

メビウス変換群の離散性判定問題について

山下 靖 (奈良女子大学)*

1. はじめに

4つの複素数 a, b, c, d で $ad - bc = 1$ をみたすものに対し、

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

をメビウス変換という。これはリーマン球面 $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 上の全単射で、幾何学的には円に関する反転を何回か合成したものとみなすことができ、特に $\widehat{\mathbb{C}}$ の円は円にうつされる。 $\widehat{\mathbb{C}}$ を3次元双曲空間

$$\mathbb{H}^3 = \{(z, t) \mid z \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{R}_{>0}\}$$

の無限遠境界 $\partial\mathbb{H}^3 = \{(z, 0) \mid z \in \widehat{\mathbb{C}}\}$ と同一視し、円に関する反転を \mathbb{R}^3 内の球に関する反転に取り替えることで、メビウス変換は \mathbb{H}^3 の上の全単射を与える。これは \mathbb{H}^3 上の向きを保つ合同変換になっていて、逆にそのようなものはメビウス変換から来ることも知られている。すなわち、メビウス変換全体による群は \mathbb{H}^3 上の向きを保つ合同変換全体による群 $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ と一致している。

Γ を $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ の離散部分群とすると、 \mathbb{H}^3/Γ は3次元双曲オービフォールドになるので、 $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ の離散部分群は低次元トポロジーにとって重要である。このような離散群はクライン群ともよばれている。いくつかのメビウス変換が与えられたとき、これらが生成する $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ の部分群が離散的かどうかを判定する問題およびそれらに関連する話題を本稿では考える。

2. 離散群の例と、メビウス変換群の変形

離散性判定問題を考える前に、 $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ の離散部分群すなわちクライン群の例を紹介する。以下では、メビウス変換に 2×2 行列を対応させる：

$$f(x) = \frac{az + b}{cz + d} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ただし、上の左側で a, b, c, d を $-a, -b, -c, -d$ に取り替えても同じ写像になるので、右側で対応するものは

$$\text{PSL}(2, \mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc = 1 \right\} / \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の要素であるが、簡単のため 2×2 行列のように書くことにする。そして、行列は常に \mathbb{H}^3 にメビウス変換として作用しているとみなす。

本研究は科研費(課題番号:17K05250)の助成を受けたものである。

2010 Mathematics Subject Classification: 57M50

キーワード: クライン群

* 〒630-8506 奈良市北魚屋西町 奈良女子大学理学部

e-mail: yamasita@ics.nara-wu.ac.jp

web: <http://vivaldi.ics.nara-wu.ac.jp/~yamasita/>

$\theta \in (0, \pi/4)$ に対し、 $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ の要素 A_θ, B_θ を以下で定義する。

$$A_\theta = \frac{1}{\sin \theta} \begin{pmatrix} 1 & i \cos \theta \\ -i \cos \theta & 1 \end{pmatrix}, \quad B_\theta = \frac{1}{\sin \theta} \begin{pmatrix} 1 & \cos \theta \\ \cos \theta & 1 \end{pmatrix}$$

複素平面内の閉円板で、単位円に直交し、その2つの交点の偏角がそれぞれ α, β となっているものを $C_{\alpha, \beta}$ と書くことにすると、 A_θ に対応するメビウス変換は $C_{-\pi/2-\theta, -\pi/2+\theta}$ の外部を $C_{\pi/2-\theta, \pi/2+\theta}$ の内部にうつし、 B_θ に対応するメビウス変換は $C_{\pi-\theta, \pi+\theta}$ の外部を $C_{-\theta, \theta}$ の内部にうつすことがわかる。 $A_\theta^{-1}, B_\theta^{-1}$ はそれらの逆になっているだけなので、 $\theta \in (0, \pi/4)$ なら4つの円が互いに交わらないことに注意すると、 A_θ と B_θ で生成されるメビウス変換群 $\langle A_\theta, B_\theta \rangle$ のリーマン球面における基本領域としてこれら4つの円の外部を選ぶことができる。 (\mathbb{H}^3) では、それらを赤道に持つような4つの半球たちの外側である、)そして、 $\langle A_\theta, B_\theta \rangle$ は離散的であり階数2の自由群と同型であることがわかる。

