Smooth quandleの局所構造とその変形

石川 勝巳　(京都大学数理解析研究所)*

カンドルとは群の共役演算を公理化・一般化して定義される代数である。カンドルは1980年代に [7], [9] などで導入されて以来、（曲面）結び目やLefshetz fibrationなど様々な方向に応用されてきたが、これまでのカンドルの扱いというのは概して離散的なものであった。群に対してLie群が考えられ、その局所構造の変形として量子群が定義されて一連の量子不変量の研究へと繋がっていったことを思い出してみると、カンドルに対して同じようなことができないだろうかというのは自然な問題であろう。

そこで本稿では、多様体にカンドル演算を入れたsmooth quandleというものを考え、特にその局所構造を調べるとともに、その変形を試みる。まず第1節ではカンドルの離散的な扱いについて復習する。次に第2節ではsmooth quandleを定義し、その構成や分類について得られた結果を紹介する。特にsmooth quandleの中でも重要なクラスのものについては、その局所構造がLie環、部分Lie環、自己同型という3つ組を用いて記述されるということを紹介する。最後に第3節ではこの3つ組の情報を変形することを試みる。ここではわかっている結果というよりも、どういうことがわかれば面白そうかという「夢」や、これから考えていくべき問題を提示し、今後の研究の指針としたい。なお、第2節と第3節は動機や背景こそ繋がっているが、その論理的・数学的な内容は独立したものとなっているので、それぞれ別々に読むことが可能である。

1. カンドルの基礎

集合Xとその上の二項演算$*$の組で次の条件を満たすもののことを**カンドル**という：

(Q1) 任意の$x \in X$に対し、$x * x = x$.

(Q2) 任意の$y \in X$に対し、写像$s_y = \bullet * y : X \ni x \mapsto x * y \in X$は全単射。

(Q3) 任意の$x, y, z \in X$に対し、$(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$.

例 1.1 (共役カンドル) 群もしくはその共役類をXとし、二項演算$*$を$x * y = y^{-1}xy$と定めるとこれはカンドルとなる。これを**共役カンドル**という。

例 1.2 (Alexanderカンドル) Abel群Xとその上の自己同型Tに対し、二項演算$*$を$x * y = Tx + (1 - T)y$と定めるとこれはカンドルになる。このようなカンドルを**Alexanderカンドル**という。例えば$X = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$とし、$x * y = 2y - x$と定めたものは**二面体カンドル**と呼ばれるAlexanderカンドルである。

カンドルXに対し、その自己同型群を$\mathrm{Aut}(X)$と書く。カンドルの定義に出てきた条件(Q2), (Q3)より、写像s_y $(y \in X)$はXの自己同型であることがわかる。そこでこれらによって生成される$\mathrm{Aut}(X)$の部分群を**内部自己同型群**といい、$\mathrm{Inn}(X)$と書く：

$$\mathrm{Inn}(X) := \langle s_y \ (y \in X) \rangle \subset \mathrm{Aut}(X).$$

また、Xの**associated group** $\mathrm{As}(X)$を次のように定める：

$$\mathrm{As}(X) := \langle x \in X \mid y^{-1}xy = x * y \ (x, y \in X) \rangle.$$

本研究は科研費(課題番号: 16J01183)の助成を受けたものである。

* 〒606-8502 京都市左京区北白川追分町
e-mail: katsumi@kurims.kyoto-u.ac.jp

1.1. カンドルと結び目の不変量

ここではカンドルから得られる結び目の不変量について、簡単に復習したい。

$K \subset \mathbb{R}^3 \subset S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ を向きの付いた結び目、$N(K)$ をその（閉）管状近傍とし、$E(K) = \overline{S^3 \backslash N(K)}$ とおく。$E(K)$ 内の path γ であって、$\partial N(K)$ の点を始点、$\infty \in S^3$ を終点とするものと、γ の始点を基点とし、$N(K)$ の正のメリディアンディスクの境界となっているような $\partial N(K)$ 内の単純閉曲線 C との組 (γ, C) を **noose** と呼ぶ。Noose のイソトピー類の集合を $Q(K)$ とし、その上に二項演算 $*$ を

$$(\gamma, C) * (\gamma', C') = (\gamma \cdot \gamma'^{-1} \cdot C' \cdot \gamma', C)$$

