3次元多様体とKlein群 Thurstonの発想を今一度振り返る

大鹿健一　(大阪大学)

1. 序

ここ40年程度の間，3次元多様体とKlein群の研究は，大きな流れとしては，Thurstonによる1980年代の研究の方向付け（典型的には[24]に見られる未解決問題のリスト．これについては[20, 30]を参照せよ）により動いてきたといっても過言では無かろう．Thurstonの問題達が一部を除いて大方解かれた現在，Thurston以前の3次元多様体論，Klein群論の状況から始めて，もう一度この流れを振り返ってみることも有意義かと思い，本講演のテーマに据えた．現時点から過去の研究を振り返る場合，今持っている知識を通して過去を見てしまい，その時点考えられていたことを追体験できないというのがありがちな陥穽であるが，心して現時点の見方と当時の見方を分けて考えていこうと思う．

2. Thurston以前の3次元多様体論

3次元多様体の研究は19世紀にPoincaré, Heegaardらにより始められた．Pincaréは有名なPoincaréホモロジー球面を構成したこと，いわゆるPoincaré予想を提出したことのみならず，S^1上のトーラス束の同相類を決定する仕事をしていることに注目すべきである．この時点で既に3次元多様体の同相類を決定するという現在にまで至る問題意識が芽生えていたわけである．その後20世紀前半にかけて，多様体論の完成，ホモロジー，ホモトピーなどの理論の整備が進むのであるが，3次元多様体については，Dehn, Alexander, Kneser, Seifertらによりその後に繋がる先駆的な研究が行われた．

3次元多様体の組織だった本格的な発展は1950年代のPapakyriakopoulos [21]によるDehnの補題，ループ定理，球面定理の証明に始まる．これらの結果により，3次元多様体をその中に埋め込まれた曲面を通じて研究するという方向が発展した．Kneser [12]による3次元多様体の素分解の理論は，戦前の研究であるが，Milnor [15]はこの分解の一意性を示した．これにより，3次元多様体の同相類の研究という意味では，素なもののみを考えれば良いと言うことがわかった．当時はまだPoincaré予想が解けていないので，非自明なホモトピー球面（あるいはホモトピー球体）が存在する可能性があると思われていたわけであるが，それを除外した問題を考えるという意味で，3次元多様体の中で，2次元球面がかならず球体の境界になるという場合を考え，そのようなとき3次元多様体を既約であると呼ぶことにした．

さらにHaken, Waldhausenの仕事により，非圧縮曲面の重要性が認識されるようになった．ここで向き付け可能な3次元多様体M内の向き付け可能曲面Sが非圧縮曲面であるとは，Sが球面ではなくて（円板は許す），包含写像から誘導される準同型$\pi_1(S) \to \pi_1(M)$が単射であることとする．この概念はより一般に（球面，円板以外の）曲面からMへのproperなはめ込みにも用いる．Hakenのこの時期の仕事は，Poincaré予想を解こうとする意図が強いのであるが，[4]で非圧縮曲面の有用性が示されている．Waldhausen [28]は，その後の3次元多様体論で目指すものの雛形となる次の重要な定理を示した．

なお今後多様体は全て向き付け可能なもののみを考えることにする．

定理 2.1 (Waldhausen [28]). M, N を既約な3次元閉多様体として，M は非圧縮曲面を含むとする．$f : M \to N$ がホモトピー同値写像であるとすると，f を同相写像にホモトピックである．

この定理の証明では，非圧縮曲面を用いて3次元多様体を切り開いて，順次単純な形にしていく手法，階層構造が用いられている．この手法は後のThurstonの一意化定理でも本質的な役割を果たしている．3次元多様体が境界を持つ場合も同様の手法が使えて，定理2.1は次の形に一般化される．境界を持つ場合は，3次元球体以外については，境界の中にホモトピックでない非圧縮曲面は常に存在することがわかるので，その存在に関する仮定は不要であることに注意する．