一般に $D_1, D_{-1}, D_2, D_{-2}, \dots, D_n, D_{-n}$ を互いに交わらない複素平面内の閉円板とし、メビウス変換 A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) が D_i の外部を D_{-i} の内部に写しているとする。このような生成系を持つメビウス変換群 $\langle A_1, A_2, \dots, A_n \rangle$ を古典的ショットキー群とよぶ。上と同様に、古典的ショットキー群は離散的かつ階数 n の自由群と同型である。

上の $\langle A_\theta, B_\theta \rangle$ の例に戻ろう。離散的なメビウス変換群が得られるのは $0 < \theta < \pi/4$ の場合に限らない。 $\theta = \pi/4$ のときは円板が接するもの、 $\langle A_\theta, B_\theta \rangle$ は離散的であり階数2の自由群と同型である。さらに θ を少し大きくしても、4つの円について隣どうしの交わりの角度が π/n (ただし $n \geq 3$) などになっているときは、離散群がえられることがポアンカレの多面体定理よりわかる。ただし今度は自由群と同型にはなっていない。例えば $A_\theta B_\theta A_\theta^{-1} B_\theta^{-1}$ の位数が有限となっている。また、円の交わりの角度が 2π の無理数倍のときは、離散群にはならないこともわかる。

本稿では主に2元生成のメビウス変換群たちを考えることにする。素朴にはパラメータ空間は生成元の行列の成分から複素8次元空間となる。(後で次元がもっと下げられることを見る。) このパラメータ空間の中で、離散群に対応する部分とそうでない部分がどのように位置しているのかを調べたい。

3. 基本的な判定条件

まず、離散性の判定に用いられる基本的な方法について復習をしておく。

G をメビウス変換群とする。 \mathbb{H}^3 の中に G の基本多面体を構成することができたら、 G は離散群である。基本多面体を構成するには、 \mathbb{H}^3 の中の1点 p を任意に固定し、 G の任意の非自明な元による p の像より p の方に近い点の集合

$$\{x \in \mathbb{H}^3 \mid d(x, p) < d(x, g(p)) \forall g \in G \setminus \{id\}\}$$

すなわちディリクレ領域を考えるのが基本的な方法である。ディリクレ領域の定義には無限個の不等式が現れるためこのままでは扱いが難しいが、ポアンカレの多面体定理を使うことにより、有限個の G の元を考えるだけで離散性を保証できる場合がある。2節の例がそのようなものであった。ただし、定理を用いるためにどのような有限個の元を選べばよいのかは分からないことも多い。

一方、与えられたメビウス変換群が離散的でないことを示すために用いられる代表例が、以下に述べるヨルゲンセンの不等式である。

定理 3.1 $A, B \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ が生成するメビウス変換群が非初等的かつ離散的ならば、以下が成立する：

$$|\mathrm{tr}^2 A - 4| + |\mathrm{tr} ABA^{-1}B^{-1} - 2| \geq 1$$

「非初等的」の定義は省略するが、自明な反例 ($A = id$ の場合など) を排除するための条件と思っておけばよい。上の定理は離散性のための必要条件の形をしているが、対偶をとることで非離散性のための十分条件となる。

ヨルゲンセンの不等式による非離散性の判定は計算機での実装に向いていることを注意しておく。2元生成メビウス変換群 $G = \langle A, B \rangle$ が非離散的であることを示したいとして、 A, B が上の逆向きの不等式をみたしていなくても、 G の他の要素による組 C, D で上の逆向きの不等式をみたしているものを1つでも見つけられればよい。もちろん $\langle C, D \rangle$ は非初等的である必要があるが、 G 全体を生成している必要はない。

4. 指標多様体

ここから先では、生成元を見やすくするため、2元生成メビウス変換群を F_2 から $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ への表現として考えることにする。ただし F_2 は階数2の自由群で、生成系 $F_2 = \langle X, Y \rangle$ を固定する。また、この表現全体の空間を $\mathrm{Hom}(F_2, \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}))$ と書く。

