

Shadow complexity of 3- and 4-manifolds

古宇田 悠哉 (広島大学)*

序論

本稿の主役である shadow とは, 大雑把に述べると可微分 4 次元多様体の局所平坦な 2-骨格のことである. Shadow は 1990 年代前半に Turaev [34, 35] により, 3, 4 次元多様体を組み合わせ的に表示する道具として定義され, その研究は以後主に 2 つの方向に展開されてきた. 1 つは Turaev 自身が目指した量子不変量の研究であり, もう 1 つは shadow complexity の研究である. 本稿では後者に焦点を当てる¹. ここで, 3, 4 次元多様体の shadow complexity とはその多様体の shadow の頂点数の最小値のことである. 定義から shadow complexity は多様体のある種の組み合わせ的な複雑度をはかる量であるが, Costantino-Thurston [11] はこの値と 3 次元多様体の幾何構造との深い関係を見抜いた. このことは shadow の polyhedron としての「基本的なピース」への分解が 3 次元の幾何構造と非常に相性が良いことに起因する. さらに, この事実は可微分 4 次元多様体の研究においても基本的な役割を果たす. 本稿ではこれらの事項を中心に 3, 4 次元多様体の shadow complexity に関する研究の現況を報告する.

1. Shadow とその一般論

本章では shadow の定義と基本事項について概説する. Shadow の一般論に関してより詳しくは Turaev [35], Costantino [4, 5] を参照のこと. 以下, 本稿を通じて特に断らない限り 3, 4 次元多様体は連結, コンパクト, 可微分かつ向き付けられているとする.

1.1. Simple polyhedron

2 次元の有限 CW 複体 P の各点が図 1 のいずれかと同相な正則近傍を持つとき P を **simple polyhedron** とよぶ. 図 1 (iii) と同相な正則近傍を持つ点を P の頂点と

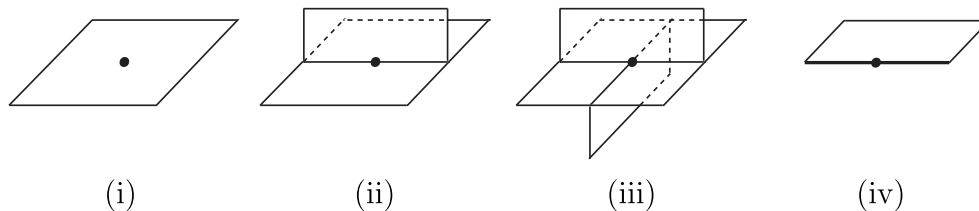


図 1: Simple polyhedron の局所モデル.

よび, P の頂点全体の集合を $V(P)$ と表す. 図 1 (ii), (iii) のいずれかと同相な正則近傍を持つ点の集合を P の特異集合とよび $S(P)$ と表す. 図 1 (iv) と同相な正則近傍を持つ点からなる集合を P の境界とよび, ∂P と表す. 以下, $c(P) := |V(P)|$ とおく. $S(P) \setminus V(P)$ の各連結成分を辺とよび, $P \setminus S(P)$ の各連結成分を領域とよぶ. P の各辺は開区間もしくは円周である. P の境界に接触しない領域を内部領域とよぶ.

本研究は JSPS 科研費 (課題番号: 17K05254) の助成を受けたものである.

* 〒739-8526 広島県東広島市鏡山 1-3-1 広島大学大学院理学研究科

e-mail: ykoda@hiroshima-u.ac.jp

¹Shadow を用いた量子不変量の研究については [34, 35, 2, 32, 15, 33, 8, 9, 3] などを参照されたい.

Simple polyhedron P の $V(P) \subset S(P) \subset P$ なる階層が P の CW 構造を与えるとき, P を **special polyhedron** とよぶ. Special polyhedron の領域はすべて円盤であるので, P の位相型は $S(P)$ の近傍のみで決まることに注意する.

Simple polyhedron P の各領域に, 次の条件を満たす向き (branching) が与えられたものを **branched polyhedron** とよぶ.

- P の各辺において, 辺を共有している 3 枚の領域の向きが誘導する辺の向きのうち, 互いに逆向きのもが存在する.

Branching が与えられた polyhedron P は図 2 のような局所モデルで表すことが出来る. 一般に simple polyhedron の領域は向き付け可能であるとは限らないが, branched

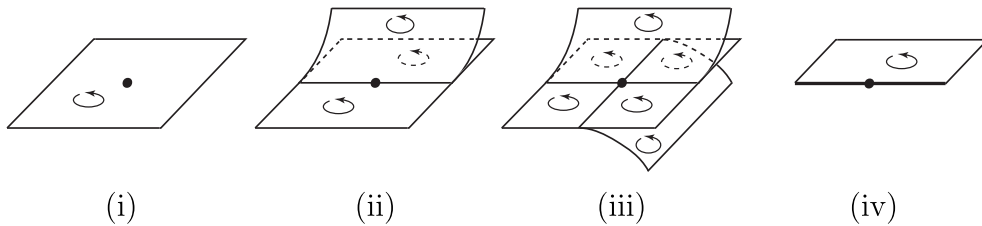


図 2: Branched polyhedron の局所モデル.

polyhedron の各領域は特に向き付け可能である. Simple polyhedron の各領域が向き付け可能であっても, branching が定められるとは限らない.

