曲面流について

横山 知郎　(京都教育大学 / 科学技術振興機構 さきがけ)*

概　要

本講演では曲面流についての話題を扱う．特に，トポロジカルな手法を用いることによって，曲面流のくわしい解析ができることを紹介する．実際，はじめに曲面流に関連するの低次元力学系の一般論を概説し，次に以下の4つの問題「曲面流がいつ稠密軌道を持つか?」「いつ曲面流が有限情報によって表現されるか?」「いつ軌道空間 (i.e. 軌道を一点に潰した商空間) から曲面流を復元できるか?」「いつ曲面流の非遊走集合が閉軌道の和集合の閉包と一致するか?」に関する主結果を解説し，Poincaŕe-Bendixson 定理の一般化と曲面流の分解に関する主結果を解説し，最後に流体現象への応用について議論する．

1. イントロダクション

1.1. 背景

A. Denjoy によって，Cantor 集合の形の極小集合を持つ円周上の C^1 級微分同相写像が構成された [7]．一方，円周上の C^2 級微分同相写像の極小集合は Cantor 集合とならないことが示された．この結果は，同相写像の懸垂という操作によって，トーラス上の C^1 級な流れに対する横断的に Cantor 集合である極小集合の存在と，トーラス上の C^2 級な流れに対する横断的に Cantor 集合である極小集合の非存在を導く．さらに，A. J. Schwartz によって，非存在の結果が任意のコンパクト曲面上の結果に拡張された [26]．すなわち，任意のコンパクト曲面上の C^2 級な流れも横断的に Cantor 集合である極小集合を持たないことが示された．

Poincaŕe-Bendixson 定理と呼ばれる様々な分野に広く応用されている以下の結果[1]が知られている [6, 20]: 平面上の領域上の C^2 級の流れに対して，空でない特異点を高々有限個含む ω-極限集合は閉軌道かリミットサーキット (i.e. 有限頂点のグラフかつ円周の像であるもの) である．この結果は，様々な拡張がされている．幾らかの結果をまとめると，以下の主張が成り立つ [1, 3, 4, 8, 12, 29]: コンパクト曲面上の有限個の特異点を持つ流れに対して，任意の点の ω-極限集合は，閉軌道，リミットサーキット，または，Q-集合 (i.e. 非自明な再帰的な軌道の閉包) である．

非自明な再帰的な軌道についてはさまざまな研究がなされている．例えば，Q-集合の存在については，A. G. Maĭer によって，向き付け可能な種数 g の曲面上の流れは高々g 個の Q-集合を持つことが示されている．他方，N. Markley によって，向き付け不可能な種数 p の曲面上の流れは高々$(p-1)/2$ 個の Q-集合を持つことが示されている．さらに，(非自明な再帰的な) 稠密な軌道の存在については，H. Marzougui と G. Soler López によって，コンパクト曲面上の面積保存流が稠密軌道を保つための必要十分条件が以下の3条件であることが示されている: 1) 周期軌道を持たない; 2) 特異点集合が

本研究は JST PRESTO JPMJPR16ED の支援を受けたものである．
2010 Mathematics Subject Classification: 37E35, 54B15
キーワード：曲面流, 軌道 (類) 空間, Poincaŕe-Bendixson 定理, 表現, 分解定理
* e-mail: tomoo@kyokyo-u.ac.jp
[1] ここでは，オリジナルの書き方ではなく，力学系の記述に書き換えた結果を述べている

内点を持たない; 3) 特異点とセパラトリクス (i.e. 特異点を繋ぐ軌道) のなす和集合の補集合が連結である．この結果を一般の曲面流への拡張については，主定理の一つとして次節で紹介する．

流れの微分可能性については，C. Gutierrez によって以下の事実が示されている [10]: 1) コンパクト曲面上の連続な流れは C^1 級な流れと位相同値である; 2) 横断的に Cantor 集合な形の極小集合がなければ C^∞ 級な流れと位相同値である．

曲面上の連続双曲力学系について，M. M. Peixoto による以下の結果が示されている [19][2]: 1) 向き付け可能なコンパクト曲面上の構造安定な流れは Morse-Smale 流である; 2) Morse-Smale 流のなす部分集合は流れの空間の中で C^1-位相に関して開かつ稠密である．ここで，曲面上の Morse-Smale 流とは以下の 2 条件をみたす流れのことである: 1) 非遊走集合が有限個の閉軌道の和集合で双曲的である; 2) 閉軌道の安定多様体と不安定多様体が横断的に交わっている．Andronov と Pontryagin によって，曲面上の流れが Morse-Smale 流であることは，以下の 3 条件に言い換えらることが示された [2]: 1) 閉軌道の和集合は有限個の双曲的な軌道からなる; 2) サドル繋ぐセパラトリクスが存在しない; 3) 全ての ω-極限集合 (resp. α-極限集合) は閉軌道である．また，構造安定であるとは，小さな摂動によって流れの位相的な性質が変化しないという性質である．