表現空間 $\mathrm{Hom}(F_2, \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}))$ から \mathbb{C}^3 への写像 ι を以下で定める：

$$\iota(\rho) = (\mathrm{tr} \rho(X), \mathrm{tr} \rho(Y), \mathrm{tr} \rho(XY))$$

$\rho' \in \mathrm{Hom}(F_2, \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}))$ をもう一つの表現とする。ある $M \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ が存在して

$$\rho(X) = M\rho'(X)M^{-1}, \quad \rho(Y) = M\rho'(Y)M^{-1}$$

となっているとき ρ と ρ' は共役といったが、このとき明らかに $\iota(\rho) = \iota(\rho')$ である。逆に、2つの表現 $\rho, \rho' \in \mathrm{Hom}(F_2, \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}))$ が $\iota(\rho) = \iota(\rho')$ をみたすなら、ほとんどの場合 (より正確には像が irreducible の場合) には2つは共役になっている。そして、 $\rho(F_2)$ が離散的かどうかは共役類で決まるので、これからは、点 $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ が離散的なものに対応しているかどうかを考えることにする。ちなみに、写像 ι は全射であることや、reducible な表現に対応する点は

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 - xyz = 4\}$$

であることも知られている。

5. 基本的な用語

この節では、後で使用する基本的な用語について簡単に説明しておく。

A を $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ (または対応するメビウス変換) とする。このとき

- $\mathrm{tr} A \in \mathbb{R}$ で $-2 < \mathrm{tr} A < 2$ のとき、 A を楕円型という。
- $\mathrm{tr} A = \pm 2$ のとき、 A を放物型という。
- 上記以外するとき、 A を斜航型という。

A は $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ の元なので $\mathrm{tr} A$ は符号を除いてしか決まらない。しかし、上の分類は符号に依存していない。

G をメビウス変換群とする。 \mathbb{H}^3 内の任意の点 p に対して、 p の G による軌道 $\{g(p) \mid g \in G\}$ の集積点全体の集合を G の極限集合とよび、 $\Lambda(G)$ と書く。 $\Lambda(G)$ は $\widehat{\mathbb{C}}$ の閉部分集合である。 $\widehat{\mathbb{C}}$ における $\Lambda(G)$ の補集合を不連続領域とよび、 $\Omega(G)$ と書く。また、 \mathbb{H}^3 における $\Lambda(G)$ の凸包を $\mathrm{Hull}(\Lambda(G))$ と書くことにする。そして、 $\mathrm{Hull}(\Lambda(G))/G$ を、 G の凸核とよぶ。

6. Riley slice

2つの放物型のメビウス変換で生成されるメビウス変換群を考える。これら共役により以下の標準的な形に表すことができる。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_w = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ w & 1 \end{pmatrix} \quad w \in \mathbb{C}$$

そして、 $G_w = \langle A, B_w \rangle$ が離散的かつ階数2の自由群と同型となるような w を求めたい。 G_w の不連続領域 Ω を G_w の作用で割った商空間は1つの4点穴あき球面になるか2つの3点穴あき球面になる。 w を連続的に動かせるのは前者で、

$$\mathcal{R} = \{w \in \mathbb{C} \mid G_w \text{ が離散的で } \Omega/G_w \text{ が4点穴あき球面}\}$$

を Riley slice とよぶ。そして、Keen と Series は G_w の凸核から pleating ray というものを導入して、Riley slice の記述を行った。



図 1: Riley slice

図1が得られた Riley slice である。複素パラメータ w による複素平面で、実部の範囲は ± 6 、虚部の範囲は ± 4 である。外側の黒い部分が \mathcal{R} に対応する。境界が複雑な（フラクタル的な）形をしていることが観察される。次節では、Keen と Series による方法をべつのパラメータでも実行しようとした我々の試みを紹介する。