1.2. Shadow

定義. X を向き付けられた閉 3 次元多様体とする. $\partial N = X$ なる向き付けられたコンパクト可微分 4 次元多様体 N に埋め込まれた simple polyhedron P が次の条件を満たすとき, P を N (あるいは X) の **shadow** とよぶ:

- N に自然な PL 構造を入れると, N は P に collapse する;
- P は局所平坦, すなわち P の各点の近傍は滑らかな $\mathbb{R}^3 \subset N$ に含まれる; かつ
- $P \cap \partial N = \partial P$.

X 内の絡み目 L が $L \subset \partial P$ を満たすとき, P は (X, L) の shadow であるともいう. また, N の境界が $\#k(S^1 \times S^2)$ ($k \geq 0$) であるとき², P を N に 3-ハンドルおよび 4-ハンドルを接着して得られる閉 4 次元多様体 M の shadow ともよぶ³.

境界付き 4 次元多様体 N の shadow P の内部領域に対し, **gleam** とよばれる半整数値の coloring $gl: \{P \text{ の内部領域} \} \rightarrow \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ が次のようにして定まる. R を P の内部領域とし, $i: R \hookrightarrow P$ を包含写像とする. 内部が R と同相なコンパクト曲面を \bar{R} とおく. ここでは領域 R が向き付け可能であり, i の自然な拡張 $\bar{i}: \bar{R} \rightarrow P$ が単射であるときのみ解説する. 簡単のため, $\bar{i}(\bar{R})$ と \bar{R} を同一視する. N に Riemann 計量を入れ, \bar{R} の法バンドル $\nu(\bar{R})$ の射影化 $\mathbb{P}\nu(\bar{R})$ を考える. $\mathbb{P}\nu(\bar{R})$ は \bar{R} 上の $\mathbb{RP}^1 \cong S^1$ バンドルである. 定義より $\partial\bar{R}$ の各点 p に対し, その近傍 $\text{Nbd}(p; P)$ を含む滑らかな $\mathbb{R}^3 \subset N$ が存在する. この \mathbb{R}^3 内では p における \bar{R} の法方向に対応する $\mathbb{P}\nu(\bar{R})$ の点が一意に定まるので, これを $s(p)$ とおく. これにより, $\partial\bar{R}$ 上のセクション $s: \partial\bar{R} \rightarrow \mathbb{P}\nu(\bar{R})$ が定まる. こ

² $\#0(S^1 \times S^2) = S^3$ と解釈する.

³ Laudénbach-Poénaru [19] の定理により, この M は N から微分同相を法として一意に決まる.

のセクション s を \bar{R} 全体に拡張するための障害 (Euler 類) は $H^2(\bar{R}, \partial\bar{R}; \pi_1(S^1)) = \mathbb{Z}$ の元で与えられる. これを 2 で割ったものが R の gleam $\text{gl}(R)$ である. N の向きとの同調性を加味すると, R の向きを逆にしても $\mathbb{P}\nu(\bar{R})$ のファイバーの向きも逆になるので, $\text{gl}(R)$ の値は影響を受けない. 一般に $\text{Nbd}(\partial\bar{R}; P) - R$ はいくつかのアニュラスと Möbius バンドからなる. この Möbius バンドの数を m_R とおくと, $\text{gl}(R)$ の値は

$$\text{gl}(R) - \frac{1}{2}m_R \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

を満たす. この条件は P の組み合わせ構造のみに依存することに注意する.

Simple polyhedron P に上の条件 (1) を満たす coloring $\text{gl} : \{P \text{ の内部領域} \} \rightarrow \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ が定められたものを **shadowed polyhedron** とよび, (P, gl) と表す. Turaev [35] は, (P, gl) から 4 次元多様体 N が一意的に復元されることを示した. まとめると次のようになる.

- 定理 1.1** (Turaev [35]).
1. 向き付けられたコンパクト可微分 4 次元多様体の shadow P に対し, P の gleam が自然な方法で一意的に定まる.
 2. Shadowed polyhedron (P, gl) に対し, 向き付けられた境界付きコンパクト可微分 4 次元可微分多様体 N と P の N への shadow としての埋め込みで, その埋め込みから定まる P の gleam が gl と一致するものが一意的に存在する.

容易に確かめられるように, 任意の 4 次元 2-ハンドル体は shadow を持つ. 同様に, 任意の 3 次元多様体 X とその中の絡み目 L (空でもよい) の対 (X, L) , 閉 4 次元多様体 M は shadow を持ち, またこれらは shadowed polyhedron により一意的に復元される. Polyhedron を branched polyhedron, special polyhedron, さらに branched special polyhedron に制限しても, 同様の事実が成り立つことが知られている.

