightarrow \mathbf{R}$ を **不変量** という. つまり, I は Σ や LD の座標の取り方によらないものを指す. 不変量 $I: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}$, もしくは $I: LD \rightarrow \mathbf{R}$ が **内的** であるとは, I は E, F, G とその微分による関数で与えられるときをいう. ここで, $ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$ とし, (u, v) は ds^2 のみを用いて定まる座標系とする. 不変量 $I: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}$, もしくは $I: LD \rightarrow \mathbf{R}$ が **外的** であるとは, 別の混合型曲面 \tilde{f} が存在して, f と \tilde{f} は等長的 (つまり, $ds_f^2 = ds_{\tilde{f}}^2$) だが, $I(f) \neq I(\tilde{f})$ となるときをいう. 例えば, ガウス曲率 K は内的不変量であり, 平均曲率 H は外的不変量であることが知られている.

与えられた不変量が内的か外的かどうかを決定することは基本的な問題である. まず, 光的特異曲率 κ_L は内的である. 実際,

$$\kappa_L(u) = -\frac{E_v(u, 0)}{2E(u, 0)\sqrt[3]{G_v(u, 0)}} \quad (4.1)$$

と表される. ただし, (u, v) は適合的, つまり $\gamma(u) = (u, 0)$, $\eta = \partial_v$ を満たす座標系としている.

4.2. 光的法曲率の内在性・外在性

一方, 光的法曲率 κ_N は光的特異曲率の (4.1) のような表示を持たず, 内的か外的かどうかを同様に判定することはできない. しかし, ガウス曲率 K の漸近展開 (3.1) より, LD 上で $\kappa_L = 0$ ならば

$$\kappa_N(u) = \kappa_B(u) + 2\hat{K}_v(u, 0)$$

と表され, 補題 8 のような特殊な適合的座標 (u, v) は第一基本形式 ds^2 のみによって定まるものなので, 以下のことがわかる.

系 11 ([19, Corollary C]). 混合型曲面 $f: \Sigma \rightarrow M^3$ に対して, 光的点集合 LD は第 1 種光的点からなるとする. もし, LD 上で

$$\kappa_L = 0$$

が成り立つならば，光的法曲率 κ_N は内的不変量である．

系 11 の仮定を満たさない場合，つまり光的特異曲率 κ_L が消えない場合には，光的法曲率 κ_N は外的不変量であることがわかる．

系 12 ([18]). 実解析的な混合型曲面 $f: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}_1^3$ に対して， $p \in \Sigma$ を第 1 種光的点で

$$\kappa_L(p) \neq 0$$

を満たすとする．このとき，ある p の近傍 U と実解析的な混合型曲面 $\tilde{f}: U \rightarrow \mathbf{R}_1^3$ で， f と \tilde{f} は同じ第一基本形式を持つが， $\kappa_N(p) \neq \tilde{\kappa}_N(p)$ であるものが存在する．ただし， $\tilde{\kappa}_N$ は \tilde{f} の光的法曲率を表す．とくに，光的法曲率 κ_N は外的不変量である．

以下，この証明の概要を紹介する．

補題 13 ([18]). 混合型曲面 $f: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}_1^3$ に対して， $p \in \Sigma$ を第 1 種光的点とする．このとき，以下の条件を満たす p の座標近傍 $(U; u, v)$ が存在する：

- (u, v) は適合的，つまり p の近傍で u -軸は光的点集合 LD と一致し， $\eta = \partial_v$ は退化ベクトル場を与える，
- (u, v) は直交座標系，つまり $(F =) \langle f_u, f_v \rangle = 0$ が成り立つ，かつ
- 光的点集合の像からなる \mathbf{R}_1^3 の空間的な正則曲線 $\hat{\gamma}(u) := f(u, 0)$ は弧長パラメータ表示である，つまり $\langle \hat{\gamma}'(u), \hat{\gamma}'(u) \rangle = E(u, 0) = 1$ である．

このとき，ある U 上の f に沿うベクトル場 ψ で

$$\langle \psi, f_u \rangle = \langle \psi, \psi \rangle = 0, \quad \langle \psi, f_v \rangle = 1$$

を満たすものが存在する．(ψ を **L-ガウス写像** と呼ぶ．)

このとき， $\mathcal{F} := (f_u, f_v, \psi)$ は f に沿う \mathbf{R}_1^3 のフレームを与える．L-ガウス写像 ψ に対し， $A := \langle f_{uu}, \psi \rangle$ ， $B := \langle f_{uv}, \psi \rangle$ ， $C := \langle f_{vv}, \psi \rangle$ とおくと， \mathcal{F} は次を満たす：

$$\mathcal{F}_u = \mathcal{F}U, \quad \mathcal{F}_v = \mathcal{F}V, \quad (4.2)$$