定理 2.2 (Waldhausen [28]). M, N を既約な3次元コンパクト境界付多様体とする．$f : M \to N$ をホモトピー同値写像で，∂M の各連結成分 S について，∂N のある連結成分 T が存在して，$f_{\#}\pi_1(S)$ は $\pi_1(N)$ の中で $\pi_1(T)$ に共役であるとする．このとき，f は同相写像にホモトピックである．

Jaco [5] らに倣い，非圧縮曲面を含む既約なコンパクト多様体をHaken多様体と呼ぶことにする．

その後非圧縮曲面のうち，トーラスとアニュラスは特別な役割をすることが認識されてきた．例えばPapakyriakopoulosの定理と同じように，非圧縮的なトーラスやアニュラスのはめ込みがあるとき埋め込みでも実現できるかということは問題とされてきた．そのような問題の最終的な結実として現れたのがJaco-Shalen-Johannsonの理論であり([6, 7])，また定理2.2における境界成分の基本群に関する条件を外すと何が生じるかと言うことの解明にもつながった．まず閉多様体の場合についてJaco-Shalen-Johannsonの結果を述べる．

定理 2.3 (Jaco-Shalen-Johannson [6, 7]). M を既約な3次元閉多様体とする．M の中に埋め込まれた3次元部分多様体 Σ で次の性質を持つものが，アイソトピーの範囲で唯一存在する．

(i) Σ の各成分はSeifertファイバー空間である．

(ii) $\mathrm{Fr}\Sigma$ の各成分は非圧縮的トーラスである．

(iii) トーラス T から M への任意の非圧縮的なはめ込みは，Σ の中への写像にホモトピックである．

境界があり，非圧縮的な場合には次のように一般化される．

定理 2.4 (Jaco-Shalen-Johannson [6, 7]). M を既約なコンパクト3次元多様体で ∂M は非圧縮的とする．M の中に埋め込まれた3次元部分多様体 Σ で次の性質を持つものが，アイソトピーの範囲で唯一存在する．

(i) Σ の各成分 Ξ は次のいずれかである．いずれの場合も $\mathrm{Fr}\Xi$ は非圧縮的であり，∂M の中にホモトピックでない．

　(a) $\Xi \cap \partial M$ が非特異ファイバーの和集合であるアニュラスかトーラスであるようなSeifertファイバー空間である．

(b) $\Xi \cap \partial M$ が付随した ∂I-束であるような I-束になっている．

(c) Ξ はソリッドトーラスで，$\Xi \cap \partial M$ は境界上のアニュラスになっている．

(ii) トーラス T から M への任意の非圧縮的なはめ込みは，Σ の連結成分で (ia) のタイプのものの中への写像ににホモトピックである．

(iii) アニュラス A から M への任意の非圧縮的で proper な (すなわち境界に写されるのは境界であるような）はめ込みは，Σ のある連結成分の中への写像に相対的にホモトピックである．

この定理の Ξ と $\Xi \cap \partial M$ の対を M の特性対と呼ぶ．特に (a) のものを Seifert 対，(b) のものを I-対，(c) のものをソリッドトーラス対と呼ぶ．この定理を用いて，定理2.1は次のように精密化された．

定理 2.5. M, N をコンパクト既約で非圧縮的境界を持つ3次元多様体とする．$f : M \to N$ をホモトピー同値写像として，Ξ を M の特性対とする．すると，f に次のホモトピー同値写像を有限個手前から合成することにより，同相写像にホモトピックになる．

(i) I 対について束が積束の場合にアニュラスに沿って上下を入れ替えるホモトピー同値．

(ii) ソリッドトーラス対で M を切り開き，ソリッドトーラス対へのアニュラスに沿った貼り合わせの順番を変えるホモトピー同値写像．

3. Thurston以前のKlein群論

Klein 群という概念は，Poincaré が Klein の研究に現れる群について命名したもので，19 世紀から存在するが，その本格的な研究は戦後 Ahlfors, Bers らにより始められた．一般に $\mathrm{PSL}_2\mathbb{C}$ の離散部分群を Klein 群と呼ぶが，当初研究対象となっていたのは $\hat{\mathbb{C}}$ への作用として，不連続領域をもつものであった．例えば Ahlfors は [1] で有限生成 Klein 群について，不連続領域を群で商を取ると，有限型 Riemann 面になることを示している．Bers [2] は Teichmüller 理論の高次元化として，擬 Fuchs 群の空間を考え，それが Teichmüller 空間 2 つの直積でパラメータ付けできることを示した．