流れの表現可能性については，M. M. Peixoto が，曲面上の Morse-Smale 流の完全不変量を構成している [19]．さらに，I. Nikolaev が Peixoto の構成した Morse-Smale 流の完全不変量を簡約化して，Peixoto グラフと呼ばれる完全不変量を構成した [18]．言い換えると，曲面上の Morse-Smale 流の位相同値類と Peixoto グラフの間の 1 対 1 対応が構成された．そこで，曲面上の Morse-Smale 流の表現可能性を一般の曲面流について拡張した結果を，主定理の一つとして次節で紹介する．他方，Morse-Smale 流は流れのなす空間で開かつ稠密であることが知られているので，一見，曲面流の解析において他の流れを考える必要はあまりないように思われるかもしれない．しかし，様々な流体現象を考えるときに，非圧縮流はよく現れる．特に，自然現象を解析する場合に，ある種の対称性や一様性があると，3 次元の流れに付随した 2 次元の流れで，Morse-Smale 流でない非圧縮流に近い流れが現れる．実際，非圧縮曲面流の様々な研究が，流体力学と関連して行われてきた [5, 11, 17]．

1.2. 定義

1.2.1. 力学系に関する定義

本予稿において，曲面とは 2 次元多様体のこととする．流れとは，位相空間への $\mathbb{R}$ の連続な作用を意味する．言い換えると，位相空間 X に対して，写像 $v : X \times \mathbb{R} \to X$ が X 上の流れ (i.e. 連続力学系) とは，以下をみたすである: 任意の点 $x \in X$，実数 $s, t \in \mathbb{R}$ に対して $v(v(x,t),s) = v(x, s+t)$ かつ，$v(\cdot, 0)$ は X の恒等写像である．

以下では，v を曲面 S 上の流れとする．点 $x \in S$ について，$O(x) := v(x, \mathbb{R})$ を軌道 $O(x)$ と呼ぶ．点 $x \in S$ が特異点であるとは，その軌道が一点集合からなるものである (i.e. $O(x) = \{x\}$)．点 $x \in S$ が周期的であるとは，実数 $T > 0$ が存在して $v(x,T) = x$ かつ $x \notin v(x,(0,T))$ がなりたつことである．点 $x \in S$ が再帰的であると

[2] この Peixoto の論文内に向き付け可能という条件は書かれていないが，論文中の証明において，向き付け可能という条件が必要なことが指摘された．そのため，向き付け不可能な場合に対する主張は，Peixoto 予想と呼ばれている．特に，向き付け不可能な場合についても，Pugh's C^1-Closing Lemma によって，C^1-位相に関して稠密であることが示されている [21, 22]．また，向きづけ不可能な種数が 4 以下である場合は，Peixoto 予想が正しいことが示されている [9, 15]．