と定めたものは K の**基本カンドル**と呼ばれるカンドルである。基本カンドルは（弱い意味で）結び目の完全不変量である（[7], [9]）など非常に強力な不変量であるが、実用上はそこから何らかの形で情報を引き出してくる必要がある。$Q(K)$ から有限カンドル X への準同型（**X-彩色**と呼ばれる）の数は**彩色数**と呼ばれる有用な不変量であり、例えば位数 n の二面体カンドルによる彩色は Fox の n-coloring に対応している。他にも彩色数の精密化としてカンドルコサイクル不変量（[3]）などが知られているが、ここでは省略させていただく。

一般にカンドル X について、その内部自己同型群 $\mathrm{Inn}(X)$ が X に推移的に作用[1]しているとき、X は**推移的**[2]であるという。任意のカンドル X は推移的部分カンドルの中で極大なものたちの非交和として表される（例えば [1], [4] 等を参照のこと）が、結び目の基本カンドルは推移的であるため、結び目の X-彩色は結局のところその極大推移的部分カンドルどれか 1 つによる彩色になってしまう。すなわち、結び目の不変量を考える上では推移的なカンドルが本質的な対象となるのである。

1.2. 推移的なカンドルの構成

ここでは推移的なカンドルの重要な構成法を紹介する。

G を群、H をその部分群とし、群 G の自己同型 ρ であって $\rho|_H = \mathrm{id}_H$ なるものが与えられたとする。このときコセット $H\backslash G$ 上に二項演算 $*$ を

$$Hx * Hy = H\rho(xy^{-1})y \qquad (x, y \in G)$$

と定めると、この演算は well-defined で、$(H\backslash G, *)$ がカンドルとなることが確かめられる。本稿ではこれを**3つ組 (G, H, ρ) のカンドル**と呼び、$Q(G, H, \rho)$ と表すことにする。

この構成法は次の意味で普遍的なものである：

定理 1.3 ([7]) 任意の推移的なカンドルはある 3 つ組のカンドルと同型である。

簡単に証明を復習しておく。推移的なカンドル X について、任意に $x_0 \in X$ を取って固定しておく。$G = \mathrm{Inn}(X)$ とし、H を G の x_0 に関する固定化群とする。$\rho = \mathrm{ad}\, s_{x_0} \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{grp}}(G)$ とすると、$H\backslash G \ni Hg \mapsto x_0 \cdot g$ によって $Q(G, H, \rho) \cong X$ となる。

註 1.4 ここでは $G = \mathrm{Inn}(X)$ とおいて証明したが、X に推移的に作用している群 G で、適切な意味で $\mathrm{ad}\, s_{x_0}$ が定まっているようなものであれば同様の証明が成り立つ。

[1] 慣例として $\mathrm{Inn}(X)$ や $\mathrm{As}(X)$ の X への作用は右からのものを考える。
[2] 通常は（代数的に）連結ということの方が多い。

1.3. 推移的なカンドルの最小表示[3]

前節では推移的なカンドルが３つ組のカンドルとして表されることを見たが、この表示は一意でない。そこで、それらの中で最も簡単なものでカンドルを表示することを考えよう。

カンドル X の associated group $\mathrm{As}(X)$ の生成元 x $(x \in X)$ に対し s_x を対応させることによって全射準同型 $p : \mathrm{As}(X) \to \mathrm{Inn}(X)$ が定まる。一方、同様の生成元 x に対し 1 を対応させることで別の全射準同型 $\epsilon : \mathrm{As}(X) \to \mathbb{Z}$ を定める。このとき像 $p(\mathrm{Ker}\,\epsilon) \subset \mathrm{Inn}(X)$ を $\mathrm{Inn}_0(X)$ と書くことにする。これは次のように定めても同じことである：

$$\mathrm{Inn}_0(X) := \langle s_x^{-1} s_y \ (x, y \in X) \rangle \subset \mathrm{Inn}(X)$$

$\mathrm{Inn}_0(X)$ は $\mathrm{Inn}(X)$ の部分群であるからやはり X に作用するが、この作用が推移的かどうかは $\mathrm{Inn}(X)$ の作用が推移的かどうかと同値である。従って註 1.4 でも述べたように、X を表示する３つ組 (G, H, ρ) として $G = \mathrm{Inn}_0(X)$ であるものが取れるが、この表示は次の意味で最小のものであるということができる：

