

# Topological invariants and corner states for some Hamiltonians on a lattice

林 晋 (産業技術総合研究所・産総研特別研究員 PD)\*

## 概 要

物性物理学におけるトポロジカル物質の研究への応用を念頭に、ある種の自己共役作用素に対するトポロジーを考察する。(高次)トポロジカル絶縁体の研究と関連して、特に余次元2の角のある系特有のトポロジーを定義し、その性質等を議論する。

## 1. 背景

物性物理学において、トポロジーが重要な役割を果たしている。いわゆる(広義の)トポロジカル絶縁体物質には、系の次元と対称性で分類されるトポロジー(位相不変量)が内在する。これらの物質はバルク<sup>1</sup>は絶縁体であるが、このトポロジーを反映して現れる表面に局在した波動関数(エッジ状態)により表面がある種金属的に振る舞うという際立った物性を示す。位相不変量がある種の連続変形に対して不変なことに対応して、金属的な振る舞いを記述するエッジ状態は系の摂動に対して頑強である。トポロジカル絶縁体の先駆けとしてはKlitzingらによる量子ホール効果の発見がある。Thouless-Kohmoto-Nightingale-den Nijsは量子ホール効果の背後にあるトポロジーの存在を明らかにした[18]。上記のバルクのトポロジーとエッジ状態の対応関係はHatsugaiによって証明され[6]、バルク・エッジ対応と呼ばれている。その後Kane-Meleらによる量子スピンホール効果の提唱等を経て、トポロジカル物質と呼ばれる物質群が盛んに研究されている<sup>2</sup>。

数学の側ではBellissardらを中心として量子ホール効果に対して非可換幾何の手法を用いた研究が進められ[1]、特に系の並進対称性が破れたdisorderのある系の取り扱いが可能となっている。Kellendonk-Richter-Schultz-Baldesはこの手法をさらに展開し、disorderのある系に対してもバルク・エッジ対応の証明を与えた[10]。ここでのアイデアはToeplitz作用素に対する指数理論に着目することである(これらに関するまとまった文献として[14]を挙げておく)。

本講演では実際の物質が多様な形状を持つことに着目して、図2のように、二つのエッジの交差としての(余次元2の)コーナーのある系を考える。バルクと二つのエッジが絶縁体であるようなモデルにおいて、コーナーのある系特有の位相不変量を定義しその性質を調べる。その際のアイデアは四半面Toeplitz作用素と呼ばれるある作用素の指数理論に着目することである。次元と対称性で分類されるという従来のトポロジカル相

本研究は科研費(課題番号:JP17H06461, JP19K14545)の助成を受けたものである。

2010 Mathematics Subject Classification: 19K56, 47B35, 81V99

キーワード: Topologically protected corner states, Bulk-edge and corner correspondence,  $K$ -theory and index theory

\* 〒980-8577 宮城県仙台市青葉区片平2-1-1 東北大学原子分子材料科学高等研究機構内

e-mail: shin-hayashi@aist.go.jp

web: <https://staff.aist.go.jp/shin-hayashi/>

<sup>1</sup>物質があるとして、端の方をエッジ、内側をバルクという(図1)。

<sup>2</sup>トポロジカル絶縁体と狭義には量子スピンホール系を指す。その後広く用いられるようになった。

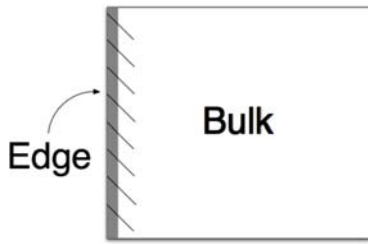


図 1: バルクとエッジ

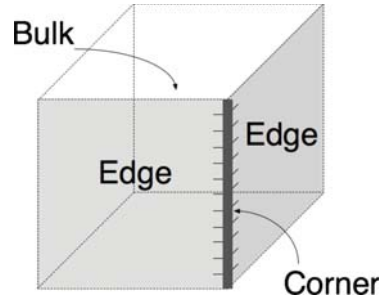


図 2: バルクとエッジとコーナー

のパラダイム<sup>3</sup>に対し、形状の観点を取り入れた議論を展開することがひとつの大きな目的である。

本稿ではまず Toeplitz 作用素とその変種について、定義といくつかの結果を述べる。次いで従来のトポロジカル相に対するバルク・エッジ対応の定式化と証明を Kellendonk–Richter–Schultz–Baldes のアイデアに基づいて紹介する<sup>4</sup>。続く章で [7, 8] をもとにコーナーのある系を議論する。コーナーに関連したトポロジーの定義とその基本的な性質、具体例の構成法を述べた後に、従来のトポロジカル相との関連や、近年提唱され活発に研究されている高次トポロジカル絶縁体への応用例などを紹介する。

## 2. Toeplitz 作用素とその変種

本稿では  $\mathbb{T}$  で複素平面の単位円を表し、反時計回りの向きを固定する。本稿で用いる  $C^*$  環やその  $K$  理論については [12] などを参照されたい。

### 2.1. Toeplitz 作用素

加法群としての  $\mathbb{Z}$  とその部分半群  $\mathbb{Z}_{\geq 0} := \{0, 1, 2, \dots\}$  を考える。  $\mathbb{T}$  上の複素数値連続関数  $f \in C(\mathbb{T})$  は各点  $t \in \mathbb{T}$  で  $f(t)$  を掛ける操作によって、  $L^2(\mathbb{T})$  上の有界線型作用素を定める。ここから Fourier 変換による Hilbert 空間の同型  $L^2(\mathbb{T}) \cong l^2(\mathbb{Z})$  を経由して得られる  $l^2(\mathbb{Z})$  上の作用素を  $M_f$  で表す。  $l^2(\mathbb{Z}_{\geq 0})$  上の有界線型作用素  $T_f$  を以下で定義する<sup>5</sup>。

$$T_f \varphi = (P_{\geq 0} M_f P_{\geq 0}) \varphi = P_{\geq 0} M_f \varphi, \quad \varphi \in l^2(\mathbb{Z}_{\geq 0}).$$

ここで  $P_{\geq 0}$  は  $l^2(\mathbb{Z})$  の閉部分空間  $l^2(\mathbb{Z}_{\geq 0})$  上への直交射影である。  $T_f$  は Toeplitz 作用素と呼ばれる。 Toeplitz 作用素の Fredholm 性とその指数について以下が成り立つ (例えば [12] を参照のこと)。

