

カスプ辺の法写像の性質

神戸大学大学院理学研究科 寺本 圭佑*

(Department of Mathematics, Kobe University, Keisuke Teramoto)

1 はじめに

$\Sigma \subset \mathbf{R}^2$ を領域とし, $f: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$ を C^∞ 級写像とする. このとき, f がフロントル (frontal) であるとは, f に沿う写像 $\nu: \Sigma \rightarrow S^2$ が存在し, 任意の $q \in \Sigma$, $X \in T_q \Sigma$ に対し, $\langle df_q(X), \nu(q) \rangle = 0$ が成り立つときをいう. さらに, フロントル f が波面 (フロント, wave front) であるとは, 写像の組 $(f, \nu): \Sigma \rightarrow T_1 \mathbf{R}^3 \cong \mathbf{R}^3 \times S^2$ がはめ込みになるときをいう. 写像 ν を f の単位法写像 (unit normal map) あるいはガウス写像 (Gauss map) と呼ぶ. 点 $p \in \Sigma$ が f の特異点であるとは, f が p ではめ込みとならない点のことをいう. 波面のジェネリックな特異点は, カスプ辺 (cuspidal edge) とツバメの尾 (swallowtail) であることが知られており, これらは, $(u, v) \mapsto (u, v^2, v^3)$ 及び $(u, v) \mapsto (u, 3v^4 + uv^2, 4v^3 + 2uv)$ にそれぞれ \mathcal{A} 同値な写像である. 近年, フロントルや波面に対して, 多くの微分幾何学的な研究があり, 様々な不変量が導入されてきている ([7, 8, 14–21, 23–30]). 本講演では, カスプ辺の不変量とガウス写像 ν 及び法線叢に現れる特異点や幾何学的性質 ([29, 30]) について紹介する.

2 準備

$(\Sigma; u, v) \subset \mathbf{R}^2$ を領域, $f: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$ をフロントルとする. また, $\nu: \Sigma \rightarrow S^2$ を f の単位法写像 (ガウス写像) とし, $S(f) (\subset \Sigma)$ で f の特異点集合を表す. 関数 $\lambda: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}$ を

$$\lambda(u, v) = \det(f_u, f_v, \nu)(u, v) \quad (f_u = \partial f / \partial u, f_v = \partial f / \partial v)$$

で定める. この関数をフロントル f の符号付き面積密度関数 (signed area density function) と呼ぶ. 符号付き面積密度関数の定義から $\lambda^{-1}(0) = S(f)$ がわかる. 点 $p \in S(f)$ が f の非退化特異点であるとは, $d\lambda(p) \neq 0 \iff (\lambda_u(p), \lambda_v(p)) \neq (0, 0)$ のときをいう. 非退化特異点 $p \in S(f)$ に対して, 陰関数定理から, p の近傍 $U (\subset \Sigma)$ と正則曲線 $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \ni t \mapsto \gamma(t) \in U$ ($\varepsilon > 0$) で, $\lambda(\gamma(t)) = 0$ を満たすものが存在する. さらに, $S(f) \cap U$ 上で $df(\eta) = 0$ を満たすもの U 上のベクトル場 η が存在する. この曲線とベクトル場をそれぞれ特異曲線 (singular curve), 退化ベクトル場 (null vector field) と呼ぶ. さらに, $\hat{\gamma}(t) = f \circ \gamma(t)$ を特異ローカス (singular locus) と呼ぶ. カスプ辺やツバメの尾は非退化特異点である. また, カスプ辺の特異ローカス $\hat{\gamma}$ は正則空間曲線, ツバメの尾の特異ローカスは $t \mapsto (t^2, t^3, t^4)$ に \mathcal{A} 同値な特異点付き空間曲線 (棒付き曲線 [9]) となる. これらの特異点に対する判定法が知られている.

事実 2.1 ([15, 25]). $f: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$ を波面, $p \in S(f)$ を非退化特異点, λ を符号付き面積密度関数, γ を p を通る特異曲線, η を退化ベクトル場とする. また, $\delta(t) = \det(\gamma', \eta)(t)$ とする. ただし, $\gamma' = d\gamma/dt$ である. このとき,

- (1) f が p でカスプ辺 $\iff \eta\lambda(p) \neq 0 \iff \delta(0) \neq 0$.
- (2) f が p でツバメの尾 $\iff \eta\lambda(p) = 0, \eta\eta\lambda(p) \neq 0 \iff \delta(0) = 0, \delta'(0) \neq 0$.

波面やフロントルに現れるその他の特異点に対する判定法が知られている ([5, 11, 12, 25]).

本研究は, 日本学術振興会特別研究員奨励費 (課題番号 17J02151) の助成を受けています.

*e-mail: teramoto@math.kobe-u.ac.jp

2.1 カスパ辺の不変量

ここでは, $f: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$ を波面, $p \in S(f)$ をカスパ辺とする. 点 p の近傍 U をとり, γ を $\gamma(0) = p$ を満たす特異曲線とする. カスパ辺の不変量を紹介するために, 次のベクトル場の組を導入する ([17]).

