Gauge theory for families of 4-manifolds

今野北斗　(東京大学・学振DC)*

1. 序

本稿では，4次元多様体の連続族に対してゲージ理論を展開する「族のゲージ理論」の紹介を行う．

一般にトポロジー・幾何学において，ある対象の連続族の研究は基本的である．族の研究は，多くの場合，ひとつの対象の変形の自由度の研究，あるいは自己同型群の研究に言い換えられる．例えば，アイソトピーで2つの対象が結べるか否かを考えることは変形の自由度の研究の典型例であり，対象を束ねて得られるバンドルの特性類の研究は，自己同型群の分類空間のコホモロジーの研究に他ならない．これらはいずれもトポロジーの古典的な興味の対象である．

一方，1982年のDonaldsonのブレイクスルー以降，ゲージ理論は，古典的なトポロジーの手法を真に超えた解析的な道具立てを4次元トポロジーにもたらしてきた．そのゲージ理論を，4次元多様体の族にまで拡張すると，どのような現象が捉えられるのであろうか．そして，族に対するゲージ理論はどのような理論的な広がりを持ち得るのであろうか．これが本稿のテーマである．

族に対するゲージ理論の最初の著名な研究は，1998年に始まるRuberman [23–25] によるものである．Rubermanは，1次元空間にパラメトライズされた4次元多様体の族に対してゲージ理論を展開し，いくつかの興味深い応用を与えた．当然期待される次のステップは，高次元のパラメータ空間でパラメトライズされた族に対するゲージ理論の研究である．しかし，Rubermanの結果や議論の応用に関する研究はその後いくつかなされたものの，一般論の可能性を追求する方向は長らく発展しなかった．本稿では，族のゲージ理論の一般論の構築と応用に関する講演者の研究 [11–14]，とりわけ族のゲージ理論による4次元多様体束の特性類の研究 [14] を中心に紹介する．その基調を成す哲学は，Mumford–森田–Miller類に代表される特性類の理論の無限次元化である．

2. ゲージ理論とトポロジー：不変量と制約

族のゲージ理論の議論に入る前に，まずは通常の（すなわちパラメトライズされていない）ゲージ理論をトポロジーに応用する際の方法論がどのようなものなのかを説明する．その基本的な手順は，荒く述べると次のようにまとめられる．

ステップ 1： Yang–Mills反自己双対方程式あるいはSeiberg–Witten方程式を，与えられた4次元多様体の上で立式する．（そのためには，Riemann計量などの非トポロジカルな付加データを固定する必要がある．）

ステップ 2： これらは非線形偏微分方程式であるが，その解空間はgenericには無限次元多様体になる．ここにゲージ変換群と呼ばれる無限次元群が作用している．この作用で解空間の商を取る．この商はモジュライ空間と呼ばれ，(genericityの下で) 有限次元多様体となる．

本研究はJSPS科研費16J05569および数物フロンティア・リーディング大学院の助成を受けたものである．

*e-mail: hkonno@ms.u-tokyo.ac.jp

ステップ 3： モジュライ空間の幾何学的性質から，元々偏微分方程式を立式する舞台であった4次元多様体の情報を引き出す．

ステップ3をより詳しく述べると，モジュライ空間からの情報の引き出し方には，大別すると次の2つのタイプがある．

- 方法1：モジュライ空間の情報を用いて不変量を定義し，多様体の区別に用いる[1]．
- 方法2：モジュライ空間の性質から，4次元多様体の古典的な不変量（典型的には交叉形式）に何らかの制約を与える．

方法1・方法2に基づく不変量・4次元多様体への制約の典型例を下の表に挙げる[2]．

方法1：不変量	方法2：制約
Donaldson 不変量 [7], Seiberg–Witten 不変量 [26], Bauer–Furuta 不変量 [4], ⋮	Donaldson の対角化定理 [5], 随伴不等式 [16], 古田の 10/8 不等式 [10], ⋮

方法1で考察されているような不変量を用いると，互いに同相であるが微分同相ではない，所謂エキゾチックな4次元多様体の2対を detect できるのであった．

注意 1 与えられた4次元多様体に対して，方法1で述べているような不変量が非自明であれば，多くの場合（方法2で述べているような）何らかの制約を出すこともできる．その理由は次の通りである．ゲージ理論的不変量の定義の多くは，モジュライ空間の数え上げによるものであり，特に不変量が非自明であれば，どんな付加データに対してもモジュライ空間が空でないことが帰結される．このこと自体が多くの幾何学的情報を持っており，4次元多様体に制約を与える．しかし，不変量が消えている（あるいはそもそも定義できない）場合であっても，方法2は通用する，すなわち4次元多様体に制約を与える議論のみは可能である場合もしばしばある．Donaldson の対角化定理はその例である．

3. 族のゲージ理論とトポロジー

次に，族のゲージ理論において，2節で述べた2つの方法，すなわち4次元多様体の不変量の構成と4次元多様体に制約を与える議論はどのように拡張されるかを述べよう．

3.1. 方法1：不変量

現時点で知られている，方法1の族版，すなわち族のゲージ理論の不変量は以下の通りである：

1. 4次元多様体の自己微分同相写像に対する整数値不変量 (Ruberman [23–25])