**定理 2.1.** (1)  $f$  が  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  に値を持つとき、  $T_f$  は Fredholm 作用素<sup>6</sup>。

(2) (Noether) このとき  $\text{index}(T_f) = -\text{Wind}(f)$ 。ただし  $\text{Wind}(f)$  は連続関数  $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  の 0 のまわりの回転数。

<sup>3</sup> Kitaev によって分類に  $K$  理論が用いられた [11, 5]

<sup>4</sup> 後で述べるように 2 次元クラス A と 1 次元クラス AIII と呼ばれるあるクラスの系に限っている。また並進対称性を保つ比較的簡単な系のみを扱い、その基本的なアイデアを紹介する。

<sup>5</sup> 直交射影  $P_{\geq 0}$  による  $M_f$  の compression で  $l^2(\mathbb{Z}_{\geq 0})$  上の作用素  $T_f$  を考える際、  $P_{\geq 0} M_f P_{\geq 0}$  と表記することが多い。本稿でもこの表記法を採用する。

<sup>6</sup> すなわち  $\text{Ker} T_f$  と  $\text{Coker} T_f$  が共に有限次元である。このとき Fredholm 指数が次で定義される。

$$\text{index}(T_f) := \text{rank}_{\mathbb{C}} \text{Ker} T_f - \text{rank}_{\mathbb{C}} \text{Coker} T_f$$

これらは  $C^*$  環の  $K$  理論を用いて以下のように理解できる.  $\mathcal{T}$  を Toeplitz 作用素たち  $\{T_f \mid f \in C(\mathbb{T})\}$  が生成する  $C^*$  環とする. このとき次の  $C^*$  環の短完全列が存在する.

$$0 \rightarrow \mathcal{K}(l^2(\mathbb{Z}_{\geq 0})) \rightarrow \mathcal{T} \xrightarrow{\gamma} C(\mathbb{T}) \rightarrow 0. \tag{1}$$

ここで  $\mathcal{K}(l^2(\mathbb{Z}_{\geq 0}))$  は  $l^2(\mathbb{Z}_{\geq 0})$  上のコンパクト作用素のなす  $C^*$  環で  $\mathcal{T}$  への射は包含写像,  $\gamma$  は Toeplitz 作用素  $T_f$  をそのシンボル  $f$  に写す  $*$ -準同型である. 定理 2.1(1) の仮定の下では,  $\gamma(T_f) = f$  に着目すると,  $T_f$  はコンパクト作用素を法として可逆であるから, Atkinson の定理から Fredholm であることがわかり, 定理 2.1(1) は直ちに従う. また, 短完全列 (1) に同伴して以下の  $C^*$  環の  $K$  理論の 6 項完全系列がある.

$$\begin{array}{ccccc} K_1(\mathcal{K}(l^2(\mathbb{Z}_{\geq 0}))) & \longrightarrow & K_1(\mathcal{T}) & \longrightarrow & K_1(C(\mathbb{T})) \\ \uparrow \partial_0 & & & & \downarrow \partial_1 \\ K_0(C(\mathbb{T})) & \longleftarrow & K_0(\mathcal{T}) & \longleftarrow & K_0(\mathcal{K}(l^2(\mathbb{Z}_{\geq 0}))) \end{array}$$

ここで  $\partial_0$  と  $\partial_1$  は境界準同型. また  $K_0(\mathcal{K}(l^2(\mathbb{Z}_{\geq 0})))$  は標準的なトレースが誘導する射  $K_0(\text{Tr}): K_0(\mathcal{K}(l^2(\mathbb{Z}_{\geq 0}))) \rightarrow \mathbb{Z}$  により  $\mathbb{Z}$  と同型である. 定理 2.1(2) は次の二つの (準) 同型の一致として理解できる.

- $K_0(\text{Tr}) \circ \partial_1: K_1(C(\mathbb{T})) \rightarrow \mathbb{Z}$ . この写像は  $\gamma(T_f)$  のクラスを  $\text{index}(T_f)$  に写す.
- $-\text{Wind}: K_1(C(\mathbb{T})) \rightarrow \mathbb{Z}$ . ここで  $K_1(C(\mathbb{T})) \cong K^1(\mathbb{T}) \cong [\mathbb{T}, \mathbf{U}(\infty)]$  で,  $\text{Wind}$  は  $\mathbb{T}$  から  $\mathbf{U}(\infty)$  への連続写像  $f$  に対し,  $\det(f)$  の回転数を対応させる.

### 2.2. Toeplitz 作用素の変種

$\alpha$  と  $\beta$  を  $\alpha < \beta$  なる二つの実数とする<sup>7</sup>. 正方格子  $\mathbb{Z}^2$  を二つの直線  $y = \alpha x$  と  $y = \beta x$  で “切る” ことでエッジまたはコーナーのモデルを導入する. 具体的に, 以下の  $\mathbb{Z}^2$  の部分集合  $A_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) を考える.

$$A_1 := \{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \mid -\alpha m + n \geq 0\}, \quad A_2 := \{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \mid -\beta m + n \leq 0\}$$

$$A_3 := \{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \mid -\alpha m + n \geq 0 \text{ and } -\beta m + n \leq 0\}$$

$l^2(\mathbb{Z}^2)$  の閉部分空間  $l^2(A_i)$  の上への直交射影を  $P_{A_i}$  で表す. 各  $i = 1, 2, 3$  に対して,  $l^2(A_i)$  をそれぞれ  $\mathcal{H}^\alpha, \mathcal{H}^\beta, \hat{\mathcal{H}}^{\alpha, \beta}$  と書き,  $P_{A_i}$  をそれぞれ  $P^\alpha, P^\beta, \hat{P}^{\alpha, \beta}$  と書く (図3を参照).