例 1. S^2 に gleam n を与えた shadowed polyhedron に対応するコンパクト 4 次元多様体 N は, Euler 数が n である S^2 上の D^2 バンドルである. その境界は Euler 数が n である S^2 上の S^1 バンドル, すなわちレンズ空間 $L(n, 1)$ である (ただし, $L(0, 1) = S^1 \times S^2$, $L(\pm 1, 1) = S^3$, $L(\pm 2, 1) = \mathbb{R}\mathbb{P}^3$ とみなす). $n = 0$ であるときは, $\partial N \cong S^1 \times S^2$ であり, N に 3-ハンドルおよび 4-ハンドルを 1 つずつ接着することで S^4 を得る. $n = 1$ であるときは, $\partial N \cong S^3$ であり, N に 4-ハンドルを 1 つ接着することで $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ を得る. 同様に, $n = -1$ であるとき, $\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}$ を得る. $n \neq 0, \pm 1$ のときは, この shadowed polyhedron は閉 4 次元多様体の shadow にはなれない.

例 2. $P' := (\mathbb{R}\mathbb{P}^2 \times \{1\}) \cup (\mathbb{R}\mathbb{P}^1 \times S^1) \subset \mathbb{R}\mathbb{P}^3 \times S^1$ とおくと, P' は simple polyhedron ではないが, P' を適切に摂動することで唯一つの頂点をもつ simple polyhedron P を得る. この P は $\mathbb{R}\mathbb{P}^3 \times S^1$ の shadow であり, P の各領域の gleam は 0 である. (P の閉近傍の境界は $\#2(S^1 \times S^2)$ であるので, P は $\#2(S^1 \times S^2)$ の shadow でもある.)

同じ可微分多様体を表す shadowed polyhedron は一般に無数に存在する. これらに関連付けるムーブについては Turaev [35], Costantino [4] で詳しく解説されている. また, 本稿では扱わないが, branching が定められた shadow による 4 次元多様体のスピンの c 構造, 複素構造, Stein 構造の研究については Costantino [4, 5, 7, 10] の研究がある.

1.3. Shadow complexity

4 次元 2-ハンドル体 N の shadow の頂点数の最小値を N の **shadow complexity** とよび $\text{sc}(N)$ と表す. 同様に, 閉 3 次元多様体 X とその中の絡み目 L (空でもよい) の

対 (X, L) , および閉 4 次元多様体 M に対して, **shadow complexity** $sc(X, L)$, $sc(M)$ が定義される. Shadow を branched polyhedron, special polyhedron に制限して同様に定義される complexity を $sc^{br}(\cdot)$, $sc^{sp}(\cdot)$ と表す.

Martelli [21] により, 各自然数 n に対して $sc^{sp}(M) = n$ となる可微分閉 4 次元多様体 M は有限個 (つまり可微分閉 4 次元多様体に対して, sc^{sp} は finite-to-one 不変量) であることが示されている. Shadow に基づくその他の complexity は finite-to-one ではない.

例 3. 例 1 より, $sc(L(p, 1)) = 0$ であること, および閉 4 次元多様体について $sc(S^4) = sc(\mathbb{C}P^2) = sc(\overline{\mathbb{C}P^2}) = 0$ であることがわかる. また, 例 2 より $sc(\mathbb{R}P^3 \times S^1) \leq 1$ であることが分かる. (古宇田-Martelli-直江 [17] より実は $sc(\mathbb{R}P^3 \times S^1) = 1$ である.)

2. 3 次元多様体の shadow complexity

2.1. 双曲体積と shadow complexity

X を閉 3 次元多様体, $P \subset N$ を X の shadow とし, $S(P)$ の各成分は少なくとも 1 つの頂点を含むとする. $\pi: N \rightarrow P$ を collapsing から誘導される射影とする. P の頂点 p の P における閉近傍を C とおき, $\pi^{-1}(C)$ を D^4 と同一視する. ∂C は 4 頂点の完全グラフ K_4 の多面体 $|K_4|$ である. ∂C の $\partial D^4 = S^3$ における閉近傍を V とおくと V は種数 3 のハンドル体 (3 次元 1-ハンドル体) である. このとき, $W := \pi^{-1}(C) \cap X = S^3 - \text{Int } V$ も種数 3 のハンドル体であることが容易に確かめられる⁴. よって W は 2 つの切頂正 8 面体を図 3 のように貼り合わせることで得られる. Minsky [23] にちなんで, 2 つの切頂正 8 面体によりこのように構成された種数 3 のハンドル体はしばしば **Minsky ブロック** とよばれる. $X' = \pi^{-1}(\text{Nbd}(S(P); P)) \cap X$ とおく. X' は各頂点ごとに構成さ

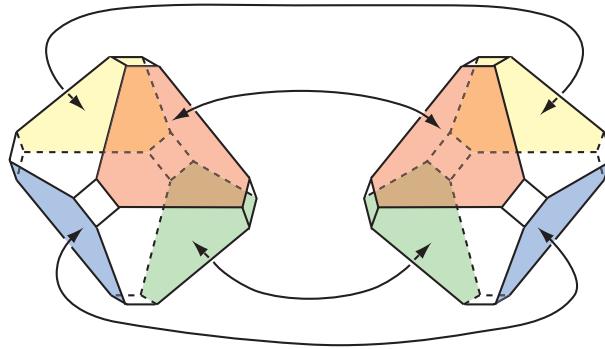


図 3: Minsky ブロックの構成.