ただし

$$U := \begin{pmatrix} \frac{E_u}{2E} & \frac{E_v}{2E} & -\frac{A}{E} \\ A & B & 0 \\ -\frac{E_v}{2} - AG & \frac{G_u}{2} - BG & -B \end{pmatrix}, \quad V := \begin{pmatrix} \frac{E_v}{2E} & -\frac{G_u}{2E} & -\frac{B}{E} \\ B & C & 0 \\ \frac{G_u}{2} - BG & \frac{G_v}{2} - CG & -C \end{pmatrix}$$

とする．式 (4.2) の可積分条件 $\mathcal{U}_v - \mathcal{V}_u = [\mathcal{U}, \mathcal{V}]$ は

$$A_v - B_u = \frac{1}{2E} (E_v A - E_u B) + B^2 - AC \quad (\text{Cod1})$$

$$B_v - C_u = -\frac{1}{2E} (G_u A + E_v B) \quad (\text{Cod2})$$

$$E_{vv} + G_{uu} - \frac{E_u G_u + E_v^2}{2E} = 2G(AC - B^2) - G_v A + 2G_u B + E_v C \quad (\text{Gauss})$$

と同値である. 逆にこの偏微分方程式系 (Cod1), (Cod2), (Gauss) を解くことができれば混合型曲面を構成することができるという, 混合型曲面に対する曲面論の基本定理を示すことができる [18].

適的な座標近傍 $(U; u, v)$ において, $p = (0, 0)$ で $\kappa_L(p) \neq 0$ が成り立つならば $E_v(0, 0) \neq 0$ であることがわかる. このとき, (Gauss) は

$$C = \frac{1}{2GA - E_v} \left(E_{vv} + G_{uu} - \frac{E_u G_u + E_v^2}{2E} - G_v A + 2G_u B + 2GB^2 \right)$$

と書き直されることから, (Cod1), (Cod2) は未知関数 A, B に対する正規形の偏微分方程式系に変形することができる. これに Cauchy-Kowalevski の定理を適用し, 空間的曲線に対する曲線論の基本定理 [17] を用いることで次を得る.

定理 14 ([18]). 実解析的な混合型曲面 $f : \Sigma \rightarrow \mathbf{R}_1^3$ に対し, $p \in \Sigma$ を第1種光的点で $\kappa_L(p) \neq 0$ を満たすものとし, $\gamma(t)$ を $p (= \gamma(0))$ を通る特性曲線とする (ただし $|t|$ は十分小). さらに, I を $0 \in I$ を含む開区間, $\Gamma : I \rightarrow \mathbf{R}_1^3$ を実解析的な空間的曲線で $\Gamma(0) = \mathbf{0}$, かつ曲率ベクトルが零でないもの⁶とし, その像を $C := \Gamma(I)$ とおく. このとき, $p \in \Sigma$ の近傍 U と実解析的な混合型曲面 $\tilde{f} : U \rightarrow \mathbf{R}_1^3$ で, $\tilde{f}(p) = \mathbf{0}$ であり

- f と \tilde{f} は同じ第一基本形式を持ち,
- $\gamma(t)$ の \tilde{f} による像 $\text{Image}(\tilde{f} \circ \gamma)$ は Γ の像 C の部分集合である

ようなものが存在する. さらにそのような \tilde{f} は4つ存在する.

空間的曲線 $\Gamma : I \rightarrow \mathbf{R}_1^3$ を適切に選ぶことによって, 混合型曲面の非自明な局所等長変形が得られ, 系 12 が導かれる.