[1] 方法1を用いる場合は，最終的に得られた不変量が，上の手順のステップ1で取った付加データの選び方に依らないことの証明が必要となる．

[2] この表における Bauer–Furuta 不変量と古田の 10/8 不等式に関しては，モジュライ空間ではなく，偏微分方程式に対応する無限次元空間の間の写像そのものを用いる．また，表の左右は必ずしも厳密に対応しているわけではない．例えば Seiberg–Witten 理論を用いても Donaldson の対角化定理は証明できる．

2. spin^c 4次元多様体の族に対する整数値不変量 (Li–Liu [17])

3. 4次元多様体束の特性類 (K. [14])

ここで3の4次元多様体束の特性類について正確に述べておく．本稿の考察対象は4次元多様体の族であるが，多様体の族として最もリーズナブルなクラスのひとつはファイバー束であろう．そしてファイバー束に対するトポロジカルな不変量として最も代表的なものは特性類である．これをゲージ理論を用いて構成したい．族のゲージ理論を用いて4次元多様体束の特性類の構成ができるのではないかということは，1990年ごろからDonaldson [6,8]が示唆していた．ここで述べる講演者の構成[14]はその一つの実現を与えるものである．また，2015年のトポロジーシンポジウムにおいて森田茂之が提起した，次の問題に対するひとつの解答を与えるということも，講演者のひとつのモチベーションであった：

問 1 (森田茂之 [19]**)** Euler類を真に超える特性類は存在するだろうか？具体的問いとしては，微分可能な閉多様体Mをファイバーとするファイバーバンドルの“異種特性類”（古典的な理論では説明できない特性類）をできるだけ多く構成せよ．

ここで説明する特性類が如何なる意味でEuler類を超えているかを一言で述べれば，ゲージ理論に基づく特性類はEuler類の無限次元化を考えることにより定義される，ということである．すなわち，曲面束のMumford–森田–Miller類のような，Euler類に基づいて定義される多様体束の特性類の構成の無限次元化を行うことにより定義がなされる．$SO(3)$-Yang–Mills方程式に基づく特性類とSeiberg–Witten方程式に基づく特性類の2種類が定義できるのであるが，基本的には平行しているため，計算例の多いSeiberg–Witten方程式に基づく特性類のみここでは述べる．Xを向き付けられた4次元閉多様体とする．$\mathrm{Diff}^+(X)$をX上の向きを保つ自己微分同相写像のなす群とする．$\mathfrak{s}$をX上のひとつのspin^{c}構造の同型類とし，

$$\mathrm{Diff}(X,\mathfrak{s}) := \left\{\, f \in \mathrm{Diff}^+(X) \;\middle|\; f^*\mathfrak{s} = \mathfrak{s} \,\right\}$$

とおく．また，$\mathcal{O}$をXのひとつのホモロジー的向き (homology orientation)，すなわちベクトル空間$H^1(X;\mathbb{R})\oplus H^+(X;\mathbb{R})$のひとつの向きとする．ここで$H^+(X;\mathbb{R})$は$H^2(X;\mathbb{R})$の交叉形式に関して正定値な最大次元の部分空間であり，以下その次元を$b^+(X)$と書く．$\mathrm{Diff}(X,\mathfrak{s})$の部分群$\mathrm{Diff}(X,\mathfrak{s},\mathcal{O})$を

$$\mathrm{Diff}(X,\mathfrak{s},\mathcal{O}) := \{\, f \in \mathrm{Diff}(X,\mathfrak{s}) \mid f^*\mathcal{O} = \mathcal{O} \,\}$$

で定める．さて，spin^{c}構造（の同型類）$\mathfrak{s}$に対しては，形式的次元$d(\mathfrak{s})$と呼ばれる整数が定まった．これはXの特性数を用いて具体的に書けるもので，$(c_1(\mathfrak{s})^2 - 2\chi(X) - 3\mathrm{sign}(X))/4$で与えられる．($d(\mathfrak{s})$のゲージ理論的な意味は4節で説明する．)

定理 1 (K. [14]**)** nを非負整数とし，$b^+(X) \geq n+2$かつ$d(\mathfrak{s}) = -n$と仮定する．このとき，コホモロジー類

$$\mathbb{SW}(X,\mathfrak{s}) \in H^n(B\mathrm{Diff}(X,\mathfrak{s});\mathbb{Z}/2)$$

および

$$\mathbb{SW}(X,\mathfrak{s},\mathcal{O}) \in H^n(B\mathrm{Diff}(X,\mathfrak{s},\mathcal{O});\mathbb{Z})$$

を，Seiberg–Witten方程式のn次元の族を用いて構成できる．

定理1の不変量はSeinerg–Witten不変量の族版である．すなわち，定理1において$n=0$とすると，$\mathbb{SW}(X,\mathfrak{s},\mathcal{O})$, $\mathbb{SW}(X,\mathfrak{s})$はそれぞれ通常のSeinerg–Witten不変量およびその mod 2に一致する．