定義 2.2. U 上のベクトル場の組 (ξ, η) が許容的 (**adapted**) であるとは,

- (1) ξ は $S(f) \cap U$ 上 γ' に平行,
- (2) η は $S(f) \cap U$ 上 f の退化ベクトル場,
- (3) (ξ, η) は正の向きを与える

ときをいう.

許容的なベクトル場の組 (ξ, η) を用いて, $S(f) \cap U$ 上で定義される次のカスパ辺の不変量を定める:

$$\begin{aligned} \kappa_s &= \operatorname{sgn}(\eta\lambda) \frac{\det(\xi f, \xi\xi f, \nu)}{|\xi f|^3}, \quad \kappa_\nu = \frac{\langle \xi\xi f, \nu \rangle}{|\xi f|^2}, \quad \kappa_c = \frac{|\xi f|^{3/2} \det(\xi f, \eta\eta f, \eta\eta\eta f)}{|\xi f \times \eta\eta f|^{5/2}}, \\ \kappa_t &= \frac{\det(\xi f, \eta\eta f, \eta\eta\xi f)}{|\xi f \times \eta\eta f|^2} - \frac{\det(\xi f, \eta\eta f, \xi\xi f) \langle \xi f, \eta\eta f \rangle}{|\xi f|^2 |\xi f \times \eta\eta f|^2}, \\ \kappa_i &= \frac{\det(\xi f, \eta\eta f, \xi\xi\xi f)}{|\xi f|^3 |\xi f \times \eta\eta f|} - 3 \frac{\langle \xi f, \eta\eta f \rangle \det(\xi f, \eta\eta f, \xi\xi f)}{|\xi f|^5 |\xi f \times \eta\eta f|}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

κ_s は特異曲率 (**singular curvature**) ([24]), κ_ν は極限法曲率 (**limiting normal curvature**) ([18, 24]), κ_c はカスパ的曲率 (**cuspidal curvature**) ([18]), κ_t はカスパ的捩率 (**cuspidal torsion**) ([17]), κ_i は変曲曲率 (**edge inflectional curvature**) ([17]) と呼ばれる不変量である. 特に, κ_s は内在的な不変量であり, カスパ辺の凹凸に関係している (図 1) ([8, 24]). また, $\kappa_c \neq 0$ であることに注意する ([18, Proposition 3.11]).

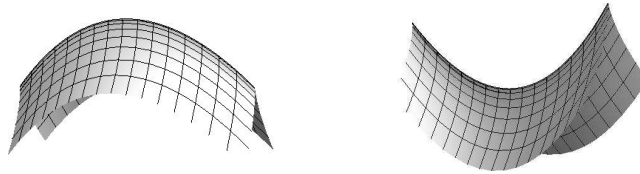


図 1: $\kappa_s > 0$ のカスパ辺 (左) と $\kappa_s < 0$ のカスパ辺 (右).

さて, K, H を $U \setminus S(f)$ で定義された f のガウス曲率, 平均曲率とする. 平均曲率 H はカスパ辺の近くで非有界な関数になることが知られている. これらを用いて, 関数 $\kappa_j: U \setminus S(f) \rightarrow \mathbf{R}$ ($j = 1, 2$) を

$$\kappa_1 = H + \sqrt{H^2 - K}, \quad \kappa_2 = H - \sqrt{H^2 - K} \quad (2.2)$$

と定める. これらは主曲率と呼ばれる曲率である. 主曲率の一方は, U 上の有界な C^∞ 級関数に拡張でき, もう一方はカスパ辺の近くで非有界になる ([19, 27, 28]). 有界な主曲率を κ , 非有界となる主曲率を $\hat{\kappa}$, $\hat{\kappa} = \lambda\hat{\kappa}$ とすると, γ 上で, $\kappa = \kappa_\nu$ であり, $\hat{\kappa}$ は κ_c の零でない関数倍になる. 特に, $\hat{\kappa}(p) \neq 0$ となることに注意する. U 上の零でないベクトル場 V で,

$$(II - \kappa I)V = 0$$

を満たすものを κ に関する主方向という. ただし,

$$I = \begin{pmatrix} \langle f_u, f_u \rangle & \langle f_u, f_v \rangle \\ \langle f_u, f_v \rangle & \langle f_v, f_v \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, \quad II = \begin{pmatrix} \langle f_{uu}, \nu \rangle & \langle f_{uv}, \nu \rangle \\ \langle f_{uv}, \nu \rangle & \langle f_{vv}, \nu \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

で与えられる 2×2 行列である. さらに,

$$(\lambda II - \hat{\kappa}I)\tilde{V} = 0$$

を満たす零でない U 上のベクトル場を $\tilde{\kappa}$ に関する主方向という.

定義 2.3. カスプ辺 p が峰点 (ridge point) であるとは, $V_\kappa(p) = 0$ であるときをいう. また, p が k 次の峰点 (k -th order ridge point) であるとは, $V^{(m)}\kappa(p) = 0$ ($1 \leq m \leq k$), $V^{(k+1)}\kappa(p) \neq 0$ であるときをいう. また, p が副放物点 (sub-parabolic point) であるとは, $\tilde{V}\kappa(p) = 0$ となるときをいう.