7. Diagonal slice

上で見たように2元生成メビウス変換群の指標多様体の座標は $\mathrm{tr} A, \mathrm{tr} B, \mathrm{tr} AB$ で与えられる。筆者は Caroline Series 氏、Ser Peow Tan 氏と $\mathrm{tr} A = \mathrm{tr} B = \mathrm{tr} AB$ となってい

る部分集合について、これを diagonal slice と名付けて、いつ対応する 2 元生成メビウス変換群 $G = \langle A, B \rangle$ が離散的かつ自由群となっているかを考えた。[7]

$$D = \{x \in \mathbb{C} \mid (x, x, x) \in \mathbb{C}^3 \text{ が離散的かつ自由に対応}\}$$

一般に G が離散かつ自由だと、商空間 \mathbb{H}^3/G は種数 2 のハンドル体になる。ここで、仮定 ($\text{tr } A = \text{tr } B = \text{tr } AB$) よりこの商空間は位数 3 の対称性をもつので、これですらに割ると、球体で内部に位数 3 の cone axis が 2 つあるようなオービフォールドが得られる。その表面は、位数 3 の錐特異点を 4 つ持つ球面である。これは Riley slice で放物型だったところが位数 3 の楕円型に変わったと思え、Riley slice と似た形の議論を進めることができた。

$\rho_x : F_2 \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ を (x, x, x) に対応する表現とする。議論の流れは以下のとおりである。

1. 4 点穴あき球面上の本質的単純閉曲線のホモトピー類は有理数 (を適当な同値関係で割ったもの) で数え上げられることを示す。
2. $\gamma \in F_2$ が 4 点穴あき球面上の本質的単純閉曲線に対応するとき、 $\text{tr } \rho_x(\gamma)$ は x の多項式であり、 γ が対応する有理数の連分数展開から再帰的に計算されることを示す。以下この多項式を $\psi_{p/q}(x)$ と書く。
3. 上の再帰計算の出発点となる有理数 $(0/1, 1/1)$ に対応する曲線で「折れ曲がり」が起きている凸包の具体的記述する。
4. G_x の凸包の境界が有理数 p/q に対応する閉曲線で折れ曲がることと、 x が $\psi_{p/q}(x) \in \mathbb{R}$ のある非特異な枝 $\mathcal{P}_{p/q}$ に入ることが同値であることを示す。
5. 上の枝をうまく選べるように、 x の絶対値が大きくなったときの $\psi_{p/q}(x)$ の振る舞い (多項式の最高次の形) を記述する。
6. $\mathcal{P}_{p/q}$ たちが稠密になっていることを示す。

その結果、以下の図の理論的正当化を行った。

定理 7.1 ([7]) Δ およびその中の $\mathcal{P}_{p/q}$ たちは、図 2 のようになっている。

以下では、この結果の応用について簡単に紹介する。

8. ヨルゲンセン数の実現問題

この節は山崎亮介氏 (学習院高等部) との共同研究 [8] である。

非離散性の十分条件として、ヨルゲンセンの不等式があった。この左辺を用いて、 $A, B \in \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ に対して