例 1 定理1のコホモロジー類が非自明になるようなXの例は存在する．例えば，Xが単連結で$\mathfrak{s}$がスピン構造から来るspin^c構造の場合$\mathrm{Diff}(X,\mathfrak{s})=\mathrm{Diff}^+(X)$であるが，

$$\mathbb{SW}(K3\#n(S^2\times S^2),\mathfrak{s}_{\mathrm{spin}})\neq 0 \text{ in } H^n(B\mathrm{Diff}^+(K3\#n(S^2\times S^2));\mathbb{Z}/2)$$

が成立することが確かめられる．ここで$\mathfrak{s}_{\mathrm{spin}}$は$K3\#n(S^2\times S^2)$のスピン構造から来る$\mathrm{spin}^c$構造である．ここで，$n>0$ならば，$K3\#n(S^2\times S^2)$に対する従来のゲージ理論的不変量，すなわちDonaldson不変量やSeiberg–Witten不変量は消滅している．しかし族に対する不変量は消えていないのである．

定理1の証明，すなわち特性類の構成のアイデアは5節で説明する．ここではまず，族のゲージ理論の不変量のひとつの応用例を説明したい．2節で述べたように，通常のゲージ理論の不変量を用いると，エキゾチックな現象をdetectできるのであった．このような現象の族版のひとつの候補として，次のようなものが考えられる．4次元多様体Xをファイバーとする二つのファイバー束$X\to E_i\to B$ $(i=1,2)$が与えられたとする．ただし，E_iの構造群GはXの微分同相群$\mathrm{Diff}(X)$（あるいはその適当な部分群）とする．このとき，少なくとも論理的には，

E_1とE_2が位相的には同型だが滑らかな範疇では同型ではない

可能性がある．より正確には，E_iの構造群をXの同相群$\mathrm{Homeo}(X)$に取り替えたとき両者は同型なバンドルだが，G-束としては同型でない可能性がある．そして実際，Ruberman [23]や講演者[14]の族のゲージ理論の不変量を用いると，そのような現象をdetectすることができる．（このとき考えているE_iの構造群は，適当なspin^c構造（の同型類）$\mathfrak{s}$に対する$\mathrm{Diff}(X,\mathfrak{s})$である．）族のゲージ理論は，いわば**族としてエキゾチックである**という現象を捉えることができるのである．

ひとつの4次元多様体を考えていたときには，「標準的な微分構造」というものは一般には存在しない．しかし，ファイバー束を考えているときは，自明束という標準的な族がある．そこで，上で述べたことの特別な場合として，次のような問いに答えることが，族のゲージ理論の方法1による応用の典型的例となると思われる：

問 2 4次元多様体をファイバーとするファイバー束であって，位相的には自明だが滑らかな範疇では自明でないものをできるだけ多く見つけよ．

現時点では，Ruberman [23]や講演者の不変量[14]を用いてdetectできているこのような族の例は，S^1上の族に限る[3]．しかし，族のゲージ理論をさらに拡張することによって，例えばトーラスT^2上の族であって位相的には自明だが滑らかな範疇では非自

[3]底空間が任意の次元の場合には，与えられた4次元多様体束が位相的に自明であると保証する手段が現時点では不足している．これは，標語的に言えば，Freedman理論の族版の欠如による．近年ではFreedman理論を主たる研究領域としている人は少ないように見受けられるが，4次元位相多様体の族に対してFreedman理論のアナロジーがどれくらい成立するかは興味深い問いであると思われる．「族のFreedman理論」と呼ぶべきものと族のゲージ理論の両方が発展すれば，4次元多様体の同相群と微分同相群の差の理解がより一層進むと期待できる．

明なものを見つけることも可能である．これにはBauer–Furuta不変量の族版を用いる必要がある．

Bauer–Furuta不変量は，Seiberg–Witten不変量の精密化である．Bauer–Furuta不変量を用いると，Seiberg–Witten不変量ではエキゾチック構造の有無の判定が不能な4次元多様体に対し，その上のエキゾチック構造をdetectすることができる場合がある．T^2上の族であって興味深いものをBauer–Furuta不変量の族版でdetectできるのは，大雑把に述べるとこの現象の族版に相当する．

注意 2 このような興味深い例をdetectするために必要な範疇における族のBauer–Furuta不変量の定式化だけであれば，講演者の特性類 [14] 以上の大きな困難はなく理論構成が進む．しかし，期待し得る範囲で可能な限り一般的に定式化を行おうとすると，gerbeと呼ばれるスタックの一種が自然に現れる．これは通常の（すなわちパラメトライズされていない）ゲージ理論には現れないものであり，理論構成自体も興味深い問題となる．

3.2. 方法2：制約

次に方法2の族版を考える．現時点で知られている，方法2の族版，すなわち族のゲージ理論によって4次元多様体の族に制約を与える研究を挙げると以下の通りである：

1. 4次元多様体上の自己微分同相のアイソトピーによる変形への制約 (Ruberman [23])
2. 4次元多様体の自己微分同相写像の交叉形式への作用への制約 (中村 [20])
3. 4次元位相多様体の自己同相写像の不可滑性（中村 [21], Baraglia [3]）
4. 4次元多様体の上の正スカラー曲率計量のなす空間のトポロジーへの制約 (Ruberman [25], K. [13])
5. 4次元多様体に埋め込まれた曲面配位への制約 (K. [11,12])