正則曲面に関する峰点や副放物点の性質については, [4, 6, 10, 22] を参照.

カスプ辺の不変量と峰点, 副放物点には次の関係がある.

命題 2.4 ([27, 29]). $f: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$ を波面, p を f のカスプ辺とする.

- (1) p が峰点 $\iff 4\kappa_t(p)^3 + \kappa_i(p)\kappa_c(p)^2 = 0$.
- (2) p が副放物点 $\iff 4\kappa_t(p)^2 + \kappa_s(p)\kappa_c(p)^2 = 0$.

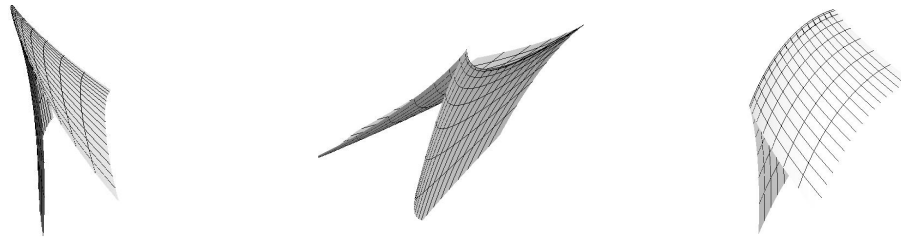


図 2: 峰点を持つカスプ辺 (左), 副放物点を持つカスプ辺 (中央), どちらでもないカスプ辺 (右). 副放物点では $\kappa_s \leq 0$ となるので非凸なカスプ辺となる.

カスプ辺の特異ローカスが曲率線 (line of curvature) になるということを, 有界な主曲率に関する主方向 V が, 特異曲線 γ の接ベクトル γ' と γ に沿って平行であると定める. このとき, 次が成り立つ.

命題 2.5 ([13, 28]). 波面 $f: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$ が $p \in \Sigma$ でカスプ辺を持つとする. また, γ を点 p を通る特異曲線であるとする. このとき, 特異ローカス $\hat{\gamma}$ が f の曲率線 $\iff \gamma$ 上 $\kappa_t = 0$.

2.2 同次元間の Morin 写像と波面の特異点

法線叢の特異点を解析するために同次元間の Morin 特異点と波面の特異点の関係を紹介する. A_k -Morin 特異点とは,

$$f(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_1x_n + \dots + x_{k-1}x_n^{k-1} + x_n^{k+1}) \quad (k \leq n)$$

に原点で A 同値である写像芽 $f: (\mathbf{R}^n, p) \rightarrow (\mathbf{R}^n, f(p))$ のことである ([25]). A_0 -Morin 特異点は, 正則点であることに注意する. A_k -Morin 特異点に対して, 次の判定法が知られている.

事実 2.6 ([25, Theorem A.1]). $k \leq n$ と仮定する. Ω を \mathbf{R}^n の領域, $f: \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$ を C^∞ 級写像, p を f の余階数 1 の特異点 ($\text{rank } df_p = n - 1$) とする. このとき, f が p で A_k -Morin 特異点を持つための必要十分条件は,

- (1) $\Lambda = \Lambda' = \dots = \Lambda^{(k-1)} = 0$ かつ $\Lambda^{(k)} \neq 0$ が p で成立する,
- (2) $(\Lambda, \Lambda', \dots, \Lambda^{(k-1)}): \Omega \rightarrow \mathbf{R}^k$ は p で非特異である.

ただし, $\Lambda = \det(f_{x_1}, \dots, f_{x_n})$, (x_1, \dots, x_n) は Ω の局所座標系, $\Lambda' = \eta\Lambda$, $\Lambda^{(i)} = \eta\Lambda^{(i-1)}$ であり, η は, $df_q(\eta) = 0$ ($\forall q \in S(f) \cap \Omega$) を満たす Ω 上で定義された零でないベクトル場 (f の退化ベクトル場).

一方, 原点において

$$X \mapsto \left((k+1)t^{k+2} + \sum_{j=2}^k (j-1)t^j x_j, -(k+2)t^{k+1} - \sum_{j=2}^k jt^{j-1} x_j, X_1 \right)$$

で定義される写像芽を A_{k+1} -**front** 特異点という. ただし, $X = (t, x_2, \dots, x_n)$, $X_1 = (x_2, \dots, x_n)$ ([1, 25]).

注意 2.7. $n = 2$ としたとき, A_1 -front 特異点の像は正則点, A_2 -front 特異点の像はカスプ辺, A_3 -front 特異点の像はツバメの尾である ([1, 25] を参照).

A_k -front 特異点と A_k -Morin 特異点の間に, 次の関係が知られている.

事実 2.8 ([25, Corollary 2.11]). Ω を \mathbf{R}^{n+1} の領域, $f: \Omega \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ を C^∞ 級写像とする. 点 $p \in \Omega$ は f の特異点であり, f のヤコビ行列式の外微分が p で消えないと仮定する. このとき, 次は同値である.

- (1) p は f の A_k -Morin 特異点である.
- (2) $f|_{S(f)}$ は波面であり, p は $f|_{S(f)}$ の A_k -front 特異点である.