二次元トーラス上の複素数値連続関数  $f \in C(\mathbb{T}^2)$  は各点  $(\xi, t) \in \mathbb{T}^2$  で  $f(\xi, t)$  を掛ける操作によって,  $L^2(\mathbb{T}^2)$  上の有界線型作用素を定める. ここから Fourier 変換による同型  $L^2(\mathbb{T}^2) \cong l^2(\mathbb{Z}^2)$  を経由して得られる  $l^2(\mathbb{Z}^2)$  上の作用素を  $M_f$  で表す. このとき各  $i = 1, 2, 3$  に対して  $l^2(A_i)$  上の作用素  $T_f^{A_i} := P_{A_i} M_f P_{A_i}$  を考える. 各  $i = 1, 2, 3$  に対する  $T_f^{A_i}$  をそれぞれ  $T_f^\alpha, T_f^\beta, \hat{T}_f^{\alpha, \beta}$  と書く. 作用素  $T_f^\alpha, T_f^\beta$  は半平面 Toeplitz 作用素,  $\hat{T}_f^{\alpha, \beta}$  は四半面 Toeplitz 作用素と呼ばれる. 本稿で着目する四半面 Toeplitz 作用素は Simonenko[17], Douglas–Howe[4] らを中心に研究が進められた.

$\mathcal{T}^\alpha$  を半平面 Toeplitz 作用素たち  $\{T_f^\alpha \mid f \in C(\mathbb{T}^2)\}$  が生成する  $C^*$  環とする. 同様に  $C^*$  環  $\mathcal{T}^\beta, \hat{\mathcal{T}}^{\alpha, \beta}$  をそれぞれ  $T_f^\beta, \hat{T}_f^{\alpha, \beta}$  を用いて定義する. このとき  $\mathcal{T}^\alpha, \mathcal{T}^\beta$  から  $C(\mathbb{T}^2)$  へ, 半平面 Toeplitz 作用素  $T_f^\alpha, T_f^\beta$  に対して  $f$  を対応させる  $*$ -準同型  $\sigma^\alpha, \sigma^\beta$  がある.  $C^*$  環  $\mathcal{S}^{\alpha, \beta}$  をこの二つの  $*$ -準同型による引き戻しとして定義する.

$$\mathcal{S}^{\alpha, \beta} = \{(T^\alpha, T^\beta) \in \mathcal{T}^\alpha \oplus \mathcal{T}^\beta \mid \sigma^\alpha(T^\alpha) = \sigma^\beta(T^\beta)\}.$$

このとき以下の  $C^*$  環の短完全列が知られている.

<sup>7</sup> $\alpha = -\infty$  または  $\beta = +\infty$  も許す. ただし共に成り立つことはないものとする.

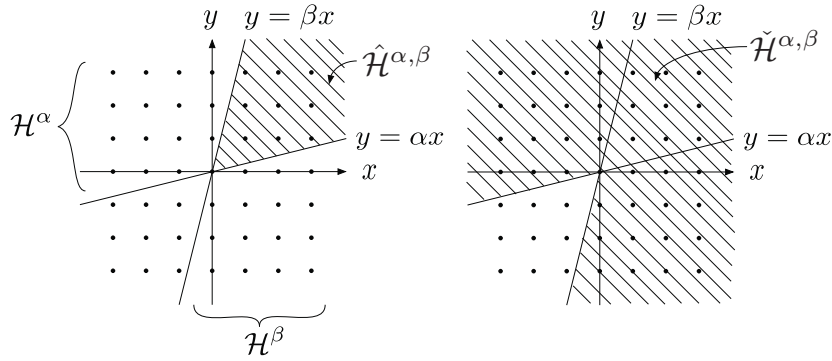


図 3: 四半面 (凸型の角, 左) と凹型角 (右)

定理 2.2 (Park[13]).

$$0 \rightarrow \mathcal{K}(\hat{\mathcal{H}}^{\alpha,\beta}) \rightarrow \hat{\mathcal{T}}^{\alpha,\beta} \xrightarrow{\hat{\gamma}} \mathcal{S}^{\alpha,\beta} \rightarrow 0. \tag{2}$$

ここで  $\mathcal{K}(\hat{\mathcal{H}}^{\alpha,\beta})$  から  $\hat{\mathcal{T}}^{\alpha,\beta}$  への射は包含写像,  $\hat{\gamma}$  は  $\hat{T}_f^{\alpha,\beta}$  をペア  $(T_f^\alpha, T_f^\beta)$  にうつす  $*$ -準同型である.

### 3. バルク・エッジ対応

ここでは Kellendonk–Richter–Schultz–Baldes[10] に基づき, バルク・エッジ対応の定式化と証明の概略を述べる. 5章の都合で, 2次元クラス A と 1次元クラス AIII と呼ばれるあるクラスのトポロジカル相を取り上げる (3章全体の参考文献として [14] を挙げておく). 以下,  $V$  を有限次元の複素内積空間とし,  $N$  でそのランクを表す.

#### 3.1. 2次元クラス A

連続写像  $\mathbb{T}^2 \rightarrow \text{Herm}(V)$ ,  $(\xi, t) \mapsto H^A(\xi, t)$  を考える<sup>8</sup>.  $\mathbb{T}^2$  の各点で  $H^A(\xi, t)$  を作用させる  $L^2(\mathbb{T}^2; V)$  上の作用素は, Fourier 変換を経由して  $l^2(\mathbb{Z}^2; V)$  上の有界線形自己共役作用素  $H^A$  を定める. 境界の無い無限系として  $\mathbb{Z}^2$  をバルクのモデルと見なし, ここでは  $H^A$  をバルクハミルトニアンという<sup>9</sup>. バルクがある種の絶縁体であるような系のハミルトニアンを念頭に置き, 次の仮定を置く.

仮定 3.1.  $H^A$  は可逆.

この仮定のもとに, 各点  $(\xi, t) \in \mathbb{T}^2$  に対し, エルミート作用素  $H^A(\xi, t)$  のスペクトル  $\text{sp}(H^A(\xi, t))$  は 0 を含まない. 従って, 各点で  $H^A(\xi, t)$  の負の固有値全てに対する固有空間の直和ベクトル空間  $E_B(\xi, t)$  を取り, パラメータ空間  $\mathbb{T}^2$  上でベクトル空間  $E_B(\xi, t)$  の族を考えると, 有限ランクの複素ベクトル束  $E_B \rightarrow \mathbb{T}^2$  が得られる.  $E_B$  は Bloch 束と呼ばれる. Bloch 束  $E_B$  の第一 Chern 数<sup>10</sup> をある種絶縁体的なバルクの不変量とみなし,

<sup>8</sup> ここで  $\text{Herm}(V)$  は  $V$  上のエルミート変換全体のなす空間.