上の内1, 2, 3は，4次元多様体の自己微分同相写像に対する制約である．微分同相写像は，写像トーラスを経由して，族と結びつく．これはS^1上の族であるが，より一般に，多様体に群作用が与えられると，Borel構成により群の分類空間の上の族が得られる．上の1, 2, 3は，この族に対してゲージ理論を適用して得られた制約と理解することができる．4は少々微分幾何的な応用なのでここでは割愛する．5は，4次元トポロジーにおける古典的な問題のひとつである，最小種数の問題の一般化に対するアプローチを与えるものである．これは様々な機会に説明させていただいたのでここでは省略する.（例えば[15]をご覧いただきたい.）

4. パラメータ付きモジュライ空間

ここで族のゲージ理論の最も原始的なアイデアを説明する．まず，モジュライ空間の**形式的次元**という概念を定義したい．ゲージ理論において扱われる偏微分方程式（Yang–Mills反自己双対方程式あるいはSeiberg–Witten方程式）は，ゲージ群の作用込みで考えると，ある無限次元多様体$\mathcal{B}$上の，あるHilbert空間$\mathcal{H}$をファイバーとする無限次元のベクトル束$\mathcal{H} \to \mathcal{E} \to \mathcal{B}$の切断

$$s : \mathcal{B} \to \mathcal{E} \tag{1}$$

と見なすことができる．この切断の零点集合 $s^{-1}(0)$ が，方程式の解空間をゲージ群で割ったもの，すなわちモジュライ空間である．ここで，各零点 $x \in s^{-1}(0)$ における s の微分 $ds_x : T_x\mathcal{B} \to \mathcal{H}$ が全射となっている状況を generic ということにする[4]．このとき，（無限次元の）陰関数定理から $s^{-1}(0)$ は多様体になるが，Fredholm 性が，$s^{-1}(0)$ が実は有限次元であることを保証する．（モデルとして，有限次元多様体上の有限階数のベクトル束に切断が与えられた状況を念頭において読んでいただきたい．）

generic な状況において，モジュライ空間の $x \in s^{-1}(0)$ における接空間 $T_x(s^{-1}(0))$ は $\mathrm{Ker}\, ds_x$ に同型で，$\mathrm{Coker}\, ds_x = 0$ だから

$$\dim s^{-1}(0) = \mathrm{Ker}\, ds_x - \mathrm{Coker}\, ds_x \tag{2}$$

である．等式 (2) の左辺は本当は $s^{-1}(0)$ の x の近傍における次元と書くべきであるが，いま考えている状況では実は (2) の右辺は x に依らないのでこのまま書くことにする．等式 (2) の右辺は，Fredholm 作用素 ds_x の（解析的）指数に他ならない．以後 (2) の右辺を $\mathrm{ind}\, s$ と書くことにする．$\mathrm{ind}\, s$ 自体は，s が generic であるか否かに拘らず定義できる．この $\mathrm{ind}\, s$ をモジュライ空間の**形式的次元** と呼ぶ．s が generic であれば，形式的次元は真の次元である．形式的次元は，ゲージ理論の方程式を考察しているトポロジカルな状況だけから定まり，Riemann 計量などの付加データには依らない．そして Atiyah–Singer の指数定理により，特性数を用いて具体的に書くことができる．

例 2 X を向き付けられた閉 4 次元多様体とする．

1. $P \to X$ を X 上の主 $SU(2)$ 束とする．（P に関する）Yang–Mills 反自己双対方程式とは，X 上の Riemann 計量を固定したとき，P 上の接続 A を未知関数とする

$$*F_A = -F_A$$

という方程式である．この方程式のモジュライの形式的次元は

$$8c_2(P) - 3(1 - b_1(X) + b^+(X))$$

で与えられる．

2. $\mathfrak{s}$ を X 上の spin^c 構造とする．（$\mathfrak{s}$ に関する）Seiberg–Witten 方程式とは，X 上の Riemann 計量を固定したとき，行列式直線束の接続 A と正のスピノル Φ を未知関数とする

$$\begin{cases} c(F_A^+) = \sigma(\Phi), \\ D_A\Phi = 0 \end{cases}$$

という方程式である．この方程式のモジュライの形式的次元は

$$\frac{1}{4}(c_1(\mathfrak{s})^2 - 2\chi(X) - 3\mathrm{sign}(X))$$

で与えられる．

[4] 本当は可約解を避けるための genericity も必要だが，それはここでは省略する．

ここで特に $\operatorname{ind} s < 0$ の場合を考えてみよう．トポロジカルな問題への応用を考える場合には，方程式の摂動で不変な性質を考えるのが普通であるため，genericity は満たされているとしても一般性は失わない．しかし，形式的次元が負である今は，s が generic であれば，$s^{-1}(0)$ は空である.（モデルとして，有限次元多様体上の有限階数のベクトル束を考えれば，底空間の次元よりもファイバーの次元の方が高い状況に相当する.）空なモジュライ空間からは何ら情報が得られない．したがって，形式的次元が負である場合には，通常のゲージ理論は無力である．ここで族を考える必要が生じる．