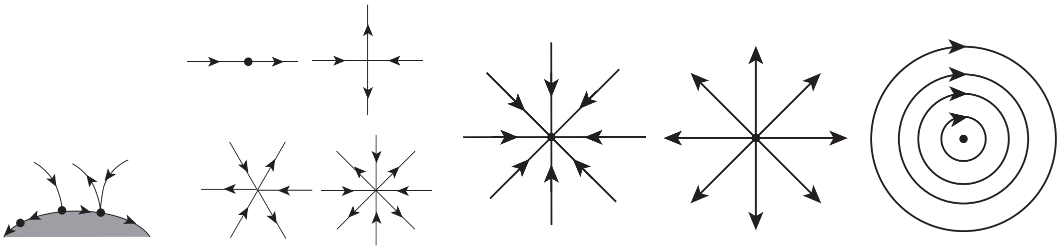

図 1: マルチサドル，シンク，ソース，センター

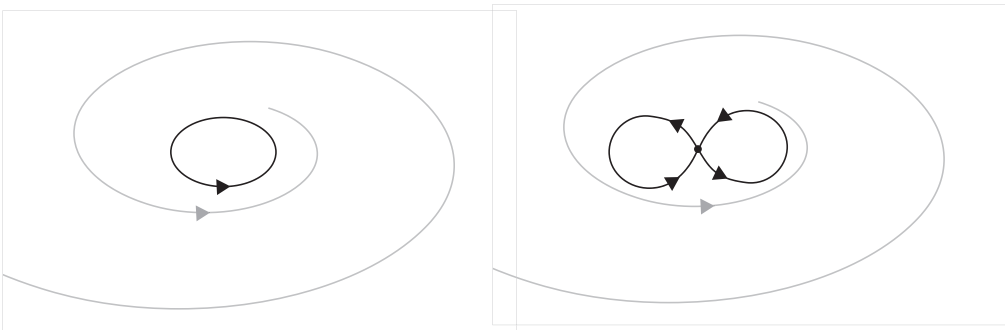

図 2: リミットサイクルとリミットサーキット

は，$x \in \omega(x) \cup \alpha(x)$ をみたすことである．ただし，$\omega(x) := \bigcap_{n\in\mathbb{R}} \overline{\{v(x,t) \mid t > n\}}$ は x の ω-極限集合，$\alpha(x) := \bigcap_{n\in\mathbb{R}} \overline{\{v(x,t) \mid t < n\}})$ は x の α-極限集合である．ただし，$\overline{A}$ は部分集合 A の閉包のことである．再帰的な点 $x \in S$ が非自明であるとは，x の軌道が閉でないことである．点 $x \in S$ が非遊走的であるとは，任意の x の近傍 U に対して $v(U,T) \cap U \neq \emptyset$ となる $T > 1$ が存在することである．周期的 (resp. 再帰的，非遊走的) な点 $x \in S$ の軌道 $O(x)$ を周期軌道 (resp. 再帰軌道，非遊走的) と呼ぶ．特異点の全体の成す集合を $\mathrm{Sing}(v)$，全ての周期軌道の和集合を $\mathrm{Per}(v)$，全ての閉でない再帰的な軌道の和集合を P と書く．さらに，軌道 $O(x)$ の ω-極限集合 (resp. α-極限集合) を $\omega(O(x)) = \omega(x)$ (resp. $\alpha(O(x)) := \alpha(x)$) と定める．特異点を繋ぐ非特異な軌道をセパラトリクスと呼ぶ．流れが擬正規 (resp. 正規) であるとは，各特異点がマルチサドル (resp. サドル)，シンク，ソース，センターであることである (図 1)．ただし，マルチサドル (resp. サドル) とは正の整数個 (reps. 4 本) のセパラトリクスを持つ孤立特異点，シンクとは吸引領域を持つ孤立特異点，ソースとは反発領域を持つ孤立特異点，センターとは閉軌道からなる近傍を持つ孤立特異点のことである．

非周期軌道 O' の α-極限集合か ω-極限集合である周期軌道 O をリミットサイクルと呼ぶ (i.e. $O = \alpha(O')$ または $O = \omega(O')$)．ω-極限集合 γ がリミットサーキットとは，リミットサイクルであるか，または以下をみたすことである: 1) γ は円周の連続写像の像である; 2) γ はセパラトリクスと有限個の特異点の和集合である．非周期的なリミットサーキットが完全とは，十分小さいメビウスの帯と同相な近傍を持つか，両側にそれぞれ吸引領域を持つことである (図 3 参照)[3]．集合 A が不変であるとは，任意の $t \in \mathbb{R}$ について，$v(A,t) = A$ が成り立つことである．