参考文献

- [1] E. Aguirre, V. Fernandez and J. Lafuente, *On the conformal geometry of transverse Riemann-Lorentz manifolds*, J. Geometry and Physics **57** (2007), 1541–1547.
- [2] S. Akamine, *Causal characters of zero mean curvature surfaces of Riemann-type in the Lorentz-Minkowski 3-space*, Kyushu J. Math. **71** (2017), 211–249.
- [3] B.L. Al'tshuler and A.O. Barvinski, *Quantum cosmology and physics of transitions with a change of spacetime signature*. Uspekhi Fiz. Nauk 166:5 (1996), 459.492; English transl. in Physics-Uspekhi 39, 429.
- [4] S. Fujimori, Y.W. Kim, S.-E. Koh, W. Rossman, H. Shin, H. Takahashi, M. Umehara, K. Yamada and S.-D. Yang, *Zero mean curvature surfaces in L^3 containing a light-like line*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **350** (2012), no. 21-22, 975–978.
- [5] S. Fujimori, W. Rossman, M. Umehara, K. Yamada and S.-D. Yang, *Embedded triply periodic zero mean curvature surfaces of mixed type in Lorentz-Minkowski 3-space*, Michigan Math. J. **63** (2014), no. 1, 189–207.
- [6] S. Fujimori, Y.W. Kim, S.-E. Koh, W. Rossman, H. Shin, M. Umehara, K. Yamada and S.-D. Yang, *Zero mean curvature surfaces in Lorentz-Minkowski 3-space and 2-dimensional fluid mechanics*, Math. J. Okayama Univ. **57** (2015), 173–200.
- [7] S. Fujimori, Y.W. Kim, S.-E. Koh, W. Rossman, H. Shin, M. Umehara, K. Yamada and S.-D. Yang, *Zero mean curvature surfaces in Lorentz-Minkowski 3-space which change type across a light-like line*, Osaka J. Math. **52** (2015), no. 1, 285–297.

⁶ 弧長パラメータ s に対する加速度ベクトル $d^2\Gamma/ds^2$ が零でないとき, Γ は曲率ベクトルが零でないという.

- [8] S. Fujimori, Y. Kawakami, M. Kokubu, W. Rossman, M. Umehara and K. Yamada, *Entire zero-mean curvature graphs of mixed type in Lorentz-Minkowski 3-space*, Q. J. Math. **67** (2016), no. 4, 801–837.
- [9] S. Fujimori, Y. Kawakami, M. Kokubu, W. Rossman, M. Umehara and K. Yamada, *Analytic extension of Jorge-Meeks type maximal surfaces in Lorentz-Minkowski 3-space*, Osaka J. Math. **54** (2017), no. 2, 249–272.
- [10] S. Fujimori, U. Hertrich-Jeromin, M. Kokubu, M. Umehara and K. Yamada, *Quadrics and Scherk towers*, Monatsh. Math. **186** (2018), no. 2, 249–279.
- [11] D. Genin, B. Khesin and S. Tabachnikov, *Geodesics on an ellipsoid in Minkowski space*. Enseign. Math. **53** (2007), 307–331.
- [12] R. Ghezzi and A.O. Remizov, *On a class of vector fields with discontinuities of divide-by-zero type and its applications to geodesics in singular metrics*, J. Dyn. Control Syst. **18** (2012), 135–158.
- [13] C.H. Gu, *The extremal surfaces in the 3-dimensional Minkowski space*, Acta Math. Sinica (N.S.) **1** (1985), 173–180.
- [14] M. Hasegawa, A. Honda, K. Naokawa, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Intrinsic properties of surfaces with singularities*, Internat. J. Math. **26** (2015), no. 4, 1540008, 34 pp.
- [15] A. Honda, K. Naokawa, M. Umehara and K. Yamada, *Isometric deformations of wave fronts at non-degenerate singular points*, Preprint, 2019, arXiv:1710.02999.
- [16] A. Honda, K. Naokawa, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Duality on generalized cuspidal edges preserving singular set images and first fundamental forms*, Preprint, 2019, arXiv:1906.02556.
- [17] A. Honda, *Fundamental theorem of spacelike curves in Lorentz-Minkowski space*, Preprint, 2019, arXiv:1905.03367.
- [18] A. Honda, *Isometric deformations of mixed type surfaces in Lorentz-Minkowski space*, in preparation.
- [19] A. Honda, K. Saji and K. Teramoto, *Mixed type surfaces with bounded Gaussian curvature in three-dimensional Lorentzian manifolds*, Preprint, 2018, arXiv:1811.11392.
- [20] A. Honda, M. Koiso, M. Kokubu, M. Umehara and K. Yamada, *Mixed type surfaces with bounded mean curvature in 3-dimensional space-times*, Differential Geometry and its Applications **52** (2017) 64–77.
- [21] S. Izumiya and F. Tari, *Self-adjoint operators on surfaces with a singular metric*, J. Dyn. Control Syst. **16** (2010), 329–353.
- [22] S. Izumiya and F. Tari, *Apparent contours in Minkowski 3-space and first order ordinary differential equations*, Nonlinearity **26** (2013), 911–932.
- [23] B. Khesin and S. Tabachnikov, *Pseudo-Riemannian geodesics and billiards*, Adv. Math. **221** (2009), 1364–1396
- [24] V.A. Klyachin, *Zero mean curvature surfaces of mixed type in Minkowski space*, Izv. Math. **67** (2003), 209–224.
- [25] O. Kobayashi, *Maximal surfaces in the 3-dimensional Minkowski space L^3* , Tokyo J. Math. **6** (1983), 297–309.
- [26] M. Kokubu, W. Rossman, K. Saji, M. Umehara, and K. Yamada, *Singularities of flat fronts in hyperbolic 3-space*, Pacific J. Math. **221** (2005), 303–351.
- [27] M. Kossowski, *Pseudo-Riemannian metrics singularities and the extendability of parallel transport*, Proc. Amer. Math. Soc. **99** (1987), 147–154.
- [28] M. Kossowski, *The Boy-Gauss-Bonnet theorems for C^∞ -singular surfaces with limiting tangent bundle*, Ann. Global Anal. Geom. **21** (2002), 19–29.