$$J(A, B) = |\text{tr}^2 A - 4| + |\text{tr } ABA^{-1}B^{-1} - 2|$$

とおく。さらに $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ の 2 元生成部分群 G に対し

$$J(G) = \inf\{J(A, B) \mid G = \langle A, B \rangle\}$$

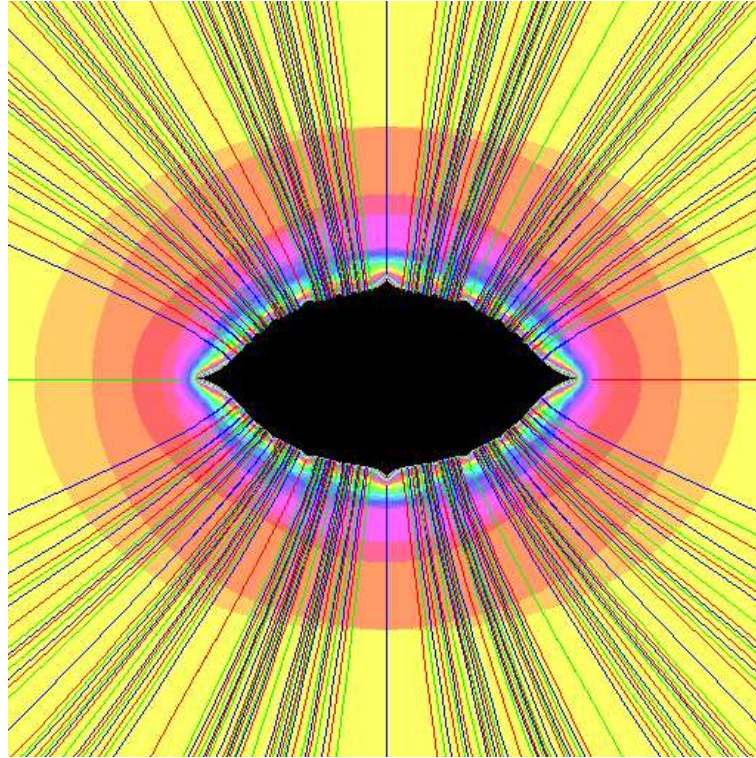


図 2: Diagonal slice : パラメータは複素数 $x = \text{tr } A = \text{tr } B = \text{tr } AB \in \mathbb{C}$ 、中心の黒い「目」の部分の補集合が diagonal slice で、目に向かう曲線たちが $\mathcal{P}_{p/q}$ などと書かれていたもの (pleating ray) である。

とおきヨルゲンセン数とよぶ。ヨルゲンセンの定理より、 G が非初等的かつ離散的ならば $J(G) \geq 1$ である。等号が成立するような群はヨルゲンセン群と呼ばれ、分類の試みがなされている。ここでは大市および佐藤によって提起された以下の問題 [6] を考える。

問題 8.1 r を 1 以上の実数とする。どのような r に対して、 $J(G) = r$ をみたす非初等的かつ離散的メビウス変換が存在するか。

大市と佐藤 [6] は、1 以上の任意の整数と 4 以上の任意の実数について、その値を実現する群の存在を主張したが、証明は出版されていない。

これに対して、山崎氏はまず以下の部分的回答を得た [9]。

定理 8.2 w を Riley slice の要素とすると、対応する群 G_w のヨルゲンセン数は $|w^2|$ である。特に、約 2.467 以上の任意の実数 r に対して、 $J(G) = r$ をみたす非初等的かつ離散的メビウス変換が存在する。

しかし、Riley slice ではこれ以下の値を実現することが不可能である。そこで diagonal slice を用いることにした。特に diagonal slice 内の群と通約可能なものから以下のものを選ぶ：

$$A_a = \begin{pmatrix} -3a/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

ただし a は 1 以上の実数とする。すると直接計算により次がわかる：

$$J(A_a, B) = \frac{(3a^2 - 1)^2}{4a^2}, \quad J(B, A_A) = 5$$

そして、 a を 1 から適切な範囲まで動かすことにより $J(A_a, B)$ が 1 から 4 までの値を連続にとることがわかる。さらに、このとき $J(G_a) = J(A_a, B)$ が成立することを示すことで、以下を得た。

定理 8.3 ([8]) 1 以上の任意の実数 r に対して、 $J(G) = r$ をみたす非初等的かつ離散的メビウス変換が存在する。

パラメータ a を複素数の範囲で動かすことにより、もとの diagonal slice 全体で計算機実験も行った。すると、例えば 1 以上 4 以下のヨルゲンセン数を持つ群が diagonal slice により多く存在することが示唆された。