より詳しく述べると次のようなことである．S を種数 2 以上の閉曲面として，$\rho : \pi_1(S) \to \mathrm{PSL}_2\mathbb{R}$ を Fuchs 群表現とする．ρ を $\hat{\mathbb{C}}$ の擬等角同相写像で共役をとることにより得られる Klein 群を擬 Fuchs 群（表現）という．$\pi_1(S)$ の擬 Fuchs 群表現全体を $\mathrm{PSL}_2\mathbb{C}$ の共役で移り合うものを同一視して得られる商空間に，表現全体の作る空間から誘導される位相を入れたものを擬 Fuchs 空間とよび，$QF(S)$ で表す．Bers は S の Teichmüller 空間 2 つの積，$\mathcal{T}(S) \times \mathcal{T}(\bar{S})$（2 つめの成分は自然な標識が向きを反転するので $^-$ をつけてある）から $QF(S)$ への同相写像があることを示したのである．以降この写像を $qf : \mathcal{T}(S) \times \mathcal{T}(\bar{S}) \to QF(S)$ と表そう．

Bers はさらに [3] において，$qf(\{m_0\} \times \mathcal{T}(\bar{S}))$ という形の切片を考え，その指標多様体での閉包を考えると，その境界には $\pi_1(S)$ により不変な不連続領域の連結成分をただ一つ持つような Klein 群, b-群への表現が現れることを示した．Baire の定理から，この境界のほとんど全ての群は幾何的無限，すなわち対応する双曲多様体が不連続領域の商によって塞がれない end を持っている．これは幾何的無限群の初めての構成であ

るが，のちに幾何学的無限群の幾何的構造はThurstonにより詳しく調べられることになる．

1970年代になると曲面群より複雑な構造をもつKlein群についての研究がMaskit, Mardenらによって進められた．MaskitはKlein-Maskitの組み合わせ定理と呼ばれる，Klein群から群として融合積やHNN拡大に同型なKlein群を構成する方法を与えた．（理論の全体像は彼の書いた本[14]で見られる．）この方法はThurstonの一意化定理の証明の基本をなしている．一方Marden [13]はBersの擬Fuchs群のパラメータ付けを一般化して，幾何的有限群は対応する3次元多様体の同相類と，不連続領域の商が決める標識付き等角構造で決定されることを示した．

Klein群の変形空間とは異なった切り口の，むしろ不連続領域がないようなKlein群を扱った仕事も1970年代までにいくつか存在する．より一般のLie群への表現の仕事として，Weil, Calabi, Mostow, Margulisらの大きな仕事があるが，ここではこれらには触れず3次元特有なものを2つ記す．まずRileyによるいくつかの典型的な結び目，絡み目の補空間に双曲構造が入ることを示したものがある．([22]に本人の解説がある.）またJørgensenはconeを持ったトーラスをファイバーとするS^1上のファイバー束に双曲構造を入れ，その分岐被覆としてS^1上の曲面束で非特異な双曲構造が入るものを構成した．これはThurstonの曲面束上に双曲構造を入れる仕事の発想の源であるともいえる．

4. Thurstonの理論，就中一意化定理

Thurstonは1970年代の終わり頃から1980年代にかけて，3次元双曲多様体の研究に革命的な進歩をもたらした．彼が当時証明したいわゆる一意化定理は，以下に詳しく述べるようにHaken多様体について，非圧縮的トーラスを含まなければ，幾何的有限な双曲構造を持つという，とても一般的で壮大な理論を必要とするものである．この時期の彼の講義録[23]を見ると，彼の発想の独創性がよくわかり，現在でも学ぶことが多くあるが，行間が大きく完全に理解するにはかなりの学力を要する．一意化定理についての解説はMorgan [16], 小島 [29]，Kapovich [8] , Otal [19]などがあるが，いずれも大変参考になる．Thurston自身の証明は，7部に及ぶ論文で与えられる予定であったが，実際に出版されたのは，[25]のみで，第2部，第3部についてはプレプリントが存在する[26, 27].