特異点が有限でない場合も扱うために，リミットサーキットや Q-集合の概念を拡張

[3] 正確な定義は [31] を参照ください．

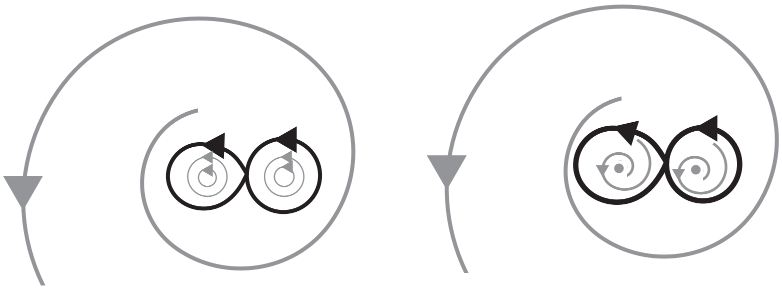

図 3: 完全でないリミットサーキットと完全リミットサーキット

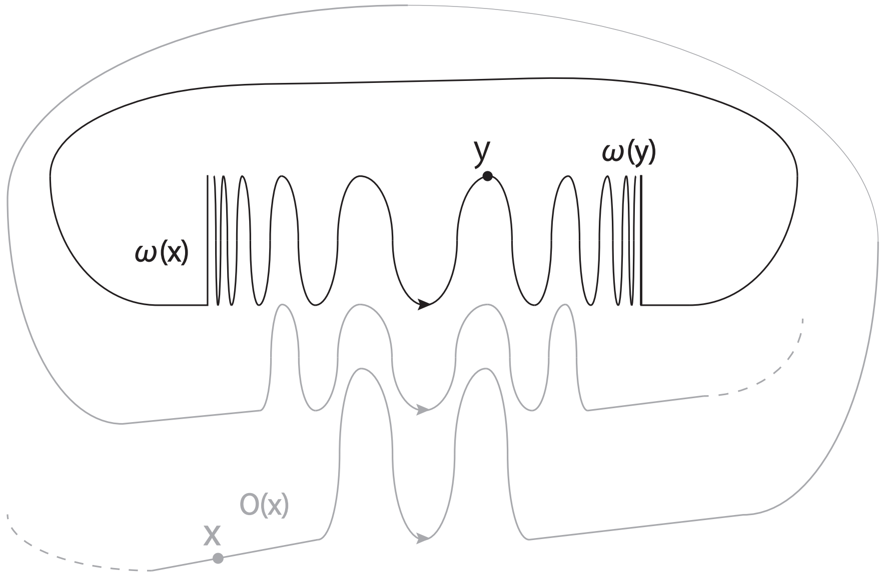

図 4: リミットサーキットでないがリミット擬サーキット $\omega(x)$ の例．実際，弧状連結でないので，$\omega(x)$ はリミットサーキットではない．

して，以下の2つの定義を導入する．連結不変閉集合がリミット擬サーキットとは，開円環の境界成分であり，非再帰的な軌道を含み，非再帰的な軌道と特異点の和集合であり，その集合に含まれない点の ω-極限集合または α-極限集合である．ω-極限集合 (resp. α-極限集合) が擬 Q-集合であるとは，本質的な横断的な単純閉曲線と無限回交わることである．ここで，本質的な曲線とは，曲面上で可縮でない曲線のことである．一般に，リミット擬サーキットはリミットサーキットと異なり，擬 Q-集合は Q-集合と異なるが，特異点が有限個しかない場合には，リミット擬サーキットはリミットサーキットであり，擬 Q-集合は Q-集合となることが示される．稠密な軌道を流れを位相推移的な流れと呼ぶ．流れ v と w が位相同値とは，v の軌道を w の軌道に移し，軌道の向きを保つ同相写像が存在することである．

1.2.2. トポロジーに関する定義

余次元1葉層構造の葉は真葉，局所稠密葉，例外葉のいずれかであることが知られている．これの類似として，以下が定義される．v の軌道 O が真であるとは，相対位相で O が閉となるような O の近傍が存在することである．軌道 O が局所稠密であるとは，閉包の内部が空でないことである．軌道 O が例外的であるとは，真でも局所稠密でな

いことである.「Cantor 集合は，コンパクト，距離付け可能，完全，完全非連結な空間である」という特徴付けにより，例外的な軌道の閉包は横断的に Cantor 集合であることが知られている．疎集合とは閉包が内点を含まない集合である．全ての局所稠密な軌道の和集合を LD，全ての例外的な軌道の和集合を E と書く．このとき，曲面 S は $S = \mathrm{Sing}(v) \sqcup \mathrm{Per}(v) \sqcup \mathrm{P} \sqcup \mathrm{LD} \sqcup \mathrm{E}$ という分解を持つ．ここで，$\sqcup$ は非連結和記号である．この分割により，P は全ての閉でなく真な軌道の和集合と一致している．ボーダー集合 Bd を以下で定める: $\mathrm{Bd} := \partial\,\mathrm{Sing}(v) \cup \partial\,\mathrm{Per}(v) \cup \partial\mathrm{P} \cup \partial\mathrm{LD} \cup \partial\mathrm{E} \cup \mathrm{P}_{\mathrm{sep}} \cup \partial_{\mathrm{Per}}$. ただし，$\partial A$ は集合 A の境界であり，$\mathrm{P}_{\mathrm{sep}}$ は内部 intP に含まれるマルチサドルとつながる軌道の和集合であり，∂_{Per} は境界成分である周期軌道である．

位相空間が T_0 分離公理をみたすとは，任意の異なる 2 点 x と y について，x と y のどちらか片方のみを含む開集合が存在することである．

2. 主結果

2.1. 位相推移性

第 1 の問い「曲面流がいつ稠密軌道を持つか?」に対して，以下の位相推移性の特徴づけがある．

定理 1 [29] コンパクト曲面上の流れが稠密軌道を持つための必要十分条件は以下の 3 条件である:

1. 全ての点が非遊走的である．
2. $\mathrm{Sing}(v) \sqcup \mathrm{P}$ の補集合は連結である．
3. 閉軌道の和集合は内点を持たない．

この結果は，背景で説明した H. Marzougui と G. Soler López の一般化になっている．実際，全ての点が非遊走的である場合，特異点とセパラトリクスのなす和集合が $\mathrm{Sing}(v) \sqcup \mathrm{P}$ と一致するためである．

2.2. 表現可能性

第 2 の問い「いつ曲面流が有限情報によって表現されるか?」に対して，ある種の有限ラベル付きグラフが，Morse-Smale 流や面積保存流 (i.e. 非圧縮流) などの重要な流れのクラスを含むクラスの完全不変量になっていることを示す．