B を有限次元の滑らかな多様体とする[5]．B でパラメトライズされた 4 次元多様体 X の連続族，すなわちファイバー束 $X \to E \to B$ が与えられたとしよう．ただし，ゲージ理論を考察するための設定ごと族として与えられたと仮定する.（例えば，$SU(2)$-Yang–Mills 方程式を考察するなら，$SU(2)$ 束 $P \to X$ の族，Seiberg–Witten 方程式を考察するなら，spin^c 構造 $\mathfrak{s}$ の族が与えられたとする.）ここで付加データ（例えば Riemann 計量）の族をひとつ固定すると，ゲージ理論の方程式が B 上でパラメトライズされた状況が得られる．つまり，無限次元ベクトル束とその切断 (1) が B 上でパラメトライズされた状況，すなわち

$$s = \bigsqcup_{b \in B} s_b : \bigsqcup_{b \in B} \mathcal{B}_b \to \bigsqcup_{b \in B} \mathcal{E}_b$$

が手に入る．パラメトライズされた切断の零点集合 $s^{-1}(0) = \bigsqcup_{b \in B} s_b^{-1}(0)$ を考えよう．これをパラメータ付きモジュライ空間 **(parameterized moduli space)** という.（族として）generic な状況では，$\dim(s^{-1}(0)) = \operatorname{ind} s + \dim B$ である.（有限次元のモデルに戻って，有限次元多様体とその上の有限階数のベクトル束が空間 B でパラメトライズされている状況を想像していただきたい.）例えば $\dim B = -\operatorname{ind} s$ であれば，$s^{-1}(0)$ は generic には 0 次元多様体であり，非空になり得る．形式的次元が負の状況でパラメータ付きモジュライ空間を用いる，というのが族のゲージ理論の基本的なアイデアである．

5. 族のゲージ理論に基づく 4 次元多様体束の特性類の構成

ここでは，4 節で説明したことを基に，講演者 [14] による 4 次元多様体束の特性類の構成を説明する．既に述べたように，この特性類の定義のアイデアは，曲面束の Mumford–森田–Miller 類のような多様体束の特性類の構成の無限次元化を行うことである．これを説明するために Mumford–森田–Miller 類の定義を振り返る．少々恣意的であるが，その構成を以下の 2 段階に分けて理解する．$\Sigma \to E \to B$ を曲面束としよう．

ステップ 1： E の "線形化" を考える．すなわち，ファイバーに沿った接束 $\mathbb{R}^2 \to T_{\mathrm{fiber}}E \to E$ を考える．

ステップ 2： 線形化の Euler 類 $e(T_{\mathrm{fiber}}E) \in H^2(E)$ を取る．

この 2 ステップの後，$e(T_{\mathrm{fiber}}E)$ のカップ積を取りファイバー積分を行うことにより Mumford–森田–Miller 類は定義された．ここで，上の 2 ステップの以下のような無限次元化を考える．

ステップ I： 非線形な対象（例えば多様体）の上のある関数空間を考える.（非線形な対象の族が与えられた場合には，関数空間の族を考える.）

[5] 後々この仮定は外す．パラメトライズされた Fredholm 理論を考える際に，パラメータ空間の滑らかさは過剰な仮定であることが，Atiyah–Singer の族の指数の理論 [2] の教えるところである．

ステップ II： 無限次元多様体の上の無限次元ベクトル束 $\mathcal{H} \to \mathcal{E} \to \mathcal{B}$ が（ある非線形な対象の上の関数空間として）与えられたとする．さらにこの無限次元ベクトル束の Fredholm 切断 $s : \mathcal{B} \to \mathcal{E}$ が与えられたとする．このとき，零点集合 $s^{-1}(0)$ を考える．

関数空間を取ることは，非線形な対象のある種の線形化であり[6]，したがってステップ I は確かにステップ 1 の無限次元化である．ステップ II における零点集合 $s^{-1}(0)$ は，"無限次元ベクトル束の Poincaré 双対" を想像すれば，$\mathcal{E}$ の Euler 類に対応する．そして "無限次元の Poincaré 双対" に相当する概念を正当化するために，Fredholm 性が用いられることになる．この哲学自体は，ゲージ理論の登場当初からあるものであるが，通常のゲージ理論を考えている限り，この考え方を前面に押し出さなくとも多くの場合必要な議論ができてしまう．しかし，ゲージ理論を用いた特性類の定義を目標としたとき，上のようなアナロジーは非常に自然な理論構成を与える．