れた Minsky ブロック (の残された 6 角形の面) どうしを, X の組み合わせ構造にしたがって貼り合わせることによって得られる. この際, X' の内部に含まれる切頂正 8 面体の各辺の周りではちょうど 4 つの切頂正 8 面体が貼り合う. したがって, X' の内部には自然に (完備な有限体積の) 双曲構造を入れることができ, この構造のもとで X' の内部は $2c(P)$ 個の理想双曲正 8 面体に分割される⁵. 特に X' の内部の双曲体積は $2c(P)v_{\text{oct}}$ である. ただし, $v_{\text{oct}} \approx 3.66$ は理想双曲正 8 面体の体積を表す. Costantino-Thurston [11] はこの構造を見出すことで次を得た.

⁴つまり $V \cup W$ は $\partial D^4 = S^3$ の種数 3 の Heegaard 分解を与えている.

⁵ $c(P) = |V(P)|$ であった.

定理 2.1 (Costantino-Thurston [11]). X を向き付けられた閉 3 次元多様体とする. X によらない普遍的な定数 $C > 0$ が存在し, X の Gromov ノルム $\|X\|$ は以下の不等式を満たす:

$$\frac{v_{\text{tet}}}{2v_{\text{oct}}}\|X\| \leq \text{sc}(X) \leq C\|X\|^2.$$

ただし, $v_{\text{tet}} \approx 1.01$ は理想双曲正 4 面体の体積を表す.

特に P が special shadow であるとき, 各領域は円盤であるので, X は X' から Dehn filling により得られる. Agol [1], Lackenby [18] による 6-Theorem と Perelman [27, 28, 29] による幾何化定理により, 各境界でのこの Dehn filling のスロープの長さが 6 よりも長ければ, X は双曲構造を持つ. X' の双曲構造は理想双曲正 8 面体の貼り合わせの情報により明示的に与えられているから, Dehn filling のスロープの長さは P の組み合わせ構造とその gleam の情報から与えられることになる.

(P, gl) を shadowed special polyhedron とする. P の各領域 R に対し, $\text{sl}(R) = \sqrt{4 \cdot \text{gl}(R)^2 + k^2}$ とおく. ここで k は R の閉包の境界が P の頂点を通過する回数を表す. $\text{sl}(R)$ は X' から X を得る Dehn filling を施す際の, 対応する境界トラス上のスロープの長さに他ならない. R を P の領域全体に走らせたときの $\text{sl}(R)$ の最小値を $\text{sl}(P)$ とおく. Futer-Kalfagianni-Purcell [13] の結果を用いると, 次のような双曲体積の下からの評価が得られる.

定理 2.2 (石川-古宇田 [16]). X を向き付けられた閉 3 次元多様体, P を X の branched special shadow とする. $\text{sl}(P) > 2\pi$ であるとき, X は双曲多様体であり次が成り立つ.

$$2c(P)v_{\text{oct}} \left(1 - \left(\frac{2\pi}{\text{sl}(P)}\right)^2\right)^{3/2} \leq \text{vol}(X).$$

定理 2.1, 2.2 の帰結として, 次が導かれる:

系 2.3 (石川-古宇田 [16]). X を向き付けられた閉 3 次元多様体, P を X の special shadow とする. $\text{sl}(P) > 2\pi\sqrt{2c(P)}$ であるとき, $\text{sc}(X) = \text{sc}^{\text{sp}}(X) = c(P)$ が成り立つ.

つまり, 各 gleam の絶対値が十分大きい special shadow から得られる 3 次元多様体 X の $\text{sc}(X)$, $\text{sc}^{\text{sp}}(X)$ は完全に決定することができる.

2.2. 安定写像と shadow complexity

安定写像とは, Morse 関数の一般化にあたる概念である. 2つの可微分多様体 X, Y の次元の対がしかるべき範囲にあるとき, 写像空間 $C^\infty(X, Y)$ には安定写像がジェネリックに存在する⁶. 例えばターゲットの多様体の次元が 2 のとき, 安定写像はジェネリックに存在する.

X を向き付け可能な閉 3 次元多様体とする. $f: X \rightarrow \mathbb{R}^2$ が安定写像であるとき, 特異点 $p \in X$ とその像 $f(p)$ の近傍で, f は局所的に次のいずれかで記述される:

- (1) $(u, x, y) \mapsto (u, x^2 + y^2)$;
- (2) $(u, x, y) \mapsto (u, x^2 - y^2)$;
- (3) $(u, x, y) \mapsto (u, y^2 + ux - x^3)$.

⁶ $C^\infty(X, Y)$ には Whitney C^∞ 位相を入れる. 安定写像の一般論に関して詳しくは Golubitsky-Guillemin [14]などを参照のこと.

(1), (2), (3) のとき, p をそれぞれ定値折り目特異点, 不定値折り目特異点, カスプ特異点とよぶ. f の特異点の集合は X 内の絡み目をなす.