有限表現の不可能性については，退化な特異点の種類は非加算個あり，トーラス上の極小流 (i.e. 全ての軌道が稠密) や Denjoy 流れと呼ばれる流れの位相同値類は非可算個であることが知られている．一方，このような非退化な特異点や非自明な再帰的な軌道がなく，リミットサイクルが有限個であれば，流れの数え上げるアルゴリズムが構成できる．すなわち，以下の主張が成り立つ．

定理 2 [31] 非自明な再帰的な軌道を持たず，退化な特異点を持たず，有限個のリミットサイクルしか持たない流れの同値類の集合を数え上げるアルゴリズムが存在する．

この結果は，Morse-Smale 曲面流の表現可能性を一般の曲面流について拡張したものである．

2.3. 軌道空間への単射性

第 3 の問い「いつ軌道空間から曲面流を復元できるか?」について．向き付け可能な閉曲面上のヘテロクリニックセパラトリクス (i.e. 異なるサドル間を繋ぐ軌道) と局所稠

密な軌道を持たない正則な流れは復元可能であることを示す．正確に述べるために，いくつか記号を導入する．向き付け可能な閉曲面 S 上のヘテロクリニックセパラトリクスと局所稠密な軌道を持たない正則な流れの全体のなす集合を χ とおく．集合 χ 上の同値類 $\sim$ を以下で定義する: $v \sim w$ とは，v の軌道を w の軌道に移す同相写像が存在することである．位相空間の全体のなす集合を同相写像という同値類で割った商空間を $\mathrm{TOP}/\sim$ で表す．このとき以下の単射性が成立する．

定理 3 [30] 流れの同値類 $[v]$ を軌道類空間の同値類 $[S/v]$ に対応させる写像 $\chi/\sim\ \to \mathrm{TOP}/\sim$ は単射である．

この事実を示すために，軌道類空間という空間を考えることが有効である．なぜなら，一般に軌道空間は T_0 空間にするならないためである．ここで，軌道類空間とは軌道の閉包が一致する点を潰した空間のことである．言い換えると，軌道類空間は軌道空間を位相空間の T_0 化という操作によって得られる空間である．そのため，軌道空間を直接扱うのではなく，より性質のよい軌道類空間を考察した．実際，χ に属する流れに対して，マルチサドル図式 (i.e. マルチサドルとそれを繋ぐセパラトリクスの和集合) の各連結成分を一点に潰すことにより，軌道類空間をさらに潰して得られる空間はマルチグラフになる [30]．

2.4. 非遊走集合の同値性

第 4 の問い「いつ曲面流の非遊走集合が閉軌道の和集合の閉包と一致するか?」に関して，擬正規な曲面流に対する必要十分条件を述べる．この同値性 $\overline{\mathrm{Cl}(v)} = \Omega(v)$ は双曲性の定義に現れる性質であるので，この同値性は双曲性がいつ成り立つかに関わる問いである．この問いへの回答は，非周期的な完全リミットサーキットの非存在と非自明な再帰的な軌道の非存在という必要条件が十分条件であるというものである．正確に述べると以下が成り立つ．

定理 4 [31] コンパクト曲面 S 上の擬正規な流れ v に対して，以下の条件は同値である:
1) $\mathrm{LD} \sqcup \mathrm{E} = \emptyset$ であり，非周期的な完全リミットサーキットが存在しない
2) $\overline{\mathrm{Cl}(v)} = \Omega(v)$.

上記の主張において擬正規性は必要である．言い換えると，一般に，$\overline{\mathrm{Cl}(v)} \subsetneq \Omega(v)$ が成り立つ．実際，コンパクト曲面 S 上の流れ v で，$\mathrm{LD} \sqcup \mathrm{E} = \emptyset$ and $\overline{\mathrm{Cl}(v)} \subsetneq \Omega(v)$ をみたすが，非周期的な完全リミットサーキットを持たないものがある (図 5 参照)[31]．

2.5. Poincaŕe-Bendixson 定理の任意の特異点集合を持つ曲面流に対する一般化

Poincaŕe-Bendixson 定理の有限性の仮定を取り除いた以下の一般化が成り立つ．

定理 5 [31] コンパクト連結曲面 S 上の流れに対して，閉でない軌道の ω-極限集合は，以下のどれか一つである:
1. 特異点からなる疎集合
2. リミットサイクル
3. リミット擬サーキット.
4. 局所稠密 Q-集合.
5. 局所稠密でない擬 Q-集合.