<sup>9</sup> 例えば以下の形の  $l^2(\mathbb{Z}^2; V)$  上の有界自己共役作用素を考える (ここで  $l^2(\mathbb{Z}^2; V)$  の元  $\varphi = \{\varphi_{x,y}\}_{(x,y) \in \mathbb{Z}^2}$  は  $V$  の元  $\varphi_{x,y}$  の列で  $\sum_{x,y} \|\varphi_{x,y}\|_V^2 < \infty$  を満たすものとみなしている).

$$(H\varphi)_{x,y} = \sum_{\text{finite}} A_{p,q} \varphi_{x-p,y-q}, \quad (A_{p,q} \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V))$$

ただし (簡単のために) 有限個の  $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$  を除いて  $A_{p,q} = 0$  とする. このとき  $H$  は  $x$  と  $y$  方向の並進作用素と可換であり, Fourier 変換によって連続写像  $\mathbb{T}^2 \rightarrow \text{Herm}(V)$  を与え, 我々のモデルに含まれる. 例としては 1 粒子フェルミオンの tight-binding ハミルトニアンがある.

<sup>10</sup>  $\mathbb{T}^2$  の向きは二つの  $\mathbb{T}$  の向きの積で定める.

バルク指数と呼ぶ. この量は TKNN 数とも呼ばれている [18].

定義 3.2 (バルク指数, TKNN 数).  $\mathcal{I}_{\text{Bulk}}^{2D,A}(H^A) := \langle c_1(E_B), [\mathbb{T}^2] \rangle \in \mathbb{Z}$ .

バルクハミルトニアンを連続写像  $\mathbb{T}^2 \rightarrow \text{Herm}(V)$  の範囲内で連続変形するとき, 仮定 3.1 が保たれる限りは対応する Bloch 束は同型で, 従ってバルク指数は不変である.

次にエッジを考える. 部分 Fourier 変換によって  $H^A$  を  $\mathbb{T}$  でパラメータ付けされた  $l^2(\mathbb{Z}, V)$  上の有界自己共役線形作用素の族  $\{H^A(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$  に分解する. ここで Toeplitz 作用素の族  $\{H_{\text{Edge}}^A(t) := P_{\geq 0} H^A(t) P_{\geq 0}\}_{t \in \mathbb{T}}$  を考える<sup>11</sup>. これをエッジハミルトニアンと呼ぶ<sup>12</sup>. 仮定から, この族は  $\mathbb{T}$  でパラメータ付けされた自己共役 Fredholm 作用素の作用素ノルムに関する連続族である. この族のスペクトル流, すなわち族  $\{H_{\text{Edge}}^A(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$  のスペクトルと 0 の交叉を, 重複度と交叉の向きも込めて符号付きで数えたもの ( $\mathbb{T}$  の向きに対し, 0 と負から正に交わる交叉を +, 正から負に交わる交叉を - で数える), をエッジ指数と呼ぶ.

定義 3.3 (エッジ指数).  $\mathcal{I}_{\text{Edge}}^{2D,A}(H^A) := \text{sf}\{H_{\text{Edge}}^A(t)\}_{t \in \mathbb{T}} \in \mathbb{Z}$

各交点には, ある  $t \in \mathbb{T}$  について  $H_{\text{Edge}}^A(t)$  の固有値 0 の固有ベクトル (エッジ状態) が存在するので, エッジ指数はエッジ状態の個数を符号付きで数え上げたものと言える. エッジ指数が 0 でなければエッジ状態が存在することに注意する. 以上の準備のもとに, バルク・エッジ対応 (のトポロジ的な側面) は, 以下の定理で述べられる.

定理 3.4 (バルク・エッジ対応).  $\mathcal{I}_{\text{Bulk}}^{2D,A}(H^A) = \mathcal{I}_{\text{Edge}}^{2D,A}(H^A)$ .

従ってバルクのトポロジーを反映してトポロジカルなエッジ状態が現れる. バルク・エッジ対応の上記の定式化と証明は Hatsugai による [6]. ここでは Kellendonk–Richter–Schulz-Baldes [10] による Toeplitz 作用素の指数理論を用いた証明を紹介する. 次の図式に着目する.

$$\begin{array}{ccc} K_0(C(\mathbb{T}^2)) & \xrightarrow{\partial_0} & K_1(\mathcal{K}(l^2(\mathbb{Z}_{\geq 0})) \otimes C(\mathbb{T})) \\ & \searrow c_1 & \swarrow \text{sf} \\ & \mathbb{Z} & \end{array}$$

このとき状況は以下である.

- $K_0(C(\mathbb{T}^2))$  は 2次元トーラスの位相的  $K$  理論  $K^0(\mathbb{T}^2)$  と同型であり,  $\mathbb{T}^2$  上の有限ランク複素ベクトル束である Bloch 束  $E_B$  はこの  $K$  群の元  $[E_B]$  を定める.  $c_1$  は  $\mathbb{T}^2$  上の有限ランク複素ベクトル束にその第一 Chern 数を対応させる群準同型. 従って  $[E_B]$  の  $c_1$  による像はバルク指数  $\mathcal{I}_{\text{Bulk}}^{2D,A}(H^A)$  である.
- $l^2(\mathbb{Z}_{\geq 0})$  上の有界線型自己共役 Fredholm 作用素の全体空間の, トポロジカルに非自明な一つの連結成分を  $\text{Fred}_*^{s.a.}(l^2(\mathbb{Z}_{\geq 0}))$  と書く<sup>13</sup>.  $K_1(\mathcal{K}(l^2(\mathbb{Z}_{\geq 0})) \otimes C(\mathbb{T}))$  は,  $\mathbb{T}$  から  $\text{Fred}_*^{s.a.}(l^2(\mathbb{Z}_{\geq 0}))$  への連続写像のホモトピー類  $[\mathbb{T}, \text{Fred}_*^{s.a.}(l^2(\mathbb{Z}_{\geq 0}))]$  に同型であり, スペクトル流が与える  $\mathbb{Z}$  への写像  $\text{sf}$  がある. エッジハミルトニアン  $\{H_{\text{Edge}}^A(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$  はこの元を定め, 写像  $\text{sf}$  によってエッジ指数  $\mathcal{I}_{\text{Edge}}^{2D,A}(H^A)$  に写る.