X を向き付け可能な閉 3 次元多様体とし, $f: X \rightarrow \mathbb{R}^2$ を安定写像とする. X 上の 2 点 p_1, p_2 が f のファイバーの同じ連結成分に含まれているとき同値であると定義する. この同値関係による X の商空間を W_f と表し f の Stein 分解とよぶ⁷. Stein 分解 W_f は 2 次元の有限 CW 複体である. 図 4 は不定値折り目特異点を含むファイバーの近傍に対応する Stein 分解 W_f の局所モデルを描いている. このうち, 図 4 (i) の点に

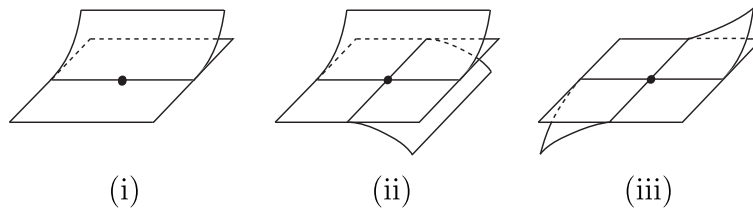


図 4: 不定値折り目特異点に対応する Stein 分解の局所モデル.

対応する f のファイバーは唯一つの不定値折り目特異点を含んでいる. 図 4 (ii), (iii) の点に対応する f のファイバーをそれぞれ II^2 型, II^3 型の特異ファイバーとよぶ. これらはそれぞれちょうど 2 つの不定値折り目特異点を含む. 安定写像 f の II^2 型, II^3 型の特異ファイバーの集合をそれぞれ $\text{II}^2(f)$, $\text{II}^3(f)$ と表す⁸.

X 内の絡み目 L が f の定値折り目特異点集合に含まれるとき, f を対 (X, L) 上の安定写像ともよぶ. 任意の対 (X, L) はカスプ特異点を持たない安定写像を許容する (Levine [20] 参照). 以下, 安定写像はカスプ特異点を持たないもののみ考える. 安定写像 $f: (X, L) \rightarrow \mathbb{R}^2$ に対して, その複雑度を $c(f) := |\text{II}^2(f)| + 2|\text{II}^3(f)|$ で定義する. f を安定写像 $(X, L) \rightarrow \mathbb{R}^2$ 全体に走らせたときの $c(f)$ の最小値を $\text{smc}(X, L)$ と表す.

定理 2.4 (石川-古宇田 [16]). X を向き付けられた閉 3 次元多様体, L を X 内の絡み目 (空でもよい) とする. このとき $\text{sc}^{\text{br}}(X, L) = \text{smc}(X, L)$ が成り立つ.

$\text{sc}^{\text{br}}(X, L) \leq \text{smc}(X, L)$ であることは, Costantino-Thurston [11] の議論による. 実際, 与えられた安定写像の Stein 分解は, 「概ね」 (X, L) の branched shadow とみなせる. Stein 分解の局所モデルのうち, II^3 -型の特異ファイバーに対応している点 (図 4 (iii)) を II^2 -型の特異ファイバー 2 つの局所モデルに置き換えることにより, $\text{sc}^{\text{br}}(X, L) \leq \text{smc}(X, L)$ であることがわかる. 逆の不等式の証明は構成的であり, 技術的にやや複雑な議論を要する.

佐伯 [30] において, $\text{smc}(X, L) = 0$ である必要十分条件は L の外部空間がグラフ多様体 (Gromov ノルムが 0 である多様体⁹) であることが示されている. 定理 2.1, 2.4 を合わせて得られる帰結はこの結果の一つの拡張とみなせる. 石川-古宇田 [16] では, $\text{smc}(S^3, L) = 1$ なる S^3 内の双曲絡み目 L の完全な特徴付けが与えられている. 例えば, 8 の字結び目の smc は 1 である.

定理 2.4 と系 2.3 から, 次が導かれる:

⁷ 商写像 $X \rightarrow W_f$ を q_f と表すと $f = \bar{f} \circ q_f$ なる写像 $\bar{f}: W_f \rightarrow \mathbb{R}^2$ が一意的に定まる. 合成 $\bar{f} \circ q_f$ や q_f を f の Stein 分解とよぶこともある.

⁸ これらの記号は佐伯 [31] による.

⁹ 本来, 3 次元グラフ多様体とは $S^1 \times D^2$ と $S^1 \times Q$ (ただし, Q は 3 つ穴あき球面) の有限個のコピーを境界で貼り合わせて得られる多様体として定義される. Gromov ノルムによるこの言い換えは幾何化定理 (Perelman [27, 28, 29]) の帰結である.

系 2.5 (石川-古宇田 [16]). X を向き付けられた閉 3 次元多様体, P を X の branched special shadow とする. $sl(P) > 2\pi\sqrt{2c(P)}$ であるとき, $sc(X) = smc(X) = c(P)$ が成り立つ.

つまり, 各 gleam の絶対値が十分大きい branched special shadow から得られる 3 次元多様体 X の $smc(X)$ は完全に決定することができる.

3. 4 次元多様体の shadow complexity

3.1. 境界付き 4 次元多様体の shadow complexity

境界付き 4 次元多様体の shadow complexity については, 直江氏による次の結果がある.

定理 3.1. 1. (直江 [24]) Shadow complexity が 0 である acyclic な 4 次元多様体は D^4 と微分同相である.

2. (直江 [25]) Shadow complexity が 0 である cork は存在しない. Shadow complexity が 1 である cork は無数に存在する.