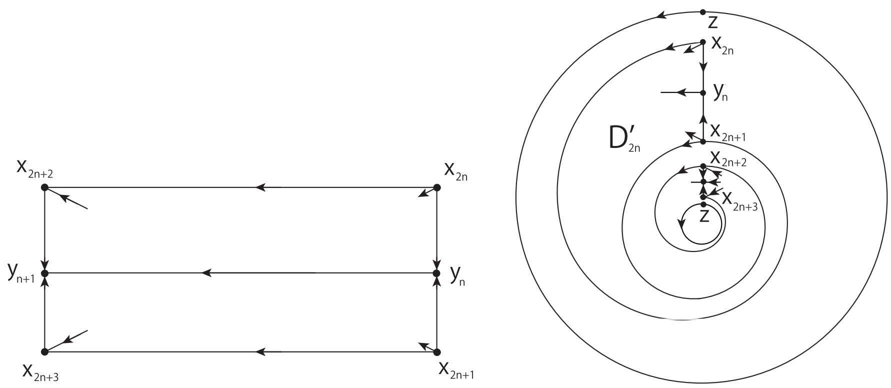

図 5: 開流れ箱 D'_{2n} と，擬正規性がないと定理の同値性が成り立たないことを示す例

講演者の知る限りでは，Poincaŕe-Bendixson 定理はさまざまな方向に一般化されているが，有限個の特異点を持つという条件を取り除いた一般化はされていない．そのため，この一般化は応用上有益な一般化である．例えば，これまでは，滑りなし境界条件付きの微分方程式の解には，直接 Poincaŕe-Bendixson 定理を適用することができなかった．他方，この任意の特異点集合を持つ曲面流に対する一般化によって，境界が止まっているような流れに対しても，Poincaŕe-Bendixson 定理が直接適用可能になる．

2.6. 曲面流の分解定理

種類の異なる軌道の境目に対応するボーダー集合 $\mathrm{Bd} = \partial\,\mathrm{Sing}(v) \cup \partial\,\mathrm{Per}(v) \cup \partial \mathrm{P} \cup \partial \mathrm{LD} \cup \partial \mathrm{E} \cup \mathrm{P}_{\mathrm{sep}} \cup \partial_{\mathrm{Per}}$ の補集合は以下のような流れに分類される．

定理 6 [31] コンパクト曲面 S 上の擬正規な流れ v に対して，補集合 $S - \mathrm{Bd}$ の各連結成分は以下のどれか一つである:

1. 非再帰的軌道からなる開流れ箱
2. 非再帰的軌道からなる開円環
3. 周期軌道からなる開円環
4. 周期軌道からなるトーラス
5. 周期軌道からなる Klein の壺
6. 周期軌道からなる Möbius の帯
7. 局所稠密な軌道からなる本質的な開部分集合

メビウスの帯と同相になる十分小さい近傍を持つ周期軌道の和集合を Per_1 と表す．このとき，以下の結果がえられる．

系 1 [31] コンパクト曲面 S 上の擬正規な流れ v に対して，補集合 $S - (\mathrm{Bd} \sqcup \mathrm{Per}_1)$ の各連結成分は以下のどれか一つである:

1. 非再帰的軌道からなる開流れ箱
2. 非再帰的軌道からなる開円環
3. 周期軌道からなる開円環
4. 周期軌道からなるトーラス
5. 局所稠密な軌道からなる本質的な開部分集合