2.3 平面間の写像の特異点

カスプ辺の法写像の特異点を考察するために, 平面間の写像の特異点を考える. $f: (\mathbf{R}^2, p) \rightarrow (\mathbf{R}^2, f(p))$ を平面間の C^∞ 級写像芽とする. Whitney [31] は, 折り目特異点 (**fold**) とカスプ特異点 (**cuspl**) がジェネリックな特異点であることを示した. 折り目特異点は, $(u, v) \mapsto (u, v^2)$ に A -同値な写像芽をいい, カスプ特異点は, $(u, v) \mapsto (u, v^3 + uv)$ に A -同値な写像芽をいう. また, A_e 余次元が 1 のものは, 唇 (**lips**), 嘴 (**beaks**), ツバメの尾 (**swallowtail**) であることが知られている. これらは順に, $(u, v) \mapsto (u, v^3 + u^2v)$, $(u, v^3 - u^2v)$ と $(u, v^4 + uv)$ にそれぞれ A 同値な写像芽として定義される.

関数 (芽) $\Lambda: (\mathbf{R}^2, p) \rightarrow \mathbf{R}$ を $\Lambda(u, v) = \det(f_u, f_v)$ とすると, 点 $p \in \mathbf{R}^2$ が f の特異点であることと $\Lambda(p) = 0$ であることは同値である. この関数 Λ (の零でない関数倍) を特異点識別子 (**singularity identifier**) と呼ぶ. また, 波面と同様に特異点 p が非退化であるとは, $d\Lambda(p) \neq 0$ のときをいう.

点 p が非退化特異点であるとき, ある近傍 U と曲線 $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ があって, U 上で $\Lambda(\gamma(t)) = 0$ が成立する. また, 点 p が (余) 階数 1 の特異点であるとき, U 上の零にならないベクトル場 η で, $df_p(\eta) = 0$ を満たすものが存在する. このベクトル場を退化ベクトル場と呼ぶ.

事実 2.9 ([25, 31]). $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ を C^∞ 級写像とし, $p \in \mathbf{R}^2$ を f の特異点とする. このとき,

- (1) f が p で折り目特異点 $\iff \eta\Lambda(p) \neq 0$.
- (2) f が p でカスプ特異点 $\iff d\Lambda(p) \neq 0, \eta\Lambda(p) = 0, \eta\eta\Lambda(p) \neq 0$.
- (3) f が p でツバメの尾 $\iff d\Lambda(p) \neq 0, \eta\Lambda(p) = \eta\eta\Lambda(p) = 0, \eta\eta\eta\Lambda(p) \neq 0$.
- (4) f が p で唇 $\iff d\Lambda(p) = 0, \det \text{Hess}(\Lambda(p)) > 0$.
- (5) f が p で嘴 $\iff d\Lambda(p) = 0, \eta\eta\Lambda(p) \neq 0, \det \text{Hess}(\Lambda(p)) < 0$.

3 カスプ辺の法線叢

$f: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$ を波面とし, $p \in \Sigma$ を f のカスプ辺とする. また, $\nu: \Sigma \rightarrow S^2$ を単位法写像とする. このとき, p の近傍 U と特異曲線 γ , 退化ベクトル場 η がある. (u, v) を U の局所座標系とする. ここで, 次の写像を考える.

$$\mathcal{F}: U \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3, \quad \mathcal{F}(u, v, w) = f(u, v) + w\nu(u, v). \quad (3.1)$$

この写像 \mathcal{F} はカスプ辺 f の法線叢 (**normal congruence**) である. さて, κ を U 上で定義される有界な主曲率で $\kappa(p) \neq 0$, $\tilde{\kappa}$ を p の近くで非有界な主曲率, $\hat{\kappa} = \lambda\tilde{\kappa}$ とする. これらを用いると, \mathcal{F} の特異点集合 $S(\mathcal{F})$ は, $S(\mathcal{F}) = \{(u, v, w) \mid w = 1/\kappa(u, v)\} \cup \{(u, v, w) \mid w = \lambda(u, v)/\hat{\kappa}(u, v)\}$ となる. また, \mathcal{F} の特異値集合は,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(S(\mathcal{F})) = & \left\{ f(u, v) + \frac{1}{\kappa(u, v)}\nu(u, v) \mid (u, v) \in U, w = \frac{1}{\kappa(u, v)} \right\} \\ & \cup \left\{ f(u, v) + \frac{\lambda(u, v)}{\hat{\kappa}(u, v)}\nu(u, v) \mid (u, v) \in U, w = \frac{\lambda(u, v)}{\hat{\kappa}(u, v)} \right\} \end{aligned} \quad (3.2)$$

いま, 写像 $FC_f, \widehat{FC}_f: U \rightarrow \mathbf{R}^3$ をそれぞれ,

$$FC_f(u, v) = f(u, v) + \frac{1}{\kappa(u, v)}\nu(u, v), \quad \widehat{FC}_f(u, v) = f(u, v) + \frac{\lambda(u, v)}{\hat{\kappa}(u, v)}\nu(u, v) \quad (3.3)$$

とすると, これらは, カスプ辺 f の焦曲面 (**focal surfaces**)(cf. [13]) を与えている. もし, 点 p で, $\kappa(p) = 0$ なら, FC_f は定義できないが, $\hat{\kappa}(p) \neq 0$ であるので, \widehat{FC}_f は, そのような点でも定義できる. また, 特異曲線 γ 上で, $\lambda(\gamma(t)) = 0$ なので, $\widehat{FC}_f \circ \gamma = f \circ \gamma = \hat{\gamma}$ となり, カスプ辺の特異ローカスは, \widehat{FC}_f 上の正則曲線となる. これは, カスプ辺特有の性質である. 上の焦曲面 FC_f, \widehat{FC}_f は, ツバメの尾などに対しても定義できることに注意する.