3. (直江 [26]) 任意に大きい shadow complexity を持つ cork が存在する.

定理 3.1 の 3 の証明, すなわち境界付き 4 次元多様体の shadow complexity の下からの評価には境界の 3 次元多様体の shadow complexity に関する系 2.3 が本質的に使われている.

3.2. 閉 4 次元多様体の shadow complexity

下記に挙げるように, 閉 4 次元多様体 M の shadow $P \subset N$ には, 3 次元多様体 $X = \partial N$ や境界付き 4 次元多様体 N の shadow とみなしたときに比して格段に難しい点がある.

難点 1 すべての shadowed polyhedron P が閉 4 次元多様体を表すわけではない.

難点 2 Shadowed polyhedron P を単純閉曲線に沿って「基本的なピース」に分解する操作は, 対応する 3 次元多様体 X や境界付き 4 次元多様体 N をそれぞれ $S^1 \times S^1$, $S^1 \times D^2$ により分解することに対応していたが, この分解は一般には M の $S^1 \times S^2$ による分解には延びない.

Polyhedron を special なものに限ると, 考えるべき polyhedron は圧倒的に減り, 少なくとも上の「難点 2」を回避することができる. Costantino [6] は special shadow を用いた閉 4 次元多様体の complexity について次を得た.

定理 3.2 (Costantino [6]). 閉 4 次元多様体 M が $sc^{sp}(M) \leq 1$ を満たす必要十分条件は M が S^4 , $\mathbb{C}P^2$, $\overline{\mathbb{C}P^2}$, $S^2 \times S^2$, $\mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2$, $\overline{\mathbb{C}P^2} \# \overline{\mathbb{C}P^2}$, $\overline{\mathbb{C}P^2} \# \mathbb{C}P^2$ のいずれかと微分同相であることである.

Simple polyhedron P の特異集合 $S(P)$ の各連結成分に含まれる頂点の数の最大値を $c^*(P)$ と表すことにする. 閉 4 次元多様体 M に対し, P を M の shadow 全体に走らせたときの $c^*(P)$ の最小値を M の connected shadow complexity とよび $sc^*(M)$ と表す. 定義から直ちに $sc^*(M) \leq sc(M)$ であり, 特に $sc^*(M) = 0$ であることと $sc(M) = 0$ であることは同値である. Shadow complexity が n 以下の閉 4 次元多様体の集合を \mathcal{M}_n^* と表す. 任意の非負整数 n に対し, \mathcal{M}_n^* は連結和について閉じている.

定理 3.3 (古宇田-Martelli-直江 [17]). 任意に大きい connected shadow complexity $sc^*(M)$ を持つ閉 4 次元多様体 M が存在する.

この定理の証明には Freedman [12] による群の width とよばれる不変量が使われる。

境界がいくつかの $S^1 \times S^2$ の非交和からなる向き付けられたコンパクト 4 次元多様体をブロックとよぶ. S をブロックの有限集合とする. S からいくつかのブロックの有限個のコピーをとり, それらの境界を (向きを逆にする微分同相写像で) 貼り合わせて得られる向き付けられた閉 4 次元多様体を S で生成されるグラフ多様体とよぶ.

定理 3.4 (Martelli [22]). $M \in \mathcal{M}_0^*$ である必要十分条件は $M = M' \# h\mathbb{C}P^2$ (ただし $h \in \mathbb{Z}$ であり¹⁰, M' は 8 つのブロックからなるある族 \mathcal{S}_0 により生成されるグラフ多様体) と表されることである.

\mathcal{S}_0 のうち, 2 つは $S^2 \times D^2$, $S^2 \times Q$ (ただし, Q は 3 つ穴あき球面) である. 残りの 6 個は $S^1 \times S^3$ から図 5 に描かれている $S^1 \times S^2 \subset S^1 \times S^3$ 内のグラフ絡み目のチューブ近傍を除くことにより得られる. Shadow complexity が 0 の閉 4 次元多様体のう

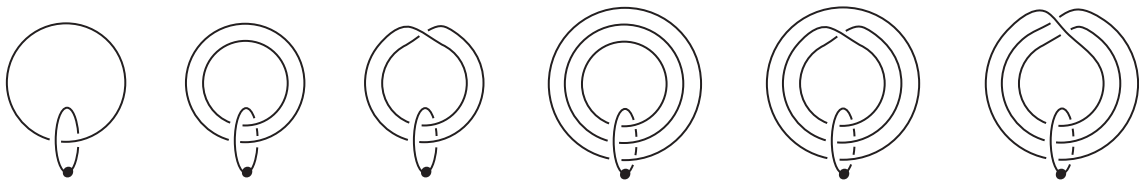


図 5: $S^1 \times S^2$ 内の 6 個の絡み目の Kirby 図式による表示.

ち, 単連結であるものは $\#h(S^2 \times S^2)$, $\#h\mathbb{C}P^2 \# \overline{k\mathbb{C}P^2}$ (ただし, $h, k \geq 0$) で尽くされている (Martelli [22] 参照).