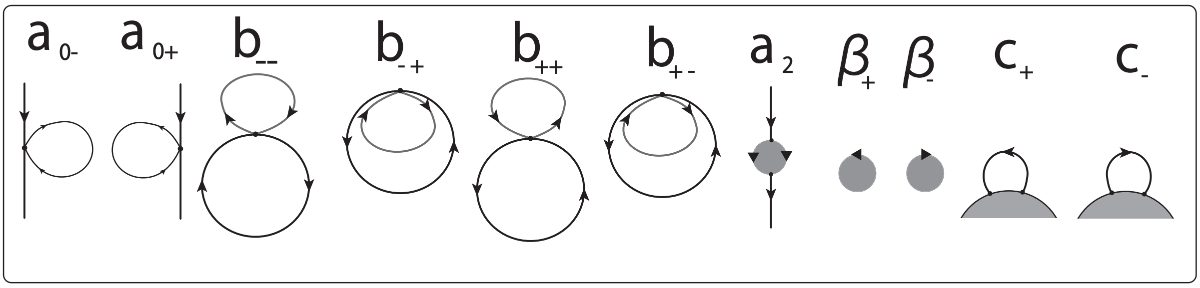

図 6: Hamiloton 流に対する語表現 (resp. 木表現) のすべての局所構造

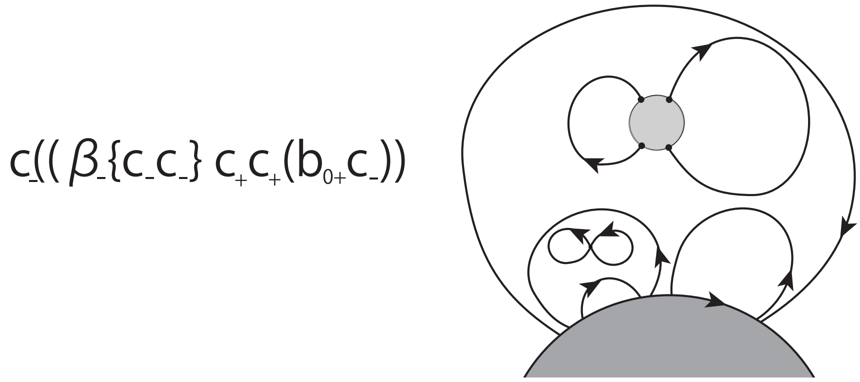

図 7: 有界な頂点における $\beta_{\pm}, c_{\pm}$ の並べ方の局所構造の例

3. 力学系的手法の流体現象への応用

この節では，力学系理論の流体現象への応用を扱う[4]．背景で述べたように，流体力学や微分方程式において，Morse-Smale 流でない非圧縮流に近い流れも重要な研究対象である．球面に含まれるコンパクト曲面では，非圧縮流は Hamlton 流と一致することが知られている．また，曲面上の Hamilton 流については，Morse 理論の類似が成り立つ．実際，T. Ma と S. Wang によって，以下の結果が示された [13]: コンパクト向き付け可能な曲面上の Hamlton 流の集合に制限した場合，流れが構造安定であるための必要十分条件は以下の 2 条件である: 1) 全ての特異点がセンターか (境界) サドルである; 2) 全てのセパラトリクスは自己連結的 (i.e. 同じサドルを繋ぐか，同じ境界上の境界サドルを繋ぐ) である．さらに，構造安定である流れが開かつ稠密部分集合をなす．他方，川の流れのように有界でない領域上の Hamilton 流も応用上重要な研究対象である．そこで，T. Ma と S. Wan の結果を非有界な多重連結領域上の Hamilton 流に拡張した [25]．さらに，多重連結領域上の構造安定な Hamilton 流に 1 対 1 に対応する木表現 (図 6 参照) を構成し，粗く性質を分類する多対 1 で対応する語表現を構成した [25, 32]． これらの表現を用いて，特異点の数を変えない変化において，一般に起こりえる全ての流れのトポロジーの遷移を記述し，その遷移グラフを構成した [24]．実際，語表現の遷移グラフはオートマトンを用いることで生成され，木表現の遷移グラフは正規木文法に円順序を付加した文法によって生成される．特に，特異点の数を 1 つ変える変化も有限種類しかないので，一般に起こる全ての流れの遷移を表す遷移グラフの構成が可能に

[4] この節で述べる流体現象への応用は，坂上 貴之氏 (京都大学)，横山 哲郎氏 (南山大学)，宇田 智紀氏 (東北大学)，藤堂 英樹氏 (中央学院大学) との共同研究に基づく．

なった．この遷移グラフを用いることで，多重連結領域上の時間変化する非圧縮流のトポロジーの変化をグラフ上のウォークとみなせる．例えば，これらの記号解析を用いて，翼の揚抗比の極大極小の推定や，時間変化する流れの中間状態の推定を，計算によって行えるようになった [23]．さらに，支配方程式の制約によって，時間変化する流れは遷移グラフの部分グラフ上のみを動く．そのため，支配方程式がわかっていない流体現象のグラフ上のウォークの性質から支配方程式を推定することに利用できる．

さらに，これら遷移グラフの構成するアルゴリズムの一部が実装されている．実際，パーシステントホモロジーを用いることにより，Hamlton 関数 (i.e. 高さ関数) を入力として，木表現を出力とするアルゴリズムが実装されているので，これについて講演の最後に解説する．このように，時間変化する流れを記号列に変換することにより，微分方程式のトポロジカルな性質をグラフ理論などの離散構造によって解析することが可能になった．さらに，流体画像からベクトル場のデータや Hamilton 関数を取り出す研究をしており，この画像解析の研究がうまく進めば，流体の動画を入力して，記号列に変換して流れの性質を解析することにより，流れの状態の把握や制御するために有益な情報を出力することが可能になる．

参考文献

[1] A. A. Andronov, E. A. Leontovich, I. I. Gordon, A.G. Maier, *Qualitative theory of dynamical systems of the second order*, Izdat. Nauka, Moscow 1966 p. 568.

[2] A. A. Andronov, L. S. Pontryagin, *Systèmes grossiers*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 14(1937), pp. 247–250.

[3] D. V. Anosov, I. U.Bronshtein, S. Kh. Aranson, V. Z. Grines, *Dynamical Systems I*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences 1, pp. 149–233, Springer, Berlin, 1988.

[4] S. Aranson, G. Belitsky, E. Zhuzhoma, *Introduction to Qualitative Theory of Dynamical Systems on Surfaces*, AMS, Math. Monogr., 1996, p. 331.

[5] H. Aref and M. Brøns, *On stagnation points and streamline topology in vortex flows*, J. Fluid Mech. **370** (1998) pp. 1–27.