<sup>11</sup> ここで記号の簡略化のために  $l^2(\mathbb{Z}_{>0}, V) \cong l^2(\mathbb{Z}_{\geq 0}) \otimes V$  上の作用素  $P_{\geq 0} \otimes 1_V$  を  $P_{\geq 0}$  と書く. 以下, 直交射影については同様の略記をする.

<sup>12</sup>  $H^A$  を  $\mathbb{Z}_{>0} \times \mathbb{Z}$  上に Dirichlet 境界条件を用いて制限する. エッジに沿う  $y$  軸方向には並進不変なので, その方向に部分 Fourier 変換したものが  $\{H_{\text{Edge}}^A(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$  である.

<sup>13</sup> 本質的スペクトルが  $(-\infty, 0)$  と  $(0, +\infty)$  のどちらにも含まれることのない  $l^2(\mathbb{Z}_{\geq 0})$  上の自己共役 Fredholm 作用素からなるもの. 作用素ノルムで位相を入れる. 位相的  $K^1$  群の分類空間をなす.

- $\partial_0$  は短完全列 (1) に  $C(\mathbb{T})$  をテンソルして得られる短完全列<sup>14</sup>に同伴する  $C^*$  環の  $K$  理論の境界準同型.

ここで上記の図式が可換であることから定理 3.4 が従う.

### 3.2. 1次元クラス AIII

本節では  $V$  がさらに  $\mathbb{Z}_2$ -次数を持つとする. すなわち複素線形写像  $\Pi: V \rightarrow V$  であって  $\Pi^2 = 1$  なるものが与えられたとする. 連続写像  $\mathbb{T} \rightarrow \text{Herm}(V)$ ,  $(\xi, t) \mapsto H^{\text{AIII}}(t)$  が Fourier 変換を経由して定める  $l^2(\mathbb{Z}; V)$  上の自己共役線形な作用素を  $H^{\text{AIII}}$  と書き, バルクハミルトニアンと呼ぶ.  $\Pi$  を  $l^2(\mathbb{Z}; V)$  上に各ファイバーへの作用によって拡張した作用素を再び  $\Pi$  で表すものとする. このとき次の仮定を置く,

仮定 3.5. (1)  $H^{\text{AIII}}$  は可逆. (2)  $H^{\text{AIII}}$  と  $\Pi$  は反可換.

最初の条件はバルクがある種の絶縁体なモデルの考察に対応する. 後者の条件は  $H^{\text{AIII}}$  がカイラル対称性と呼ばれるある種の量子力学的な対称性を保つ場合であり<sup>15</sup>,  $\Pi$  をカイラル作用素と呼ぶ. カイラル対称性により,  $H^{\text{AIII}}$  は次の off-diagonal な形に表される.

$$H^{\text{AIII}} = \begin{pmatrix} 0 & h^* \\ h & 0 \end{pmatrix}.$$

仮定 3.5(1) より  $h$  も可逆である. 連続写像  $\mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $t \mapsto \det(h(t))$  の回転数の  $-1$  倍をこの系のバルク指数と呼ぶ<sup>16</sup>.

定義 3.6 (バルク指数).  $\mathcal{I}_{\text{Bulk}}^{1D, \text{AIII}}(H^{\text{AIII}}) := -\text{Wind}(h)$ .

次に, エッジのモデルとして Toeplitz 作用素  $H_{\text{Edge}}^{\text{AIII}} := P_{\geq 0} H^{\text{AIII}} P_{\geq 0}$  を考え, エッジハミルトニアンと呼ぶ. エッジハミルトニアンは  $\Pi$  と反可換であり, 仮定から  $H_{\text{Edge}}^{\text{AIII}}$  やその off-diagonal 成分  $P_{\geq 0} h P_{\geq 0}$  は Fredholm 作用素である. この指数をエッジ指数と呼ぶ.

定義 3.7 (エッジ指数).  $\mathcal{I}_{\text{Edge}}^{1D, \text{AIII}}(H^{\text{AIII}}) := \text{index}(P_{\geq 0} h P_{\geq 0})$ .

$\Pi$  は  $H_{\text{Edge}}^{\text{AIII}}$  と反可換なため, 有限次元ベクトル空間  $\text{Ker}(H_{\text{Edge}}^{\text{AIII}})$  に作用し, その自乗は 1 である. エッジ指数は  $\Pi|_{\text{Ker}(H_{\text{Edge}}^{\text{AIII}})}$  の  $+1$  固有空間の次元から  $-1$  固有空間の次元を引いたものに一致する. 従ってエッジ指数は  $H_{\text{Edge}}^{\text{AIII}}$  の固有値 0 の固有ベクトル (エッジ状態) の個数を  $\Pi$  の作用による符号付きで数えたものであり, 特にエッジ指数が 0 でなければエッジ状態が存在する. このとき次が成り立つ.

定理 3.8 (バルク・エッジ対応).  $\mathcal{I}_{\text{Bulk}}^{1D, \text{AIII}}(H^{\text{AIII}}) = \mathcal{I}_{\text{Edge}}^{1D, \text{AIII}}(H^{\text{AIII}})$ .

これは定理 2.1 (2) の 3.2 節での議論から直ちに従う. 本稿ではバルク・エッジ対応 (定理 3.4, 3.8) により互いに等しい整数を, それぞれ  $\mathcal{I}^{2D, \text{A}}(H^{\text{A}})$  と  $\mathcal{I}^{1D, \text{AIII}}(H^{\text{AIII}})$  と表す.

## 4. コーナーのある系におけるトポロジーとバルクエッジ・コーナー対応

以下で図 2 のような余次元 2 の角を持つ系を議論する. 4, 5 章の内容は [7] に基づく.

<sup>14</sup>  $C(\mathbb{T})$  が可換  $C^*$  環なので完全性を保つ.

<sup>15</sup> カイラル対称性を保つ系は AIII というクラスに分類される. 特に対称性を要請しない 3.1 節のケースはクラス A に分類される [14].

<sup>16</sup> 仮定 3.5 から  $V$  は偶数次元でなければならないことに注意する.