定理 3.5 (古宇田-Martelli-直江 [17]). $M \in \mathcal{M}_1^*$ である必要十分条件は $M = M' \# h\mathbb{C}P^2$ (ただし $h \in \mathbb{Z}$ であり, M' は 20 個のブロックからなるある族 $\mathcal{S}_0 \sqcup \mathcal{S}_1$ により生成されるグラフ多様体) と表されることである.

\mathcal{S}_1 に含まれる 12 個の多様体のうち, 11 個は $\#2(S^1 \times S^3)$ から図 6 に描かれている $\#2(S^1 \times S^2) \subset \#2(S^1 \times S^3)$ 内の絡み目のチューブ近傍を除くことにより得られる. 図から想像されるように, これらの絡み目は simple polyhedron の頂点を 1 つ含む特異集合の近傍から構成されている. 特に, 2.1 節で述べた事実によりこれらの絡み目の $\#2(S^1 \times S^2)$ における補空間の双曲体積は $2v_{\text{oct}}$ である. 残りの 1 つは $\mathbb{R}P^3 \times S^1$ から $\mathbb{R}P^1 \times \{1\}$ のチューブ近傍を除くことにより得られる¹¹. 定理 3.5 の証明は, 図 6 に描かれている絡み目の例外的 Dehn 手術 (のうち $\#k(S^1 \times S^2)$ を生むもの) の決定 (「難点 1」の打開) と, shadow のムーブを用いた技術的な議論 (「難点 2」の打開) による.

定理 3.5 の帰結として, \mathcal{M}_1^* には交叉形式が $mE_8 \oplus nH$ ($m \neq 0$) なる多様体, 符号数が 0 でありダブルではない多様体, aspherical な多様体は含まれないことが分かる. 特に, K3 曲面の connected shadow complexity は 2 以上である. 一方 Costantino [6] により, $\text{sc}^{\text{SP}}(\text{K3}) \leq 14$ であることが示されている. Connected shadow complexity を上げていったときに K3 曲面がいつ現れるのかは知られておらず, 興味深い問題として残されている.

定理 3.4, 3.5 においてブロックの集合 $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1$ が有限集合であることは極めて非自明な事実である. 一般の $n \geq 2$ に対し, 定理 3.4, 3.5 のような \mathcal{S}_n が有限集合としてとれ

¹⁰ $\#0\mathbb{C}P^2 = S^4$ と解釈する. $h < 0$ のときは $\#h\mathbb{C}P^2 = \#|h|\overline{\mathbb{C}P^2}$ と解釈する.

¹¹ この「例外的な」ブロックが必要になる点に定理 3.5 の証明の難しさが集約されている.

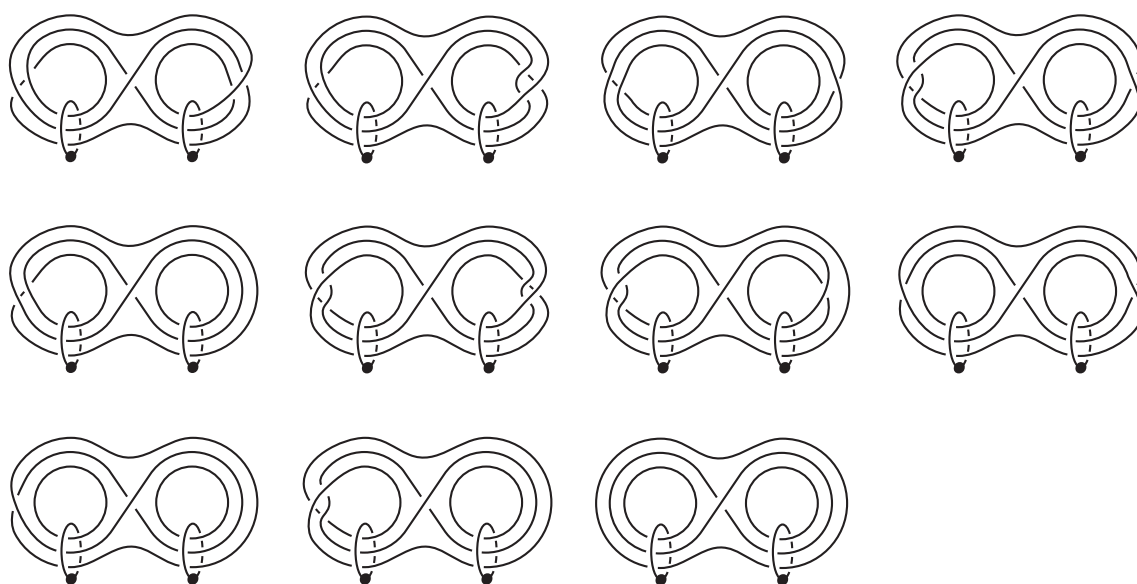


図 6: $\#2(S^1 \times S^2)$ 内の 11 個の絡み目の Kirby 図式による表示.

るかどうかは知られていない.

謝辞 本稿で取り挙げた定理のいくつかは筆者と石川昌治氏 (慶應義塾大学), Bruno Martelli 氏 (Pisa 大学), 直江央寛氏 (東北大学) との共同研究に基づきます. 石川昌治氏, 直江央寛氏には原稿に目を通していただき, いくつかの修正点をご指摘いただきました. 心よりお礼申し上げます.