まず, 有界な主曲率に関する焦曲面 FC_f の特異点について, 事実 2.6 と事実 2.8 を用いることにより, 次の結果を得る.

定理 3.1 ([29, Theorem 3.6]). $f: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$ を波面とし, $p \in \Sigma$ をカスプ辺とする. κ が p の近くで C^∞ 級の主曲率であり, $\kappa(p) \neq 0$ とする. このとき, κ に関する焦曲面 FC_f について次が成立する.

- (1) FC_f が p で非特異 $\iff p$ は f の峰点でない.
- (2) FC_f が p でカスプ辺 $\iff p$ は f の 1 次の峰点.
- (3) FC_f が p でツバメの尾 $\iff p$ は f の 2 次の峰点であり p を通る峰点の集合は (局所的に) 正則曲線となる.

この結果は, 正則曲面の場合と同様な結果である ([4, 10, 22]).

次に, \widehat{FC}_f について考察する. まず, 次のことが言える.

命題 3.2 ([29, Proposition 3.7]). $f: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$ を波面, ν を f の単位法写像, $p \in \Sigma$ を f のカस्प辺とする. このとき, 焦曲面 \widehat{FC}_f は, p で正則となる. さらに, f 上の点 $f(p)$ における極限接平面と $\widehat{FC}_f(p)$ における接平面は直交する. ただし, f の $f(p)$ における極限接平面とは, $\nu(p)$ に直交する平面のことである.

このことから, 焦曲面 \widehat{FC}_f のガウス曲率や平均曲率とカस्प辺の不変量の関係を点 p の近くで考えることができる. 実際, 次のことが言える.

定理 3.3 ([29, Theorem 3.8]). \widehat{FC}_f のガウス曲率 $K_{\widehat{FC}_f}$ と平均曲率 $H_{\widehat{FC}_f}$ は, 特異曲線 γ に沿って,

$$K_{\widehat{FC}_f} = -\frac{1}{4}(4\kappa_t^2 + \kappa_s \kappa_c^2), \quad H_{\widehat{FC}_f} = \pm \frac{1}{8}(\kappa_c^2 - 4\kappa_s)$$

で与えられる. ただし, $H_{\widehat{FC}_f}$ の符号 \pm は, \widehat{FC}_f の単位法写像の向きに依存する.

定理 3.3 と命題 2.4 から, 次のことが言える.

系 3.4 ([29, Corollary 3.9]). $K_{\widehat{FC}_f}(p) = 0 \iff p$ は f の副放物点.

焦曲面 \widehat{FC}_f に対して, 点 p が \widehat{FC}_f の楕円点 (elliptic point), 放物的点 (parabolic point) または 双曲点 (hyperbolic point) とは, それぞれ $K_{\widehat{FC}_f} > 0, = 0$ or < 0 となるときをいう (cf. [10]). 定理 3.3 から, 次の性質を得る.

系 3.5 ([29, Corollary 3.10]). f を \mathbf{R}^3 内の波面, p を f のカस्प辺, \widehat{FC}_f を f の焦曲面とする.

(1) \widehat{FC}_f の点 p は, 次のように分類される:

- p は \widehat{FC}_f の楕円点 $\iff p$ で $4\kappa_t^2 + \kappa_s \kappa_c^2 < 0$,
- p は \widehat{FC}_f の放物的点 $\iff p$ で $4\kappa_t^2 + \kappa_s \kappa_c^2 = 0$,
- p は \widehat{FC}_f の双曲点 $\iff p$ で $4\kappa_t^2 + \kappa_s \kappa_c^2 > 0$.

さらに, ガウス曲率 $K_{\widehat{FC}_f}$ が点 p で非負 $\iff \kappa_s$ が p で非正.

特に, $K_{\widehat{FC}_f}$ が γ に沿って真に正なら, κ_s は真に負になる.

(2) 平均曲率 $H_{\widehat{FC}_f}$ が γ に沿って零なら, κ_s は γ に沿って真に正となる.