#### 4.1. 設定

連続写像  $\mathbb{T}^3 \rightarrow \text{Herm}(V)$ ,  $(\xi, \eta, t) \mapsto H(\xi, \eta, t)$  から  $l^2(\mathbb{Z}^3; V)$  のバルクハミルトニアン  $H$  を考える. 余次元 2 の角を持つ系として図 2 のような系を考えたい. 部分 Fourier 変換によって  $l^2(\mathbb{Z}^2; V)$  上の作用素の族  $\{H(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$  を考える.  $\mathcal{H}_V^\alpha := \mathcal{H}^\alpha \otimes V$  と書き, 同様に  $\mathcal{H}_V^\beta, \hat{\mathcal{H}}_V^{\alpha, \beta}$  を定義する. これらの上へのバルクハミルトニアン  $H(t)$  の compression を取ることでエッジのモデルとコーナーのモデルを導入する. まずエッジのモデルを導入する:

$$H_{\text{Edge}}^\alpha(t) := P^\alpha H(t) P^\alpha: \mathcal{H}_V^\alpha \rightarrow \mathcal{H}_V^\alpha, \quad H_{\text{Edge}}^\beta(t) := P^\beta H(t) P^\beta: \mathcal{H}_V^\beta \rightarrow \mathcal{H}_V^\beta.$$

これらの有界自己共役作用素をエッジハミルトニアンと呼ぶ. 次にコーナーのモデルを導入する:

$$\hat{H}_{\text{Corner}}^{\alpha, \beta}(t) := \hat{P}^{\alpha, \beta} H(t) \hat{P}^{\alpha, \beta}: \hat{\mathcal{H}}_V^{\alpha, \beta} \rightarrow \hat{\mathcal{H}}_V^{\alpha, \beta}$$

$\hat{H}_{\text{Corner}}^{\alpha, \beta}(t)$  をコーナーハミルトニアンと呼ぶ.

本稿では以下の仮定を置き, その帰結を議論する.

**仮定 4.1.** 任意の  $t \in \mathbb{T}$  に対し, 二つのエッジハミルトニアン  $H_{\text{Edge}}^\alpha(t), H_{\text{Edge}}^\beta(t)$  は共に可逆であるとする.

この仮定のもとではバルクハミルトニアン  $H$  も可逆である. 従って我々が考察する状況はバルクも二つのエッジも絶縁体的な系をモデルとする. この仮定のもとに, 以下で二つの位相不変量を定義し, その性質や関係を議論する.

#### 4.2. バルクエッジ不変量

まず可逆な二つのエッジ (とバルク) ハミルトニアンを用いて位相不変量を定義する. 二つのエッジハミルトニアン  $H_{\text{Edge}}^\alpha(t)$  と  $H_{\text{Edge}}^\beta(t)$  はバルクハミルトニアン  $H(t)$  の compression として定義されたのであった. 従って  $\sigma^\alpha(H_{\text{Edge}}^\alpha(t)) = H(t) = \sigma^\beta(H_{\text{Edge}}^\beta(t))$  であり, ペア  $(H_{\text{Edge}}^\alpha(t), H_{\text{Edge}}^\beta(t))$  は  $M_N(\mathcal{S}^{\alpha, \beta})$  の元である. 連続関数  $g: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  を  $(-\infty, 0)$  の上では 1,  $(0, +\infty)$  の上では 0 なるものとする. このとき continuous functional calculus によって以下の射影元が得られる.

$$p := g(H_{\text{Edge}}^\alpha, H_{\text{Edge}}^\beta) \in M_N(\mathcal{S}^{\alpha, \beta} \otimes C(\mathbb{T})).$$

ここから位相不変量を以下の  $C^*$  環の  $K$  群の元として定義する<sup>17 18</sup>.

**定義 4.2** (バルクエッジ不変量).  $\mathcal{I}_{\text{BE}}^{3D, A}(H) := [p] \in K_0(\mathcal{S}^{\alpha, \beta} \otimes C(\mathbb{T})).$

#### 4.3. コーナー指数

次にコーナーハミルトニアンを用いて位相不変量を定義する. ここで,  $\hat{\gamma}(\hat{H}_{\text{Corner}}^{\alpha, \beta}(t)) = (H_{\text{Edge}}^\alpha(t), H_{\text{Edge}}^\beta(t))$  は仮定から  $M_N(\mathcal{S}^{\alpha, \beta})$  の可逆元であり, 従って定理 2.2 から  $\hat{H}_{\text{Corner}}^{\alpha, \beta}(t)$  は Fredholm 作用素であることがわかる. 自己共役 Fredholm 作用素の連続族  $\{\hat{H}_{\text{Corner}}^{\alpha, \beta}(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$  からスペクトル流によって整数値の位相不変量を得る. これをいまひとつの不変量と定義する.

<sup>17</sup>  $C^*$  環  $A$  に対し,  $K$  群  $K_0(A)$  は,  $A$  の行列環  $M_n(A)$  の射影元 (すなわち  $q \in M_n(A)$  で  $q = q^* = q^2$  なる元) たちの集合 ( $n$  は任意の自然数をとる) に適切に同値関係を入れて定義される [12].

<sup>18</sup> 3.1 節でバルク指数を与えた Bloch 束  $E_B$  は次のように理解できる.  $g(H^A)$  は  $M_N(C(\mathbb{T}^2))$  の射影元を定め, 従って  $C^*$  環の  $K$  群  $K_0(C(\mathbb{T}^2))$  の元を定める. この元は位相的  $K$  群との同型  $K_0(C(\mathbb{T}^2)) \cong K^0(\mathbb{T}^2)$  によって Bloch 束のクラス  $[E_B]$  に対応する. この意味でバルクエッジ不変量の定義は, Bloch 束が定める  $K^0(\mathbb{T}^2)$  の元の構成を真似たものである.

定義 4.3 (コーナー指数).  $\hat{\mathcal{I}}_{\text{Corner}}^{3D,A}(H) := \text{sf}\{\hat{H}_{\text{Corner}}^{\alpha,\beta}(t)\}_{t \in \mathbb{T}} \in \mathbb{Z}$ .

定義から  $\hat{\mathcal{I}}_{\text{Corner}}^{3D,A}(H)$  がゼロでなければコーナーハミルトニアン<sup>19</sup>の固有値0の固有ベクトル(コーナー状態)が存在する。従ってコーナー指数はコーナー状態の個数を符号付きで重複度も込めて数え上げたものである。

#### 4.4. 性質

短完全列 (2) に  $C(\mathbb{T})$  をテンソルして得られる短完全列に同伴するの  $C^*$  環の  $K$  理論の6項完全列の境界準同型  $\hat{\partial}_0: K_0(\mathcal{S}^{\alpha,\beta} \otimes C(\mathbb{T})) \rightarrow K_1(\mathcal{K}(\hat{\mathcal{H}}^{\alpha,\beta}) \otimes C(\mathbb{T}))$  を考える。上記の二つの位相不変量の間には以下の関係がある。

定理 4.4 (H. [7], バルクエッジ・コーナー対応).  $\text{sf} \circ \hat{\partial}_0(\mathcal{I}_{\text{BE}}^{3D,A}(H)) = \hat{\mathcal{I}}_{\text{Corner}}^{3D,A}(H)$ .