- [29] M. Kossowski and M. Kriele, *Smooth and discontinuous signature type change in general relativity*, *Class. Quantum Grav.* **10** (1993), 2363–2371.
- [30] M. Kossowski and M. Kriele, *Transverse, type changing, pseudo-Riemannian metrics and the extendability of geodesics*, *Proc. Roy. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys.* 444:1921 (1994), 297–306.
- [31] M. Kossowski and M. Kriele, *The Einstein equation for signature type changing space-times*, *Proc. Roy. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys.* 446:1926 (1994), 115–126.
- [32] L. F. Martins and K. Saji, *Geometric invariants of cuspidal edges*, *Canad. J. Math.* **68** (2016), no. 2, 445–462.
- [33] L. F. Martins, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Behavior of Gaussian curvature and mean curvature near non-degenerate singular points on wave fronts*, *Geometry and Topology of Manifold*, Springer Proc. in Math. & Stat. **154**, 2016, Springer, 247–282.
- [34] T. Miernowski, *Formes normales d’une métrique mixte analytique réelle générique*, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.* **16** (2007), 923–946.
- [35] K. Naokawa, M. Umehara and K. Yamada, *Isometric deformations of cuspidal edges*, *Tohoku Math. J. (2)* **68** (2016), 73–90.
- [36] F. Pelletier, *Pseudo métriques génériques et théorème de Gauss-Bonnet en dimension 2*, *Singularities and dynamical systems (Iraklion, 1983)*, 219–238, North-Holland Math. Stud., 103, North-Holland, Amsterdam, 1985.
- [37] A.O. Remizov, *Geodesics on 2-surfaces with pseudo-Riemannian metric: singularities of changes of signature*, *Mat. Sb.* 200:3 (2009), 75–94.
- [38] A.O. Remizov, *On the local and global properties of geodesics in pseudo-Riemannian metrics*, *Differential Geom. Appl.* **39** (2015), 36–58.
- [39] A.O. Remizov and F. Tari, *Singularities of the geodesic flow on surfaces with pseudo-Riemannian metrics*, *Geom. Dedicata* **185** (2016), 131–153.
- [40] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *The geometry of fronts*, *Ann. of Math. (2)* **169** (2009), 491–529.
- [41] A.D. Sakharov, *Cosmological transitions with changes in the signature of the metric*, *Zh. Eksper. Teor. Fiz.* 87:2 (8) (1984), 375–383. English transl. in *Soviet Phys. JETP* **60** (1984), 214–218.
- [42] M. Steller, *A Gauss-Bonnet formula for metrics with varying signature*, *Z. Anal. Anwend.* **25** (2006), no. 2, 143–162.
- [43] F. Tari, *Caustics of surfaces in the Minkowski 3-space*, *Q. J. Math.* **63** (2012), 189–209.
- [44] F. Tari, *Umbilics of surfaces in the Minkowski 3-space*, *J. Math. Soc. Japan* **65** (2013), 723–731.
- [45] M. Umehara and K. Yamada, *Surfaces with light-like points in Lorentz-Minkowski 3-space with applications*, In: Cañadas-Pinedo M., Flores J., Palomo F. (eds) *Lorentzian Geometry and Related Topics. GELOMA 2016*. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, pp 253–273 (2017), vol 211. Springer, Cham.
- [46] M. Umehara and K. Yamada, *Hypersurfaces with light-like points in a Lorentzian manifold*, to appear in the *Journal of Geometric Analysis*. <https://doi.org/10.1007/s12220-018-00118-7>