以下特性類の構成の概略を説明する．まず考察する設定を述べる．X を向き付けられた 4 次元閉多様体，$\mathfrak{s}$ をその上の spin^c 構造の同型類とする．n を非負整数とし，$b^+(X) \geq 2$ かつ $d(\mathfrak{s}) = -n$ と仮定する．B を CW 複体とし，$X \to E \to B$ を構造群が $\mathrm{Diff}(X, \mathfrak{s})$ であるようなファイバー束とする．このとき B 上のコホモロジー類 $\mathbb{SW}(E) \in H^n(B; \mathbb{Z}/2)$ を（関手的に）構成することが目標である．特に $E \to B$ として普遍束 $E\mathrm{Diff}(X, \mathfrak{s}) \to B\mathrm{Diff}(X, \mathfrak{s})$ を取って，$\mathbb{SW}(X, \mathfrak{s}) := \mathbb{SW}(E\mathrm{Diff}(X, \mathfrak{s}))$ とおいたものが定理 1 である．(E の構造群が $\mathrm{Diff}(X, \mathfrak{s}, \mathcal{O})$ にまで簡約しているときは整係数の $\mathbb{SW}(E) \in H^n(B; \mathbb{Z})$ を対応させることが目標となるが，議論はほぼ同様に進むので以下 $\mathbb{Z}/2$ 係数で考える．）構成のアイデアをひとことで述べると，障害理論の理論構成を真似することである．障害理論では，然るべき次元の胞体に，胞体上のファイバーを見て得られる写像度を対応させることでコチェインを構成した．この写像度の代わりに，パラメータ付きモジュライ空間の数え上げを対応させるのである[7]．具体的に述べると次のようになる．n-コチェイン $\mathcal{SW}(E, \sigma) \in C^n(B)$，すなわち準同型 $\mathcal{SW}(E, \sigma) : C_n(B) \to \mathbb{Z}/2$ を定義したい．ここで $C_n(B)$ は $\mathbb{Z}/2$ 係数の胞体チェイン群であり，σ は Seiberg–Witten 方程式を書き下すために必要な非トポロジカルなデータ（摂動の族）である．基本的な（しかしこのままでは不正確な）なアイデアは，生成元 $e \in C_n(B)$ に対して

$$\mathcal{SW}(E, \sigma)(e) := \#(\text{the parameterized moduli space on } e \text{ with respect to } \sigma) \tag{3}$$

と定義する，というものである．$d(\mathfrak{s}) = -n$ かつ $\dim e = n$ なことから，(3) の右辺の中身すなわち e 上のパラメータ付きモジュライ空間は，ゼロ次元の多様体，すなわちいくかの点になっていると期待される．さらに，Seiberg–Witten のモジュライのコンパクト性から，これは有限個の点であり，数え上げることができると期待できる．後は障害理論と同様に，$\mathcal{SW}(E, \sigma)$ がコサイクルになっていることを証明し，そしてコホモロジー類 $\mathbb{SW}(E) := [\mathcal{SW}(E, \sigma)]$ が付加データ σ の取り方に依らないと示せばよい．

しかし，(3) の右辺はこのままでは全く意味を持たない．問題点は以下の二つである．第一に，我々の構造群 $\mathrm{Diff}(X, \mathfrak{s})$ は spin^c 4 次元多様体の自己同型群**ではない**というこ

[6] 例えば，多様体への群作用が誘導する関数空間上への無限次元表現は，もとの非線形な作用のある種の線形化と見なされる．

[7] 写像度は Euler 類を用いて定義されるものであった．そしてモジュライ空間の数え上げも無限次元ベクトル束の Euler 類として定義された．この類似が障害理論の真似が上手くいく根拠である．

とである．なぜならば，$\mathrm{Diff}(X,\mathfrak{s})$ はあくまで spin^c 構造の同型類 $\mathfrak{s}$ を保つ微分同相全体に過ぎず，spin^c 構造に対応する主 $Spin^c(4)$ 束に作用していないからである．したがって，E の各ファイバーには，spin^c 構造の同型類は付与されているが，spin^c 構造そのものは付与されていない．そして一般には，spin^c 構造の同型類から代表元を B 上大域的に選ぶことは不可能である．（簡単な障害理論で分かる．）Seiberg–Witten 方程式を書き下すには spin^c 構造の同型類だけでなく spin^c 構造そのものが必要である．したがって，Seiberg–Witten 方程式の族を n 胞体 e 上で考え，そこからパラメータ付きモジュライ空間を定義することはアプリオリにはできない．第二の問題点は，B は多様体とは限らない一般の CW 複体 (例えば分類空間 $B\mathrm{Diff}(X,\mathfrak{s})$) であったことに起因する [8]．$B$ が多様体でない場合，パラメータ付きモジュライ空間が多様体の構造を持つと期待する理由は何もない．したがって数え上げをどう定義するかは不分明である [9]．

以上の問題点は以下のように解消される．ひとつめの問題点を解消するには，中村信裕 [20] のトリックを用いる．s を $\mathfrak{s}$ のひとつの代表元とし，$\mathrm{Aut}(X,s)$ を (X,s) の自己同型群としたとき，

$$1 \to \mathscr{G} \to \mathrm{Aut}(X,s) \to \mathrm{Diff}(X,\mathfrak{s}) \to 1$$

という完全系列を得る．ここで $\mathscr{G}$ はゲージ群である．我々の問題は，E の変換関数が $\mathrm{Aut}(X,s)$ でなく $\mathrm{Diff}(X,\mathfrak{s})$ に値を取っていることだった．そこで，B 上の十分細かい開被覆を取り，E の変換関数を $\mathrm{Aut}(X,s)$ にまで持ち上げる．持ち上げたものはもはやコサイクル条件を満たしていないが，満たしていない具合を表す誤差はゲージ群 $\mathscr{G}$ に値を持つ．そこで，モジュライ空間のようにゲージ群で割って得られる対象を B 上で考察する限り，その誤差はゲージ群で割るときに吸収される．したがって，パラメータ付きモジュライ空間は B 上で大域的に定義ができる．