Thurstonの定理をまず有限体積の双曲構造を持つ場合に述べよう．

定理 4.1 (Thurston). *MをHaken多様体で，境界が無いか，トーラス達からなり，境界にホモトピックでない非圧縮トーラスを含まないとする．このときMの内部には完備な双曲計量が入る．*

この定理は閉あるいは境界がトーラス達からなるHaken多様体について，§2で説明したJaco-Shalen-Johannsonの分解を考えれば，Seifertファイバー空間になる部分以外には，内部に双曲計量が入ることを示している．Seifertファイバー多様体には双曲計量以外のいわゆる幾何構造がはいるので，この定理はHaken多様体は幾何構造の入るピースに非圧縮的トーラスで分解できると言うことを言っている．

この定理の証明は，MがS^1上の曲面束である場合を除くと，大枠としては§2に現れたWaldhausenの階層構造の理論を使って帰納法で行われた．

Mが曲面束の場合の証明は[26]に比較的詳しく書かれている．また完全な証明もOtal [18]に見ることができる．証明はいわゆる2重極限定理を核としている．この定理自体

が大変興味深いもので，かつこの定理の他の Klein 群への一般化も重要な意味を持つ (Kleineidam-Souto [11], Kim-Lecuire-Ohshika [10]) が，ここでは曲面束以外の場合に焦点を当てる．

帰納法として証明するのは次の一般化された形の定理である．

定理 4.2 (Thurston). M をコンパクトで既約な 3 次元多様体で非圧縮的トーラスを含まないものとする．このとき $\mathrm{Int}M$ は有限体積な双曲凸多様体の内部に同相である．別の言い方をすると，幾何的有限な Klein 群 G があり，$\mathrm{Int}M$ は $\mathbb{H}^3/G$ に同相である．

このような双曲構造を幾何的有限構造と呼ぶことにしよう．さて帰納法の各段階では Maskit の組み合わせ定理を使い一段階前で存在するとした幾何的有限構造を貼り合わせていくのであるが，一般のステップでは貼り合わせる面は一段階前の多様体の境界の一部である．一方帰納法の最終段階では貼り合わせる面は（トーラス成分を除いた）境界全体になる．実は議論としてはこの最終段階の場合が本質的な部分を全て含んでおり，一般の場合はそれにちょっとした工夫をすることでできる．

帰納法の最終段階で示すのは以下の命題である．

命題 4.2.1. N を連結成分が 1 つまたは 2 つのコンパクト既約 3 次元多様体として，∂N は非圧縮的で互いに同相な 2 つの成分 S_1, S_2 からなっているとする．N には幾何的有限構造が入っていると仮定する．$\phi : S_1 \to S_2$ を（M から与えられた向きを反転する）同相写像とし，M を S_1 と S_2 を ϕ で同一して得られる多様体とする．M が非圧縮的トーラスを含まないとすると，N の幾何的有限構造を M の幾何的有限構造がそこから Maskit 組み合わせで得られるように選ぶことができる．

この命題を証明する為に Thurston は次のように考えた．Marden の定理により，N の幾何的有限構造の全体は $\mathcal{T}(S_1)\times\mathcal{T}(S_2)$ でパラメータ付けができる．一方 N の $\pi_1(S_i)$ $(i = 1, 2)$ に対応した被覆をとると，擬 Fuchs 群，$G_i\,(i = 1, 2)$ が得られる．擬 Fuchs 群は Bers の定理により，Teichmüller 空間 2 つの直積でパラメータ付けされるので，G_i のパラメータ付けを $\mathcal{T}(S_i) \times \mathcal{T}(\bar{S}_i)$ と表そう．ただしここで第 1 成分は N の境界に現れている方の等角構造を表しているとする．$i = 1, 2$ について，第 2 成分をとることにより，$\sigma\colon \mathcal{T}(S_1) \times \mathcal{T}(S_2) \to \mathcal{T}(\bar{S}_1) \times \mathcal{T}(\bar{S}_2)$ を定義する．ϕ による貼付写像とこれを合成してできる $\phi_* \circ \sigma\colon \mathcal{T}(S_1) \times \mathcal{T}(S_2) \to \mathcal{T}(S_1) \times \mathcal{T}(S_2)$ が固定点を持てば，Maskit の組み合わせが使える．Thurston は次の定理を示すことにより，固定点の存在を導くと主張した．