[6] I. Bendixson, *Sur les courbes définies par des équations différentielles*, Acta Mathematica 24(1901) pp. 1–88.

[7] A. Denjoy, *Sur les courbes definies par les équations différentielles à la surface du tore*, J. Math. Pures Appl., IX. Ser. 11, pp. 333–375 (1932).

[8] C.J. Gardiner, *The structure of flows exhibiting nontrivial recurrence on two-dimensional manifolds*, Journ. Diff. Equat., 1985, 57, 1, pp. 138–158.

[9] C. Gutierrez, *Structural stability for flows on the torus with a cross-cap* Trans. Amer. Math. Soc. 241 (1978), 311–320.

[10] C. Gutierrez, *Smoothing continuous flows on 2-manifolds and recurrences*, Ergod. Th. and Dyn. Sys. 6(1986), pp. 17–44.

[11] R. Kidambi and P. K. Newton, *Streamline topologies for integrable vortex motion on a sphere*, Physica D **140** (2000) 95–125.

[12] G. Levitt, *Feuilletages des surfaces*, These. Paris. 1983, p. 234.

[13] T. Ma, S. Wang, *Geometric theory of incompressible vector fields with applications to fluid dynamics* Mathematical Surveys and Monographs, 119. American Mathematical Society, Providence, RI, 2005. x+234 pp. ISBN: 0-8218-3693-5.

[14] A. G. Maĭer, *Trajectories on closed orientable surfaces* Mat. Sb. 12 (54) (1943), 71–84

[15] N. Markley, *The Poincaré-Bendixson Theorem for the Klein Bottle*, Trans. Amer. Math. Soc. 135 (1969) 135, 159–165.

[16] N. Markley, *On the number of recurrent orbit closures* Proc. AMS, 25(1970), no 2, 413–416.

[MS] H. Marzougui, Soler López, G., *Area preserving analytic flows with dense orbits* Topology Appl. 156 (2009), no. 18, 3011–3015.

[17] K. Moffatt, *The topology of scalar fields in 2D and 3D turbulence.* Proc. IUTAM Symposium Geometry and Statistics of Turbulence (Hayama) eds. T. Kambe et. al, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (2001).

[18] I. Nikolaev, *Graphs and flows on surfaces* Ergod. Th. Dynam. Syst. 18 (1998), 207–220.

[19] M.M Peixoto, *On the classification of flows on 2-manifolds*, M.M. Peixoto (Ed.), Dynamical Systems, Proc. of Symp. held at Univ. of Bahia, Salvador, Brazil 1971, Academic Press (1973), pp. 389–419.

[20] H. Poincaré. *Sur les courbes définies par une équation différentielle*, J. de Math. Pures et Appl., Série IV 2, (1886) pp. 151–217.

[21] C. Pugh, *An improved closing lemma and a general density theorem*, Amer. J. Math. 89 (1967), 1010–1021.

[22] C. Pugh, C. Robinson, *The C^1-closing lemma, including Hamiltonians*, Ergodic Th. and Dynamical Systems 3 (1983), No. 2, 261–313.

[23] T. Sakajo, Y. Sawamura and T. Yokoyama, *Unique encoding for streamline topologies of incompressible and inviscid flows in multiply connected domains.* Fluid Dynamics Research **46** (2014) 031411.

[24] T. Sakajo, T. Yokoyama, *Transitions between streamline topologies of structurally stable Hamiltonian flows in multiply connected domains*, Physica D, **307** (2015) pp. 22–41.

[25] T. Sakajo, T. Yokoyama, *Tree representations of streamline topologies of structurally stable 2D incompressible flows* IMA Journal of Applied Mathematic, **83** Issue 3 (2018) pp. 380–411.

[26] A.J. Schwartz, *A Generalization to Poincaré-Bendison Theorem to Closed two-Dimensional Manifolds*, (2006) American Journal of Mathematics, 85 (1963) pp. 453–458.

[27] K. Yano, *Asymptotic cycles on two-dimensional manifolds*, Adv. St in Pure Math. 1985, 5, pp. 359–377. (Foliations, Proc. Symp. Tokyo, 1983).

[28] T. Yokoyama, *Recurrence, pointwise almost periodicity and orbit closure relation for flows and foliations*, Topology Appl. 160 (2013) pp. 2196–2206.

[29] T. Yokoyama, *Topological characterisations for non-wandering surface flows*, Proc. Amer. Math. Soc. 144, (2016), pp. 315–323.

[30] T. Yokoyama, *Graph representations of surface flows*, preprint, arXiv:1703.05495.

[31] T. Yokoyama, *Decompositions of surface flow*, preprint, arXiv:1703.05501.

[32] T. Yokoyama and T. Sakajo, *Word representation of streamline topology for structurally stable vortex flows in multiply connected domains.* Proc. Roy. Soc. A **469** (2013) (doi: 10.1098/rspa.2012.0558).