命題 1.5 X を推移的なカンドル、x_0 をその 1 点とする。$G = \mathrm{Inn}_0(X)$, H を G の x_0 に関する固定化群とし、$\rho = \mathrm{ad}\, s_{x_0}$ とおく。このとき (G, H, ρ) は X を表示する３つ組で

(1) G の X への作用は忠実であり、
(2) 真部分群 $G' \subsetneq G$ であって X に推移的に作用しており、ρ で保存されるようなものは存在しない

という条件を満たすものとして（同型を除いて）一意に特徴づけられる。

このようにして X を３つ組のカンドルとして表すことをここでは X の**最小表示**と呼ぶことにする。

推移的なカンドルの間の準同型は、次のように群の情報を用いて記述される：

命題 1.6 $X = Q(G, H, \rho), X' = Q(G', H', \rho')$ をそれぞれ推移的なカンドルの最小表示とし、$x_0 = H \in X, x'_0 = H' \in X'$ とおく。このとき函手 Inn_0 は基点を保つカンドル準同型の集合

$$\{f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{qdle}}(X, X') \mid f(x_0) = x'_0\}$$

と、３つ組の情報と compatible な群準同型の集合

$$\{\tilde{f} \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{grp}}(G, G') \mid \tilde{f}(H) \subset H', \tilde{f} \circ \rho = \rho' \circ \tilde{f}\}$$

との間の 1 対 1 対応を定める。

ここでは基点を保つカンドル準同型を考えたが、G'（推移的であった）の元を後から合成すれば全ての準同型が得られるため、本質的な条件ではないことに注意されたい。

例 1.7 Abel 群 A 上の Alexander カンドル（例 1.2）は $Q(A, \{0\}, T)$ と表示される。このカンドルが推移的であるための必要十分条件は $\mathrm{id}_A - T \in \mathrm{End}(A)$ が自己同型であることとして与えられるが、このときこの表示は最小である。

[3] この節の内容はよく知られているものだとは思うのだが、明示的にどこかに書かれているかというとよくわからない、いわゆる folklore なのではないかと思う。

例 1.8 結び目 K の基本カンドル $Q(K)$ について、$\mathrm{As}(Q(K))$ は結び目（補空間の基本）群 π_K と同型であるから、$Q(K)$ は peripheral subgroup P とメリディアン $m \in P$ を用いて $Q(\pi_K, P, \mathrm{ad}\, m)$ と表示されるが、これは最小ではない。実際、P の部分群 P' を

$$P' = P \cap [\pi_K, \pi_K] = \{l \in P \mid [l] = 0 \in H_1(E(K))\}$$

と定めると $Q([\pi_K, \pi_K], P', \mathrm{ad}\, m)$ も $Q(K)$ と同型[4]であり、特に K が 1 次元結び目のとき、P' はロンジチュードが生成する部分群であり、こちらが $Q(K)$ の最小表示であることが確かめられる。

命題1.6、例1.7と併せると、推移的な Alexander カンドルによる彩色の集合は

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]}\big(H_1\big(\widetilde{E(K)}\big), A\big) \times A$$

と表せることがわかる（cf. [5]）。ここで $\widetilde{E(K)}$ は無限巡回被覆、A は $t \cdot x = Tx$ $(x \in A)$ によって $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$-加群とみなしている。

2. Smooth quandleとその局所構造

X を微分多様体[5]とし、$* : X \times X \to X$ をその上の可微分写像とする。この組 $(X, *)$ がカンドルの公理 (Q1), (Q3) を満たし、さらに

(Q2') 任意の $y \in X$ に対し、写像 $s_y = \bullet * y : X \ni x \mapsto x * y \in X$ は微分同相

であるとき、これを **smooth quandle** と呼ぶことにする。

Lie群を用いた共役カンドルや Alexander カンドル（T は Lie群としての自己同型とする）、対称空間やその一般化である generalized symmetric space などは smooth quandle の例となっている。次の例に示すように、任意の（1次元以上の）微分多様体上には非自明な smooth quandle の演算を入れることができる。