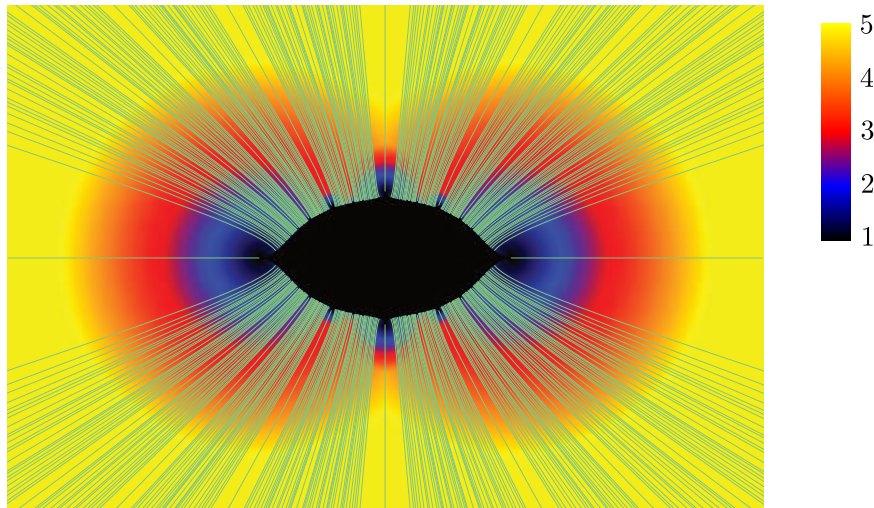


図 3: diagonal slice におけるヨルゲンセン数の評価実験： $x = \text{tr } A = \text{tr } B = \text{tr } AB \in \mathbb{C}$, $-7 \leq \Re x \leq 8$, $-5 \leq \Im x \leq 5$ 、色はヨルゲンセン数の評価、曲線は pleating ray、中心の黒い「目」の補集合が離散的で位数 2 の巡回群と位数 3 の巡回群の自由積と同型な部分

9. 算術的クライン群

本節は Gaven Martin 氏との共同研究である。

Martin らはこれまで 2 つの楕円型のメビウス変換によって生成された「算術的」クライン群の分類を目指して一連の研究を行ってきた。 (クライン群の算術性については [3] を参照。) 生成元の位数が大きい場合の分類はある程度進んでいるが、位数が小さい場合についてはあまり進んでいなかった。本節では、位数が 2 の元と位数が 3 の元とで生成されるメビウス変換群についての計算を紹介する。

ここでは彼らの方法に従って以下のパラメータを使う。

$$\beta_1 = \text{tr}^2 A - 4, \quad \beta_2 = \text{tr}^2 B - 4, \quad \gamma = \text{tr } ABA^{-1}B^{-1} - 2$$