定理 4.3 (Thurston). ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して，$(\phi_* \circ \sigma)^{n_0}$ は $\mathcal{T}(S_1) \times \mathcal{T}(S_2)$ で有界な像を持つ．

Thurston の証明方針はまず $\phi_* \circ \sigma$ が N の双曲構造全体の変形空間 $AH(N)$ でコンパクトであることを証明し，次に実は幾何的有限構造の外には像はないことを示すというものである．前半の議論には [27] に出ている $AH(N)$ のある種のコンパクト性を示す定理を使い，後半では幾何的無限 Klein 群（この場合擬 Fuchs 群の極限となるものに限る）の end の幾何構造の分析を使うことになっていた．これらのいずれも独創的な議論であり，その後の Klein 群論の発展に大いに役立った．一方で完全な証明は書かれていないのみならず，その後の解説のいずれでもこの定理の証明は埋めることができていない．[8, 19] では一意化定理の証明を完成させているが，この部分ではより弱い次の形の定理を証明している．

定理 4.4 (定理4.3の弱い形). $(m_1, m_2) \in \mathcal{T}(S_1)\times\mathcal{T}(S_2)$ を任意にとると，$\{(\phi_*\circ\sigma)^n(m_1, m_2)\}$ は $\mathcal{T}(S_1) \times \mathcal{T}(S_2)$ で有界である．

定理 4.3 自体の証明は M が非圧縮的トーラスを含まないという仮定の下では，Kent [9] による証明があるが，一般的にはまだ回復できていない．

5. 今振り返ると

Thurston の 3 次元多様体の幾何化という問題は，Perelman により最終的に解決され，前章で述べた一意化定理は今やその特殊な場合と見なすこともできる．Perelman の Ricci 流を用いた議論は，かつて Thurston が錐多様体の変形を用いて orbifold の幾何化予想を証明した議論の一部と類似している．もし Thurston が Haken 多様体の場合を最初に考えずに，いきなり計量を変形していく方向の議論をしていたとすると，その後の Klein 群の隆盛は無かったかもしれず，彼が Haken 多様体の一意化をこのような形で考えてくれたのは大変有り難い話である．一方彼の元々の証明は現時点でも不完全と思われるところがある．実際 [27] の主定理の主張はそのままでは誤りである（[17]）．また前章に触れたように定理 4.3 の証明は回復できていない．しかしながら [27] の定理については，一意化定理の証明に必要なようには修正することができ，また定理 4.3 も現在の高度な Klein 群論を使えば証明可能と思われる．これらについては講演で時間があれば触れる．

参考文献

[1] Ahlfors, L. V. Finitely generated Kleinian groups. *American Journal of Mathematics 86* (1964), 413–429.

[2] Bers, L. Simultaneous uniformization. *Bulletin of the American Mathematical Society 66*, 2 (1960), 94–97.

[3] Bers, L. On boundaries of Teichmüller spaces and on Kleinian groups. I. *Annals of Mathematics. Second Series 91* (1970), 570–600.

[4] Heken, W. Some results on surfaces in 3-manifolds. In *Studies in Modern Topology.* Math. Assoc. Amer. (distributed by Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1968, pp. 39–98.

[5] Jaco, W. *Lectures on three-manifold topology*, vol. 43 of *CBMS Regional Conference Series in Mathematics.* American Mathematical Society, Providence, R.I., 1980.