4 カस्प辺のガウス写像の特異点とガウス曲率の振る舞い

この節では, カस्प辺のガウス写像の特異点について考える. $f: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$ を波面, $\nu: \Sigma \rightarrow S^2$ を f のガウス写像, f が $p \in \Sigma$ でカस्प辺を持つとする. また, κ を点 p の近傍 U 上で有界な主曲率, \mathbf{V} を κ に関する主方向ベクトルとし, $\hat{\kappa}$ で p の近くで非有界な主曲率を表す. このとき, ガウス写像 ν の特異点識別子 Λ は, ワインガルテンの公式を用いると,

$$\Lambda = \det(\nu_u, \nu_v, \nu) = \kappa \hat{\kappa}$$

と表せる. ただし, $\hat{\kappa} = \lambda \tilde{\kappa}$ であり, λ は f の符号付き面積密度関数である. 点 p で, $\hat{\kappa}(p) \neq 0$ であるので, ν の特異点識別子として $\tilde{\Lambda} = \kappa$ ととれる. したがって, ν の特異点集合は, $S(\nu) \cap U = \{q \in U \mid \kappa(q) = 0\}$ で与えられる. これを f の放物点集合と呼ぶ. また, $\kappa^{-1}(0)$ で定義される U 上の曲線を放物点曲線 (parabolic curve) と呼ぶ. このとき, 次のことがわかる.

命題 4.1 ([18, 30]). 放物点曲線が p を通る $\iff \kappa_\nu(p) = 0$ が成立.

以下, 命題 4.1 の状況を考える. つまり, 点 p が f と ν 両方の特異点となっているとする. このとき, 事実 2.9 から次が成り立つ.

定理 4.2 ([30, Theorem 3.3]). 上の仮定の下, 次が成立.

(1) p が κ の正則点とする.

- p が ν の折り目特異点 $\iff p$ は f の峰点でない.
- p が ν のカスプ特異点 $\iff p$ は f の 1 次の峰点.
- p が ν のツバメの尾特異点 $\iff p$ は f の 2 次の峰点.

(2) p が κ の臨界点とする.

- p が ν の唇特異点 $\iff \det \text{Hess}(\kappa(p)) > 0$.
- p が ν の嘴特異点 $\iff \det \text{Hess}(\kappa(p)) < 0$ であり, p は f の 1 次の峰点.

正則曲面の場合にも同様の特徴づけが成り立つ ([2]).

さて, p が放物点で, κ の正則点である場合を考える. このとき, 放物点曲線は p の近くで正則曲線となる. 放物点曲線と f の特異曲線の接触を考える.

定義 4.3 ([10]). $\alpha: I \ni t \mapsto \alpha(t) \in \mathbf{R}^2$ を正則平面曲線, β を関数 $F: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ の零点集合で定義される別の正則平面曲線とする. このとき, α が β と点 $t_0 \in I$ で $(k+1)$ 点接触を持つとは, 合成関数 $g(t) = F(\alpha(t))$ が,

$$g(t_0) = g'(t_0) = \cdots = g^{(k)}(t_0) = 0, \quad g^{(k+1)}(t_0) \neq 0$$

を満たすときをいう. ただし, $g^{(i)} = d^i g / dt^i$ ($1 \leq i \leq k+1$). さらに, α が β と点 t_0 で少なくとも $(k+1)$ 点接触を持つとは, 関数 $g(t) = F(\alpha(t))$ が,

$$g(t_0) = g'(t_0) = \cdots = g^{(k)}(t_0) = 0.$$

を満たすときをいう.

カスプ辺に対して, 次のことが成り立つ.

補題 4.4 ([30, Lemma 3.5]). $f: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$ を波面, ν をそのガウス写像, $p \in \Sigma$ をカスプ辺とする. κ を p の近くで有界な主曲率とする. このとき, $\kappa = 0$ によって定められる放物点曲線が p で正則となるための必要十分条件は, 点 p において $\kappa'_\nu \neq 0$ または $4\kappa_t^2 + \kappa_s \kappa_c^2 \neq 0$ が成立することである.

定義 4.3 と 補題 4.4 より, 次のことがわかる.

命題 4.5 ([30, Proposition 3.6]). $f: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$ を波面, ν を f のガウス写像, $p \in \Sigma$ をカスプ辺とする. κ を p の近くで有界な主曲率関数とし, $\kappa(p) = 0$, $(\partial_u \kappa(p), \partial_v \kappa(p)) \neq (0, 0)$ を満たすとする. このとき, 点 p を通る f の特異曲線 γ が p において $\kappa^{-1}(0)$ で定義される放物点曲線と $(k+1)$ 点接触 ($k \geq 1$) を持つための必要十分条件は, $4\kappa_t(p)^2 + \kappa_s(p)\kappa_c(p)^2 \neq 0$,

$$\kappa_\nu(p) = \kappa'_\nu(p) = \cdots = \kappa_\nu^{(k)}(p) = 0 \text{ かつ } \kappa_\nu^{(k+1)}(p) \neq 0$$

が成り立つことである.

さて, 波面のガウス曲率 K は, 一般に特異点で非有界となることが知られている. しかし, カスプ辺の場合, そのガウス写像がカスプ辺において特異点を持つとき, 次のことが知られている.

事実 4.6 ([18, Corollary 3.12]). $f: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$ を波面, ν を f のガウス写像とし, $p \in \Sigma$ で f がカスプ辺を持つとする. このとき, 次は同値:

- (1) $\kappa_\nu(p) = 0$ (resp. $\kappa_\nu(p) = \kappa'_\nu(p) = 0$).
- (2) f のガウス曲率 K は p に近づくととき, 有限個の近づき方を除いたすべての近づき方に関して有界 (resp. 連続).