例 2.1 X を微分多様体、A をその部分集合とする。φ_t を X の 1 パラメーター変換群で $\varphi_t|_A = \mathrm{id}_A$ $({}^\forall t)$ なるものとし、また、A 上に台をもつ滑らかな関数 $f : X \to \mathbb{R}$ をとる。このとき $x, y \in X$ に対し $x * y = \varphi_{f(y)}(x)$ と定めると $(X, *)$ は smooth quandle となる。

Smooth quandle の間の準同型を考える際には、それが滑らかであることを仮定する。同様に、自己同型に対しても微分同相であることを仮定し、この意味での自己同型群を単に $\mathrm{Aut}(X)$ と書くことにする。$\mathrm{Inn}(X)$ や $\mathrm{Inn}_0(X)$, 推移性は離散的な場合と全く同様に定義され、X が位相空間として連結であるとき単に X が**連結**であると言うことにする（脚注2も参照のこと）。

Smooth quandle を構成・分類せよというのは自然な問題であるが、例2.1で見たようにあらゆる多様体上にとてもたくさんの smooth quandle の構造が入るため、これら全てを分類せよというのはあまり良い問題とは言えない。その応用を考えてみても、このような「面白くない」例がたくさん見つかっても嬉しくないわけで、何らかの理にかなった仮定をおくことが望ましい。そこで本稿ではまず考える対象に推移性を仮定しよう。1.1節で見たように結び目の不変量を考える際にこの仮定は本質的であるし、幾

[4] これ自体は K が高次元結び目や曲面結び目の場合にも全く同様に成り立つ。
[5] 本稿では全ての多様体に対し、第二可算公理を仮定する。特に、非可算無限個の連結成分を持つようなものは多様体とは呼ばないことにする。

何的に見てもこの仮定は多様体全体の対称性を要請する自然なものである。また、さらに連結性も仮定することにする。1つには記述などの簡略化のためであり（実際ある程度この仮定を弱めても以下の結果は成り立つ）、smooth quandle X に対し $\pi_0(X)$ が離散的なカンドルになるというのも理由の1つである。従って以下では推移的で連結なsmooth quandle[6] を主に考え、その構成・分類を試みる。

例 2.2 $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ の放物的な元全体の成す共役カンドルは、generalized symmetric space でないs.t.c.q. の1例である。

2.1. Smooth quandleの構成

1.2節では離散的な場合に全ての推移的なカンドルが3つ組を用いて構成されることを見た。ここではそれをsmooth category で再現してみよう。

G をLie群とし、H をその閉部分群とする。G の（Lie群としての）自己同型 ρ であって $\rho|_H = \mathrm{id}_H$ なるものが与えられると、1.2節で見たように3つ組のカンドル $Q(G,H,\rho)$ が定まるが、このとき $H\backslash G$ は等質空間であり、この演算によって $Q(G,H,\rho)$ はsmooth quandleとなっていることがわかる。

では、これで全てのs.t.c.q. X が得られるのだろうか？ すなわち、定理1.3は成り立つのだろうか？ 単純に位相空間の範疇で考えるのならばこれはもちろん正しい。$\mathrm{Aut}(X)$ にコンパクト開位相を入れ、これを G とすれば、定理1.3が証明まで含め全く同様に成り立つ。しかし、上記の構成を適用するためには $\mathrm{Aut}(X)$ またはその部分群である $\mathrm{Inn}(X)$ などがLie群であることが必要であり、これは全く非自明なことである。

それについて結果を述べるため、少し準備をする。$\mu = * : X \times X \to X$ とし、

$$\mathfrak{X}_{\mathrm{aut}}(X) = \{V \in \mathfrak{X}(X) \mid \mu_*(V(x), V(y)) = V(x * y)\ ({}^\forall x, y \in X)\}$$

とおく。すなわち、X 上のベクトル場であり、局所的に X の自己同型を生成するようなもの全体を $\mathfrak{X}_{\mathrm{aut}}(X)$ とおいたのである。また、$x_0 \in X, v \in T_{x_0}X$ に対し、

$$V_v(x) = (\mu_*)_{(x \bar{*} x_0, x_0)}(0, v)$$

としてベクトル場 V_v を定め、

$$\mathfrak{X}_{\mathrm{inn}}(X) = \mathrm{span}\{V_v \mid v \in TX\}$$

とおく。v は1点の接空間だけから取ってきているわけではないことに注意されたい。V_v はinformalには $s_{x_0+v} \circ s_{x_0}^{-1}$ と書くことができる。すなわち $x_0 \in X$ を少し動かしたとき、自己同型 s_{x_0} がどう変化するかというのを表したものである。$\mathfrak{X}_{\mathrm{aut}}(X)$ はLie環になっており、$\mathfrak{X}_{\mathrm{inn}}(X)$ はその部分Lie環であることがわかる。