ふたつめの問題を解決するには，仮想近傍（virtual neighborhood）の理論の族版を構成し，それを用いる．所謂 virtual technique は，シンプレクティック幾何学において多くの人々が研究してきたが，ゲージ理論の文脈にそれを持ち込んだのは Ruan [22] である．まずパラメータ付きで無い場合に，仮想近傍のアイデアを説明しよう．Seiberg–Witten 方程式に対応する Fredholm 切断 $s:\mathcal{B}\to\mathcal{E}$ に対し，モジュライのコンパクト性から有限次元近似を行うことができ，自明束の切断 $\bar{s}:\mathcal{U}\to\mathcal{U}\times\mathbb{R}^N$ $(N<\infty)$ が得られる．ここで $\mathcal{U}$（これが仮想近傍と呼ばれる）は有限次元多様体で，$\bar{s}^{-1}(0)$ は $s^{-1}(0)$ と "同型" となるようなものである．このとき，$\bar{s}$ に関する相対 Euler 類，すなわち $\bar{s}$ による Thom 類の引き戻し

$$e(\mathcal{U},\bar{s}) := \bar{s}^*\tau(\mathcal{U}\times\mathbb{R}^N\to\mathcal{U}) \in H^N_c(\mathcal{U})$$

を考える．これは，"無限次元ベクトル束 $\mathcal{E}\to\mathcal{B}$ の Euler 類" の有限次元近似による実現

[8] $B\mathrm{Diff}(X,\mathfrak{s})$ は無限次元多様体のモデルを持つので，その構造を用いて議論を行い，一般のバンドルに対する特性類は分類写像による引き戻しで定義するという筋もある得るかもしれないが，無限次元多様体にまつわる不必要にデリケートな議論が必要になると予想される．ここで述べる定式化は，$B\mathrm{Diff}(X,\mathfrak{s})$ の特定のモデルを取る必要はなく，どの B に対しても一様に議論が行える点で自然である．

[9] (3) の右辺で考察しているのは e 上のパラメータ付きモジュライ空間なので，e の特性写像で引き戻せば n 次元円板 D^n 上のパラメータ付きモジュライ空間を考えていることになる．D^n は可縮な多様体なので，引き戻されたバンドルを無理矢理自明化すれば滑らかなパラメータ付きモジュライ空間を得ることができる．しかしこのような荒っぽい構成をしてしまうと，パラメータ付きモジュライ空間の数え上げが自明化の取り方に依らないことを保証することができず，さらに $\mathcal{SW}(E,\sigma)$ がコサイクルになっていることの証明もできない．

である．$\bar{s}^{-1}(0) \cong s^{-1}(0)$ がコンパクトなことから，$e(\mathcal{U}, \bar{s})$ はコンパクト台のコホモロジー類となる．横断正則性が確保され $\bar{s}^{-1}(0) \cong s^{-1}(0)$ が多様体のときであれば，基本類 $[\bar{s}^{-1}(0)]$ の Poincaré 双対にあたるものがこの相対 Euler 類 $e(\mathcal{U}, \bar{s})$ であり，モジュライの数え上げ $\#s^{-1}(0)$ に相当するものがペアリング $\langle e(\mathcal{U}, \bar{s}), [\mathcal{U}]_{BM} \rangle \in \mathbb{Z}/2$ or $\mathbb{Z}$ である．($\mathcal{U}$ は一般には非コンパクトなので，Borel–Moore の意味での基本類を取ってある．) ここで重要なことは，基本類 $[\bar{s}^{-1}(0)]$ を定義するためには横断正則性が必要であるが，コホモロジー類 $e(\mathcal{U}, \bar{s})$ の定義には横断正則性は何ら必要ないということである．そこで，パラメータ空間 B が滑らかな構造を持っていない場合でも，$e(\mathcal{U}, \bar{s})$ のパラメータ付き版を考えることはできる．これを用いてパラメータ付きモジュライ空間の数え上げに相当する数を取り出し，(3) の右辺をその数に置き換える．これが $\mathcal{SW}(E, \sigma)$ の正しい定義であり，このようにすると期待していた理論構成が全て上手く進むことが証明できる．以上が $\mathbb{SW}(E)$ の構成の骨子である．

6. 展望

ゲージ理論の4次元トポロジーへの応用は，既に30年以上に亘る歴史を持つ．11/8予想 [18] や滑らかな範疇での4次元 Poincaré 予想など，ゲージ理論に貢献が期待される重要な未解決問題も残っているが，同時に，研究の新たな対象物を必要とする時期に差し掛かっているとも思われる．4次元多様体の族がその候補となり得るのではないかということを期待し，本稿ではその説明を試みた．

従来のゲージ理論における様々な事柄で，族への拡張が期待されるものはまだ多く残っている．少なくとも，本文中で述べたように，族に対する Bauer–Furuta 不変量の構成と応用は興味深い問題を提供し，しかも実現可能性の高いものと思われる．しかし恐らく，理論的にも応用上も最も重要な問いは次のものであろう：