*Proof.* コーナーハミルトニアン  $\{\hat{H}_{\text{Corner}}^{\alpha,\beta}(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$  は  $[\mathbb{T}, \text{Fred}_*^{\text{s.a.}}(\hat{\mathcal{H}}^{\alpha,\beta})] \cong K_1(\mathcal{K}(\hat{\mathcal{H}}^{\alpha,\beta}) \otimes C(\mathbb{T}))$  の元を定める<sup>20</sup>。従って境界準同型  $\hat{\partial}_0$  によって  $\mathcal{I}_{\text{BE}}^{3D,A}(H)$  がこのクラスに写ることを確かめれば良い。これは境界準同型  $\hat{\partial}_0$  の定義から確認できる。□

従ってある種絶縁体的なバルクとエッジのトポロジを反映して、系の摂動に対して頑強なコーナー状態が現れ、コーナーがある種金属的に振る舞う。

注意 4.5. 本稿の議論は、バルクエッジ対応における [10] の議論に着目し、Toeplitz 作用素の代わりに四半面 Toeplitz 作用素を用いた議論を展開することで得られたものである。さらに余次元が大きな場合の取り扱いを可能にするある種の Toeplitz 作用素の指数理論は [4, 3] などで展開されている<sup>21</sup>。

注意 4.6. 我々の設定ではバルクハミルトニアンは可逆であるため、3.1 節と同様にバルクの不変量を考えることができる。具体的に、 $\mathbb{T}^3$  上の Bloch 束を 3.1 節と同様に定義し、Bloch 束が定める  $K^0(\mathbb{T}^3) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  の元を考える。一つの  $\mathbb{Z}$  は Bloch 束のランクに対応し、残りの三つの  $\mathbb{Z}$  に対応するバルクの不変量は (3次元クラス A の系の) 弱不変量と呼ばれる。我々の仮定の下では三つの弱不変量は全て 0 であることが証明できる [7]。この意味で、本稿のコーナーに関連したトポロジの考察は、従来のトポロジカル相のトポロジに対してある種二次的なトポロジの考察と位置付けられる。

## 5. 具体例の構成法

前節で定義したコーナーに関連した位相不変量の非自明な具体例の構成法を与える。本節では  $\alpha = 0, \beta = \infty$  とする。

$l^2(\mathbb{Z}^2, V_1)$  上の作用素  $H^A$  を 2次元クラス A のトポロジカル絶縁体のバルクハミルトニアン (3.1 節参照),  $l^2(\mathbb{Z}, V_2)$  上の作用素  $H^{\text{AIII}}$  を 1次元クラス AIII のトポロジカル絶縁体のバルクハミルトニアンでカイラル対称性は  $\Pi$  で与えられるもの (3.2 節参照) とする。ここで  $W = V_1 \otimes V_2$  とおく。これらを用いて以下の  $l^2(\mathbb{Z}^3, W)$  上の有界自己共役作用素を考察する。

$$H := H^A \otimes \Pi + 1 \otimes H^{\text{AIII}}.$$

Fourier 変換で  $l^2(\mathbb{Z}^2; W)$  上の作用素の族  $\{H(t) = H^A(t) \otimes \Pi + 1 \otimes H^{\text{AIII}}\}_{t \in \mathbb{T}}$  に分解する。

定理 5.1 (H. [7]). 上記のハミルトニアン  $H$  に対し、以下が成り立つ。

<sup>19</sup> ここでの記号は 3次元クラス A と呼ばれる系を考察していることを反映している

<sup>20</sup> ここで族  $\{\hat{H}_{\text{Corner}}^{\alpha,\beta}(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$  が  $\text{Fred}_*^{\text{s.a.}}(\hat{\mathcal{H}}^{\alpha,\beta})$  に入らない場合があり得るが、その場合は  $\mathcal{I}_{\text{BE}}^{3D,A}(H)$  も  $\hat{\mathcal{I}}_{\text{Corner}}^{3D,A}(H)$  も 0 である。ここでは自明な場合を除いて議論する。

<sup>21</sup> ただし余次元 2 の場合の結果 [13] と比較すると、この場合の角の形状は特別な形状に限られている。



- (1) 各  $t \in \mathbb{T}$  二つのエッジハミルトニアン  $H_{\text{Edge}}^0(t)$ ,  $H_{\text{Edge}}^\infty(t)$  は共に可逆.
- (2) (1) よりコーナー指数が定義される. コーナー指数は  $H^A$  と  $H^{\text{AIII}}$  のトポロジカル数を用いて  $\hat{I}_{\text{Corner}}^{3D,A}(H) = \mathcal{I}^{2D,A}(H^A) \cdot \mathcal{I}^{1D,\text{AIII}}(H^{\text{AIII}})$  で与えられる. ここで右辺は二つの整数の積.

*Proof.* (1) 各  $t \in \mathbb{T}$  に対し  $H_{\text{Edge}}^\infty(t)$  が可逆であることを示す. Hilbert 空間の同型  $\mathcal{H}_W^\infty \cong l^2(\mathbb{Z}_{\geq 0}; V_1) \otimes l^2(\mathbb{Z}; V_2)$  により,

$$H_{\text{Edge}}^\infty(t) = P^\infty H(t) P^\infty = H_{\text{Edge}}^A(t) \otimes \Pi + 1 \otimes H^{\text{AIII}}.$$

である. この二乗をとると,  $\Pi$  と  $H^{\text{AIII}}$  は反可換なので

$$(H_{\text{Edge}}^\infty(t))^2 = (H_{\text{Edge}}^A(t))^2 \otimes 1 + 1 \otimes (H^{\text{AIII}})^2.$$

$(H_{\text{Edge}}^A(t))^2 \geq 0$  と  $(H^{\text{AIII}})^2 > 0$  より  $(H_{\text{Edge}}^\infty(t))^2 > 0$ . 従って  $H_{\text{Edge}}^\infty(t)$  は可逆.  $H_{\text{Edge}}^0(t)$  の可逆性も同様の議論によって示される.