[6] Jaco, W. H., and Shalen, P. B. Seifert fibered spaces in 3-manifolds. *Memoirs of the American Mathematical Society 21*, 220 (1979), viii–192.

[7] Johannson, K. *Homotopy Equivalences of 3-Manifolds with Boundaries*, vol. 761 of *Lecture Notes in Mathematics.* Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1979.

[8] Kapovich, M. *Hyperbolic manifolds and discrete groups.* Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, Boston, 2009.

[9] Kent, R. P. Skinning maps. *Duke Mathematical Journal 151*, 2 (Feb. 2010), 279–336.

[10] Kim, I., Lecuire, C., and Ohshika, K. Convergence of freely decomposable Kleinian groups. *Inventiones mathematicae 204*, 1 (2015), 83–131.

[11] Kleineidam, G., and Souto, J. Algebraic convergence of function groups. *Commentarii Mathematici Helvetici 77*, 2 (2002), 244–269.

[12] Kneser, H. Geschlossen flachen in dreidimensionalen mannigfaltigkeiten. *Jcahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigu 38*, 248-260 (1929).

[13] Marden, A. The geometry of finitely generated kleinian groups. *Annals of Mathematics. Second Series 99*, 3 (1974), 383–462.

[14] Maskit, B. *Kleinian Groups*, vol. 287 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften.* Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1983.

[15] Milnor, J. A unique decomposition theorem for 3-manifolds. *American Journal of Mathematics 84*, 1 (1962), 1–7.

[16] Morgan, J. W. On Thurston's uniformization theorem for three-dimensional manifolds. In *The Smith conjecture (New York, 1979)*. Academic Press, Orlando, FL, 1984, pp. 37–125.

[17] Ohshika, K. Degeneration of marked hyperbolic Structures in dimensions 2 and 3. In *Handbook of group actions*, L. Ji, A. Papadoupoulos, and Y. Shing-Tung, Eds., vol. III. International Press, 2018, pp. 13–35.

[18] Otal, J.-P. Le théorème d'hyperbolisation pour les variétés fibrées de dimension 3. *Astérisque*, 235 (1996), x–159.

[19] Otal, J.-P. Thurston's Hyperbolization of Haken Manifolds. *Surveys in Differential Geometry 3*, 1 (1996), 77–194.

[20] Otal, J.-P. William P. Thurston: "Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry". *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 116*, 1 (Feb. 2014), 3–20.

[21] Papakyriakopoulos, C. On Dehn's lemma and the asphericity of knots. *Annals of Mathematics 66* (1957), 1–26.

[22] Riley, R. An elliptical path from parabolic representations to hyperbolic structures. In *Topology of low-dimensional manifolds (Proc. Second Sussex Conf., Chelwood Gate, 1977)*. Springer, Berlin, 1979, pp. 99–133.

[23] Thurston, W. *The Geometry and Topology of Three-manifolds: Lecture Notes from Princeton University 1978-80*. Mathematical Sciences Research Institute, notes taken by Kerckhoff, S. and Floyd, W.J., 1978-1980.

[24] Thurston, W. P. Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry. *American Mathematical Society. Bulletin. New Series 6*, 3 (1982), 357–381.

[25] Thurston, W. P. Hyperbolic structures on 3-manifolds. I. Deformation of acylindrical manifolds. *Annals of Mathematics 124*, 2 (1986), 203–246.

[26] Thurston, W. P. Hyperbolic Structures on 3-manifolds, II: Surface groups and 3-manifolds which fiber over the circle. *arXiv.org* (Jan. 1998).

[27] Thurston, W. P. Hyperbolic Structures on 3-manifolds, III: Deformations of 3-manifolds with incompressible boundary. *arXiv.org* (Jan. 1998).

[28] Waldhausen, F. On Irreducible 3-manifolds which are sufficiently large. *The Annals of Mathematics 87*, 1 (1968), 56.

[29] 小島定吉. サーストンの怪物定理について. 数学 *34*, 4 (1982), 301–316.

[30] 大鹿健一. Klein 群の幾何とその応用. 数学 *69*, 3 (2017), 280–293.