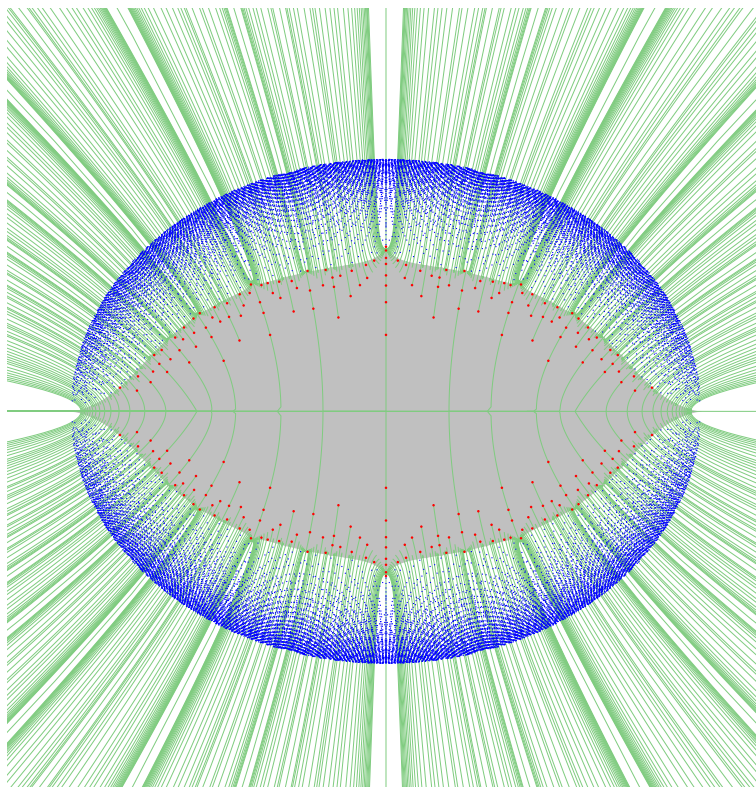


図 4: 位数 2 の楕円的元と位数 3 の楕円的元で生成される算術的クライン群: 点は Flammang-Rhin による候補の点で、中心の「目」の中に入っていて、延長された pleating ray に乗っているものが実際の算術的クライン群と思われる。

今は A, B の位数を固定しているので、 β_1, β_2 は定数である。そこでここでのメビウス変換群は γ の値だけできまる。この γ 平面の中にある算術的クライン群をすべてリストアップするのが目標である。

まず、候補となる γ 平面の点は以下の条件をみたすべきであることがわかっていた。

- 代数的整数で、その最小多項式の次数は 2 以上で、すべてのガロア共役は楕円

$$\left\{ x + yi \mid \left(\frac{x - 1/2}{5/2} \right)^2 + \left(\frac{y}{2} \right)^2 \leq 1 \right\}$$

内に位置し、ちょうど 2 つが実数ではなく、残りは全て実数で $[-1, 2]$ 内にある。

このような条件をみたす最小多項式はちょうど 15909 個存在していることが、そのリストと共に Flammang-Rhin [2] によって与えられていた。そして、離散的で位数 2 の巡回群と位数 3 の巡回群の自由積になっているパラメータ (γ) をここから排除したいが、そのための方法がこれまでなかった。

しかし、この Martin 氏らの γ 平面と、筆者が Series 氏・Tan 氏と研究した diagonal slice は本質的に同じものであることを、簡単な計算で確かめることができた。そこで、pleating ray と Flammang-Rhin の点を両方プロットしてみたところ、どの点が算術的であるかとかなり強く示唆する実験結果を得た。(図 4) この画像は、AMS の Notices の 2016 年 11 号の表紙にもなった [1, 5]。短期間で Notices の担当者の方と表紙を作成していくプロセスは楽しく、得難い経験となった。

その後 Martin 氏とは、2つの放物型の元を「ランダム」に発生させた場合に、いつ離散的になるか (Riley slice に入るか) 等についての計算機実験も共同で行っている [4]。計算機を使ったアプローチはまだまだ様々なものが可能であると感じている。

参考文献

- [1] Bill Casselman. About the december cover. *Notices Amer. Math. Soc.*, 63(11):1248, 2016.
- [2] Valérie Flammang and Georges Rhin. Algebraic integers whose conjugates all lie in an ellipse. *Math. Comp.*, 74(252):2007–2015, 2005.
- [3] Colin Maclachlan and Alan W. Reid. *The arithmetic of hyperbolic 3-manifolds*, volume 219 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2003.
- [4] Gaven Martin, Graeme O’Brien, and Yasushi Yamashita. Random kleinian groups, II : Two parabolic generators. *Experimental Mathematics*, (to appear).
- [5] Gaven J. Martin. Siegel’s problem in three dimensions. *Notices Amer. Math. Soc.*, 63(11):1244–1247, 2016.
- [6] Makito Oichi and Hiroki Sato. Jørgensen numbers of discrete groups. *Sūrikaiseikikenkyūsho Kōkyūroku*, 1519:105–118, 2006.
- [7] Caroline Series, Ser Peow Tan, and Yasushi Yamashita. The diagonal slice of Schottky space. *Algebr. Geom. Topol.*, 17(4):2239–2282, 2017.
- [8] Yasushi Yamashita and Ryosuke Yamazaki. The realization problem for jrgensen numbers, 2017. [arXiv:1703.07732](https://arxiv.org/abs/1703.07732).
- [9] Ryosuke Yamazaki. Some extensions of Oichi-Sato’s theorem for the Jørgensen numbers of the Kleinian groups, 2016. Master thesis, University of Tokyo.