(2)  $H^A$  と  $H^{\text{AIII}}$  それぞれのエッジ状態  $\varphi_1 \in l^2(\mathbb{Z}_{\geq 0}; V_1)$  と  $\varphi_2 \in l^2(\mathbb{Z}_{\geq 0}; V_2)$  があつたとする. すなわち, ある  $t \in \mathbb{T}$  について  $H_{\text{Edge}}^A(t)\varphi_1 = 0$  と  $H_{\text{Edge}}^{\text{AIII}}\varphi_2 = 0$  が成り立つ. このとき

$$H_{\text{Corner}}^{0,\infty}(t)(\varphi_1 \otimes \varphi_2) = (H_{\text{Edge}}^A(t) \otimes \Pi + 1 \otimes H_{\text{Edge}}^{\text{AIII}})(\varphi_1 \otimes \varphi_2) = 0$$

であり,  $H^A$  と  $H^{\text{AIII}}$  それぞれのエッジ状態のテンソル積はコーナー状態を与える. 一方でここでのモデルではコーナー状態はエッジ状態のテンソル積の線形和として必ず表されることがわかる.  $H$  のコーナー状態の個数と  $H^A$ ,  $H^{\text{AIII}}$  のエッジ状態の個数を (符号に注意して) 比較することで (2) 式が得られる.  $\square$

定理 5.1 を用いることで, 従来のトポロジカル相二つから具体例を構成できる. 実際の具体例は [7, 8] などを参照されたい.

注意 5.2 (H. [8]). ここまでの議論はコーナーの角度が 180 度より小さい場合に限っているが, 図 3 右図のような角度が 180 度より大きな凹型角の場合も同様に考えることができる. この形状の角に対するある種の Toeplitz 作用素に対しても定理 2.2 と同様の結果が成り立ち, 仮定 4.1 の下で凹型角に対するコーナー指数が同様に定義される. ここで四半面 (凸型角) と凹型角のコーナー指数の間には  $-1$  倍の関係が成り立つことが示される. 従ってバルクハミルトニアンを固定して角の形状を変えることを考えるとき, コーナー指数は形状に応じて変化する.

## 6. 応用例: 高次トポロジカル絶縁体

トポロジカルなコーナー状態を持つ系は, 物性物理学では高次トポロジカル絶縁体と呼ばれ [15], 近年盛んに研究がなされている [2]. 本稿では 3 次元クラス A で余次元 2 のコーナーを持つ系を扱ったが, 2 次元で余次元 2 のコーナーを持ち, さらに 3.2 節のようにカイラル対称性を保つクラス AIII の系を考えると, 整数値のコーナー指数が定義され, コーナーに関連したトポロジーについて同様の理論を展開することができる [8]. 応用例として, Benalcazar–Bernevig–Hughes の 2 次元モデル [2] はカイラル対称性を含む複数の対称性を保ち, 実際にコーナー状態を持つが, このことを我々の手法で説明することができる. すなわち定理 5.1 と類似の定理を用いて, コーナー指数を実際に計算し, 非自明であることが確認できる. これによって [2] のモデルが持つコーナー状態の背後にあるトポロジーについて, カイラル対称性の役割が明らかとなった [8].

## 参考文献

- [1] J. Bellissard, A. van Elst, and H. Schulz-Baldes. The noncommutative geometry of the quantum Hall effect. *J. Math. Phys.*, 35(10):5373–5451, 1994. Topology and physics.
- [2] W. A. Benalcazar, B. A. Bernevig, and T. L. Hughes. Quantized electric multipole insulators. *Science*, 357:61–66, 2017.
- [3] R. G. Douglas. *Banach algebra techniques in the theory of Toeplitz operators*. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1973.
- [4] R. G. Douglas and R. Howe. On the  $C^*$ -algebra of Toeplitz operators on the quarter-plane. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 158:203–217, 1971.
- [5] D. S. Freed and G. W. Moore. Twisted equivariant matter. *Ann. Henri Poincaré*, 14(8):1927–2023, 2013.
- [6] Y. Hatsugai. Chern number and edge states in the integer quantum hall effect. *Phys. Rev. Lett.*, 71(22):3697–3700, 1993.
- [7] S. Hayashi. Topological Invariants and Corner States for Hamiltonians on a Three-Dimensional Lattice. *Comm. Math. Phys.*, 364(1):343–356, 2018.
- [8] S. Hayashi. Toeplitz operators on concave corners and topologically protected corner states. *Lett. Math. Phys.*, 2019, <https://doi.org/10.1007/s11005-019-01184-w>.
- [9] X. Jiang. On Fredholm operators in quarter-plane Toeplitz algebras. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 123(9):2823–2830, 1995.
- [10] J. Kellendonk, T. Richter, and H. Schulz-Baldes. Edge current channels and Chern numbers in the integer quantum Hall effect. *Rev. Math. Phys.*, 14(1):87–119, 2002.
- [11] A. Kitaev. Periodic table for topological insulators and superconductors. *AIP Conference Proceedings*, 1134(1):22–30, 2009.
- [12] G. J. Murphy.  *$C^*$ -algebras and operator theory*. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1990.
- [13] E. Park. Index theory and Toeplitz algebras on certain cones in  $\mathbf{Z}^2$ . *J. Operator Theory*, 23(1):125–146, 1990.
- [14] E. Prodan and H. Schulz-Baldes. *Bulk and boundary invariants for complex topological insulators*. Mathematical Physics Studies. Springer, 2016. From  $K$ -theory to physics.
- [15] F. Schindler, et al. Higher-order topological insulators. *Science Advances*, 4(6):eaat0346, 2018.
- [16] K. Shiozaki, M. Sato, and K. Gomi. Topological crystalline materials: General formulation, module structure, and wallpaper groups. *Phys. Rev. B*, pages 235425–1–54, 2017.
- [17] I. B. Simonenko. Convolution type operators in cones. *Mat. Sb. (N.S.)*, 74 (116):298–313, 1967.
- [18] D. J. Thouless, M. Kohmoto, M. P. Nightingale, and M. den Nijs. Quantized Hall conductance in a two-dimensional periodic potential. *Phys. Rev. Lett.*, 49:405–408, 1982.