事実 4.6 の主張 (2) は, ガウス曲率 K がカスプ辺 p において, 有理的有界 (**rationaly bounded**) (resp. 有理的連続 (**rationaly continuous**)) であることを意味している. 関数の有理的有界性や有理的連続性の正確な定義は [18, Definition 3.4] を参照.

命題 4.5 と事実 4.6 から, 次のことがわかる.

系 4.7 ([30, Corollary 3.7]). $f: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$ を波面, $p \in \Sigma$ をカスプ辺とする. このとき, f のガウス曲率 K が p で有理的有界であるための必要十分条件は, 放物点曲線が p を通ることである. さらに, 特異曲線 γ と放物点曲線が p で少なくとも 2 点接触を持つとき, K が p において有理的連続となる.

逆に, 次のことが言える.

命題 4.8 ([30, Proposition 3.8]). $f: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$ を波面, $\nu: \Sigma \rightarrow S^2$ を f のガウス写像, p をカスプ辺とする. f のガウス曲率 K が p において有理的連続であるとする. このとき, ν が p でカスプ特異点を持つための必要十分条件は, $\kappa_t(p) = 0$ かつ $\kappa_s(p)\kappa'_i(p) \neq 0$ となることである.

カスプ辺が特別な性質を持つ場合について考える. まず, カスプ辺の特異ローカスが曲率線である場合を考える. これは, 命題 2.5 より, 特異曲線上で κ_t が恒等的に零となることであつた. このとき, 次のことが言える.

命題 4.9 ([30, Proposition 3.9]). $f: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$ を波面, ν をそのガウス写像, $p \in \Sigma$ をカスプ辺とする. γ を p を通る特異曲線とする. κ が p の近くで有界な主曲率であり, 放物点曲線 $\kappa^{-1}(0)$ が p を通る正則曲線とする. さらに, 特異ローカス $\hat{\gamma}$ が曲率線であるとする. このとき,

- (1) p が ν の折り目特異点 $\iff \kappa'_\nu(p) \neq 0$ が成立.
- (2) p が ν のカスプ特異点 $\iff \kappa'_\nu(p) = 0, \kappa''_\nu(p) \neq 0$ かつ $\kappa_s(p) \neq 0$ が成立.
- (3) p が ν のツバメの尾特異点 $\iff \kappa'_\nu(p) = \kappa''_\nu(p) = 0, \kappa'''_\nu(p) \neq 0$ かつ $\kappa_s(p) \neq 0$ が成立.

命題 4.5, 4.9 と系 4.7 から次のことが従う.

系 4.10 ([30, Corollary 3.10]). 命題 4.9 と同じ状況で, 点 p が ν のカスプ特異点 (resp. ツバメの尾特異点) であるための必要十分条件は, γ が p において $\kappa^{-1}(0)$ と 2 点接触 (resp. 3 点接触) を持つことである. さらに,

- (1) p が ν の折り目特異点 $\implies f$ のガウス曲率 K は p で有理的有界だが有理的連続でない.
- (2) p が ν のカスプ特異点またはツバメの尾特異点 $\implies K$ は p において有理的連続.

次に, 波面 f のガウス曲率 K がカスプ辺 p の近くで有界となる場合を考える. このとき, p を通る特異曲線 γ に沿って極限法曲率 κ_ν が恒等的に零になる ([18, Theorem 3.9], [24, Theorem 3.1]). さらに, p の近くで f のガウス写像 ν の特異点集合と f の特異点集合が一致する. すなわち, γ が放物点曲線となっている.

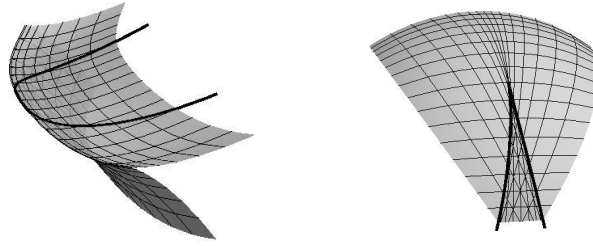


図 3: 特異ローカスが曲率線となるカस्प辺 (左) とそのガウス写像 (右). 太い曲線は放物点曲線の像であり, カस्प辺の特異曲線と 2 点接触を持つ.

命題 4.11 ([30, Proposition 3.12]). $f : \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$ を波面, $p \in \Sigma$ を f のカस्प辺, $\nu : \Sigma \rightarrow S^2$ を f のガウス写像とする. f のガウス曲率 K が p の十分小さな近傍上で有界であると仮定する. このとき,

- (1) p が ν の折り目特異点 $\iff \kappa_t(p) \neq 0$ かつ $4\kappa_t(p)^2 + \kappa_s(p)\kappa_c(p)^2 \neq 0$ が成立.
- (2) p が ν のカस्प特異点 $\iff \kappa_t(p) = 0, \kappa'_t(p) \neq 0$ かつ $\kappa_s(p) \neq 0$ が成立.