参考文献

- [1] Agol, I., Bounds on exceptional Dehn filling, *Geom. Topol.* **4** (2000), 431–449.
- [2] Burri, U., For a fixed Turaev shadow Jones-Vassiliev invariants depend polynomially on the gleams, *Comment. Math. Helv.* **72** (1997), no. 1, 110–127.
- [3] Carrega, A., Martelli, B., Shadows, ribbon surfaces, and quantum invariants, *Quantum Topol.* **8** (2017), no. 2, 249–294.
- [4] Costantino, F., *Shadows and branched shadows of 3 and 4-manifolds*, Edizioni della Normale, Scuola Normale Superiore, Pisa, Italy, 2005.
- [5] Costantino, F., A short introduction to shadows of 4-manifolds, *Fund. Math.* **188** (2005), 271–291.
- [6] Costantino, F., Complexity of 4-manifolds, *Experiment. Math.* **15** (2006), no. 2, 237–249.
- [7] Costantino, F., Stein domains and branched shadows of 4-manifolds, *Geom. Dedicata* **121** (2006), 89–111.
- [8] Costantino, F., $6j$ -symbols, hyperbolic structures and the volume conjecture, *Geom. Topol.* **11** (2007), 1831–1854.
- [9] Costantino, F., Coloured Jones invariants of links and the volume conjecture, *J. Lond. Math. Soc. (2)* **76** (2007), no. 1, 1–15.
- [10] Costantino, F., Branched shadows and complex structures of 4-manifolds, *J. Knot Theory Ramifications* **17** (2008), no. 11, 1429–1454.
- [11] Costantino, F., Thurston, D., 3-manifolds efficiently bound 4-manifolds, *J. Topol.* **1** (2008), no. 3, 703–745.

- [12] Freedman, M. H., Group width. *Math. Res. Lett.* **18** (2011), no. 3, 433–436.
- [13] Futer, D., Kalfagianni, E., Purcell, J. S., Dehn filling, volume, and the Jones polynomial, *J. Differential Geom.* **78** (2008), no. 3, 429–464.
- [14] Golubitsky, M., Guillemin, V., *Stable mappings and their singularities*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 14. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973.
- [15] Goussarov, M. N., Interdependent modifications of links and invariants of finite degree, *Topology* **37** (1998), no. 3, 595–602.
- [16] Ishikawa, M., Koda, Y., Stable maps and branched shadows of 3-manifolds, *Math. Ann.* **367** (2017), no. 3–4, 1819–1863.
- [17] Koda, Y., Martelli, B., Naoe, H., Four-manifolds with shadow-complexity one, arXiv:1803.06713.
- [18] Lackenby, M., Word hyperbolic Dehn surgery, *Invent. Math.* **140** (2000), no. 2, 243–282.
- [19] Laudenbach, F., Poénaru, V., A note on 4-dimensional handlebodies, *Bull. Soc. Math. France* **100** (1972), 337–344.
- [20] Levine, H., Elimination of cusps, *Topology* **3** (1965), suppl. 2, 263–296.
- [21] Martelli, B., Links, two-handles, and four-manifolds, *Int. Math. Res. Not. IMRN* 2005, no. 58, 3595–3623.
- [22] Martelli, B., Four-manifolds with shadow-complexity zero, *Int. Math. Res. Not. IMRN* 2011, no. 6, 1268–1351.
- [23] Minsky, Y., The classification of Kleinian surface groups. I: Models and bounds, *Ann. of Math. (2)* **171** (2010), no. 1, 1–107.
- [24] Naoe, H., Shadows of 4-manifolds with complexity zero and polyhedral collapsing, *Proc. Amer. Math. Soc.* **145** (2017), no. 10, 4561–4572.
- [25] Naoe, H., Mazur manifolds and corks with small shadow complexities, arXiv:1505.00520, to appear in *Osaka J. Math.*
- [26] Naoe, H., Corks with large shadow-complexity and exotic 4-manifolds, arXiv:1711.04942.
- [27] Perelman, G., The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications, arXiv:math/0211159.
- [28] Perelman, G., Ricci flow with surgery on three-manifolds, arXiv:math/0303109.
- [29] Perelman, G., Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds, arXiv:math/0307245.
- [30] Saeki, O., Simple stable maps of 3-manifolds into surfaces, *Topology* **35** (1996), no. 3, 671–698.
- [31] Saeki, O., *Topology of singular fibers of differentiable maps*, Lecture Notes in Mathematics **1854**, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [32] Shumakovitch, A., Shadow formula for the Vassiliev invariant of degree two, *Topology* **36** (1997), no. 2, 449–469.
- [33] Thurston, D., The algebra of knotted trivalent graphs and Turaev’s shadow world, *Invariants of knots and 3-manifolds (Kyoto, 2001)*, pp. 337–362, *Geom. Topol. Monogr.* **4**, Geom. Topol. Publ., Coventry, 2002.
- [34] Turaev, V. G., Shadow links and face models of statistical mechanics, *J. Differential Geom.* **36** (1992), no. 1, 35–74.
- [35] Turaev, V. G., *Quantum invariants of knots and 3-manifolds*, de Gruyter Studies in Mathematics **18**, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1994.