問 3 ゲージ理論に基づく3+1次元位相的場の理論を族の場合に拡張できるか？すなわち族に対する Floer 理論を建設せよ．

はじめは閉4次元多様体に対して展開されていたゲージ理論は，境界付き4次元多様体および3次元多様体に，Floer 理論として拡張されることにより深化した歴史がある．この族版を期待するのは自然であろう．このような理論が建設された暁には，3次元多様体の族の4次元多様体の族への拡張への障害や，4次元多様体の族を3次元多様体の族に沿って切り分けるための障害が得られると予想される．また，3次元多様体上への群作用の4次元多様体への拡張に対する障害も期待できるであろう．

問 3に答えるには，無限次元の Morse ホモロジー理論をパラメータ付きで行う必要があり，勾配流の連続変化を考察しなければならない．解析的に多くの困難が生じると予想されるが，シンプレクティック幾何学においては，族の Floer ホモロジーはミラー対称性の文脈で既に研究されている．（例えば [1, 9] を見よ．）これらの研究は問 3へのヒントを与え得るかもしれない．

参考文献

[1] Mohammed Abouzaid, *Family Floer cohomology and mirror symmetry*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians 2014, available at arXiv:1404.2659.

[2] M. F. Atiyah and I. M. Singer, *The index of elliptic operators. IV*, Ann. of Math. (2) **93** (1971), 119–138.

[3] David Baraglia, *Obatructions to smooth group actions on 4-manifolds from families Seiberg-Witten theory*, arXiv:1805.07860.

[4] Stefan Bauer and Mikio Furuta, *A stable cohomotopy refinement of Seiberg-Witten invariants. I*, Invent. Math. **155** (2004), no. 1, 1–19.

[5] S. K. Donaldson, *An application of gauge theory to four-dimensional topology*, J. Differential Geom. **18** (1983), no. 2, 279–315.

[6] S. K. Donaldson, *Yang-Mills invariants of four-manifolds*, Geometry of low-dimensional manifolds, 1, (Durham, 1989), London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 150, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990, 5–40.

[7] S. K. Donaldson, *Polynomial invariants for smooth four-manifolds*, Topology **29** (1990), no. 3, 257–315.

[8] S. K. Donaldson, *The Seiberg-Witten equations and* 4*-manifold topology*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **33** (1996), no. 1, 45–70.

[9] Kenji Fukaya, *Floer homology for families–a progress report*, Integrable systems, topology, and physics (Tokyo, 2000), Contemp. Math., vol. 309, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002, pp. 33–68.

[10] Mikio Furuta, *Monopole equation and the* $\frac{11}{8}$*-conjecture*, Math. Res. Lett. **8** (2001), no. 3, 279–291.

[11] Hokuto Konno, *Bounds on genus and configurations of embedded surfaces in 4-manifolds*, J. Topol. **9** (2016), no. 4, 1130–1152.

[12] Hokuto Konno, *A cohomological Seiberg-Witten invariant emerging from the adjunction inequality*, arXiv:1704.05859.

[13] Hokuto Konno, *Positive scalar curvature and higher-dimensional families of Seiberg-Witten equations*, arXiv:1707.08974.

[14] Hokuto Konno, *Characteristic classes via 4-dimensional gauge theory*, arxiv:1803.09833.

[15] Hokuto Konno, *A family of the Seiberg-Witten equations and configurations of embedded surfaces in 4-manifolds*, Proceeding to Intelligence of Low-dimensional Topology at RIMS Kôkyûroku, No. 2004, 13–22 (2016)

[16] P. B. Kronheimer and T. S. Mrowka, *The genus of embedded surfaces in the projective plane*, Math. Res. Lett. **1** (1994), no. 6, 797–808.

[17] Tian-Jun Li and Ai-Ko Liu, *Family Seiberg-Witten invariants and wall crossing formulas*, Comm. Anal. Geom. **9** (2001), no. 4, 777–823.

[18] Yukio Matsumoto, *On the bounding genus of homology 3-spheres*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA. Math. **29** (1982), 287–318.

[19] Shigeyuki Morita, 微分同相群とトポロジー ～特性類と不変量を中心として～, 第62回トポロジーシンポジウム講演集，2015.

[20] Nobuhiro Nakamura, *The Seiberg-Witten equations for families and diffeomorphisms of 4-manifolds*, Asian J. Math. **7** (2003), no. 1, 133–138.

[21] Nobuhiro Nakamura, *Smoothability of* $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$*-actions on 4-manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. **138** (2010), no. 8, 2973–2978.

[22] Yongbin Ruan, *Virtual neighborhoods and the monopole equations, Topics in symplectic 4- manifolds* (Irvine, CA, 1996), First Int. Press Lect. Ser., I, Int. Press, Cambridge, MA, 1998, pp. 101–116.

[23] Daniel Ruberman, *An obstruction to smooth isotopy in dimension* 4, Math. Res. Lett. **5** (1998), no. 6, 743–758.

[24] Daniel Ruberman, *A polynomial invariant of diffeomorphisms of 4-manifolds*, Proceedings of the Kirbyfest (Berkeley, CA, 1998), Geom. Topol. Monogr., vol. 2, pp. 473–488.

[25] Daniel Ruberman, *Positive scalar curvature, diffeomorphisms and the Seiberg-Witten invariants*, Geom. Topol. **5** (2001), 895–924.

[26] Edward Witten, *Monopoles and four-manifolds*, Math. Res. Lett. **1** (1994), no. 6, 769–796.