これと類似の特徴づけが, 3 次元双曲空間 H^3 や 3 次元 de Sitter 空間 S_1^3 内の (空間的) 平坦波面及び, H^3 内の Bryant 型線形 Weingarten 波面に対して知られている ([16, 23]).

参考文献

- [1] V. I. Arnol'd, S. M. Gusein-Zade and A. N. Varchenko, *Singularities of differentiable maps. Vol. I.*, Monographs in Mathematics, **82**. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1985.
- [2] T. Banchoff, T. Gaffney and C. McCrory, *Cusps of Gauss mappings*, Research Notes in Mathematics **55**, Pitman, 1981.
- [3] J. W. Bruce, P. J. Giblin and F. Tari, *Families of surfaces: focal sets, ridges and umbilics*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **125** (1999), 243–268.
- [4] J. W. Bruce and F. Tari, *Extrema of principal curvature and symmetry*, Proc. Edinburgh Math. Soc. **39** (1996), 397–402.
- [5] S. Fujimori, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Singularities of maximal surfaces*, Math. Z. **259** (2008), 827–848.
- [6] T. Fukui and M. Hasegawa, *Singularities of parallel surfaces*, Tohoku Math. J. **64** (2012), 387–408.
- [7] T. Fukunaga and M. Takahashi, *Framed surface in the Euclidean space*. Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.) (2018).
- [8] M. Hasegawa, A. Honda, K. Naokawa, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Intrinsic properties of surfaces with singularities*, Internat. J. Math. **26**, No. 4 (2015), 34pp.
- [9] S. Honda and M. Takahashi, *Framed curves in the Euclidean space*, Adv. Geom. **16** (2016), no. 3, 265–276.
- [10] S. Izumiya, M. C. Romero Fuster, M. A. S. Ruas and F. Tari, *Differential Geometry from a Singularity Theory Viewpoint*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2016.
- [11] S. Izumiya and K. Saji, *The mandala of Legendrian dualities for pseudo-spheres in Lorentz-Minkowski space and “flat” spacelike surfaces*, J. Singul. **2** (2010), 92–127.

- [12] S. Izumiya, K. Saji and M. Takahashi, *Horospherical flat surfaces in hyperbolic 3-space*, J. Math. Soc. Japan **62** (2010), 789–849.
- [13] S. Izumiya, K. Saji and N. Takeuchi, *Singularities of line congruences*, Proc. of the Royal Soc. of Edinburgh Ser. A **133** (2003), no. 6, 1341–1359.
- [14] S. Izumiya, K. Saji and N. Takeuchi, *Flat surfaces along cuspidal edges*, J. Singul. **16** (2017), 73–100.
- [15] M. Kokubu, W. Rossman, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Singularities of flat fronts in hyperbolic space*, Pacific J. Math. **221** (2005), 303–351.
- [16] M. Kokubu and M. Umehara, *Orientability of linear Weingarten surfaces, spacelike CMC-1 surfaces and maximal surfaces*, Math. Nachr. **284** (2011), no. 14-15, 1903–1918.
- [17] L. F. Martins and K. Saji, *Geometric invariants of cuspidal edges*, Canad. J. Math. **68** (2016), 445–462.
- [18] L. F. Martins, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Behavior of Gaussian curvature and mean curvature near non-degenerate singular points on wave fronts*, Geometry and Topology of Manifolds, 247–281, Springer Proc. Math. Stat., **154**, Springer, Tokyo, 2016.
- [19] S. Murata and M. Umehara, *Flat surfaces with singularities in Euclidean 3-space*, J. Differential Geom. **221** (2005), 303–351.
- [20] K. Naokawa, M. Umehara and K. Yamada, *Isometric deformations of cuspidal edges*, Tohoku Math. J. **68** (2016), 73–90.
- [21] R. Oset Sinha and F. Tari, *On the flat geometry of the cuspidal edge*, to appear in Osaka J. Math., arXiv:1610.08702.
- [22] I. R. Porteous, *Geometric differentiation*, Cambridge University Press, 2001.
- [23] K. Saji and K. Teramoto, *Dualities of geometric invariants on cuspidal edges on flat fronts in the hyperbolic space and the de Sitter space*, arXiv:1806.07065.
- [24] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *The geometry of fronts*, Ann. of Math. **169** (2009), 491–529.
- [25] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *A_k singularities of wave fronts*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **146** (2009), 731–746.
- [26] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *The duality between singular points and inflection points on wave fronts*, Osaka J. Math. **47** (2010), 591–607.
- [27] K. Teramoto, *Parallel and dual surfaces of cuspidal edges*, Differential Geom. Appl. **44** (2016), 52–62.
- [28] K. Teramoto, *Principal curvatures and parallel surfaces of wave fronts*, to appear in Adv. Geom., arXiv:1612.00577v2.
- [29] K. Teramoto, *Focal surfaces of wave fronts in the Euclidean 3-space*, to appear in Glasgow Math. J., arXiv:1804.06123.
- [30] K. Teramoto, *Singularities of Gauss maps of wave fronts with non-degenerate singular points*, arXiv:1806.08140.
- [31] H. Whitney, *On singularities of mappings of Euclidean spaces. I. Mappings of the plane into the plane*, Ann. of Math. **62** (1955), 374–410.