得られた結果について述べる。

定理 2.3 X をs.t.c.q. とする。このときその自己同型群 $\mathrm{Aut}(X)$ にコンパクト開位相を入れたものは $\mathfrak{X}_{\mathrm{aut}}(X)$ をLie環とするLie群であり、Lie変換群として X に作用している。さらに内部自己同型群 $\mathrm{Inn}(X)$ は $\mathrm{Aut}(X)$ の（閉とは限らない）部分Lie群であり、そのLie環は $\mathfrak{X}_{\mathrm{inn}}(X)$, 単位成分は $\mathrm{Inn}_0(X)$ である。

---

[6] s.t.c.q. = smooth transitive connected quandle と略すことにする。

従って、定理1.3のsmooth category版が成り立つ：

系 2.4 任意のs.t.c.q.は（Lie群を用いた）3つ組のカンドルと同型である。

$G = \mathrm{Inn}_0(X)$ を取ってくることで、s.t.c.q.を表示するとき G が連結なものを取れることも保証される。定理2.3の後半から、カンドルの最小表示に関する命題1.5はsmooth categoryでも全く同様に成り立つことがわかる。命題1.6についても同様である。

2.2. Smooth quandleの分類と局所構造

定理2.3及び系2.4により、理論上はs.t.c.q.の分類が可能である。すなわち、最小表示を与えているような3つ組を分類すればよいということになるのだが、これをそのまま実行に移すのはかなり難しい。ここではLie群の場合に倣い、まず代数的な局所構造の分類から単連結なものの分類を得た上でその商を考えるという方法を試みよう。

まず、単連結なものの商を考えるということを正当化しておこう。

命題 2.5 X を連結なsmooth quandleとし、x_0 をその1点とする。$\tilde{X}$ を X の連結な被覆空間、$p : \tilde{X} \to X$ をその被覆写像とし、$\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ を1つ取る。$\pi_1(X, x_0)$ の部分群 $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ が s_{x_0*} で保たれるならば、すなわち

$$s_{x_0*}(p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$$

ならば、$\tilde{X}$ 上のsmooth quandleの演算 $\tilde{*}$ であって p が $(\tilde{X}, \tilde{*})$ から $(X, *)$ へのsmooth quandleの準同型となるようなものが唯1つ存在する。

特にsmooth quandleの普遍被覆はsmooth quandleである。X が推移的なら $\tilde{X}$ も推移的となることがわかるので、単連結s.t.c.q.の分類ができればその商として全てのs.t.c.q.が得られるということになる。

次に3つ組の情報を局所的な言葉で書き直そう。Lie環 $\mathfrak{g}$ とその部分Lie環 $\mathfrak{h}$、$\rho|_{\mathfrak{h}} = \mathrm{id}_{\mathfrak{h}}$ なるLie環 $\mathfrak{g}$ の自己同型 ρ という3つ組 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \rho)$ のことを**無限小カンドル**と呼ぶことにする。Smooth quandleの3つ組による表示が与えられたとき、そのLie環を取ると無限小カンドルが得られる。逆に無限小カンドル $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \rho)$ が与えられたとき、$\mathfrak{g}$ をLie環とする単連結なLie群 G を考え、H を $\mathfrak{h}$ に対応する G の連結なLie部分群とする。もし H が閉部分群であれば、単連結なsmooth quandle $Q(G, H, \rho)$ が得られることになる。

s.t.c.q.の3つ組による表示は一意ではないが、1.3節、2.1節で見たようにその中で最小なものは一意に定まるのであった。推移性や最小表示の特徴づけを対応する無限小カンドルの言葉で書き下すと、次のようになる：

(E) 忠実性：$\mathfrak{h}$ は非自明な $\mathfrak{g}$ のイデアルを含まない。

(T) 推移性：$\mathfrak{g}_0$ を $(1-\rho)(\mathfrak{g})$ で生成される $\mathfrak{g}$ のイデアルとするとき、$\mathfrak{g}_0 + \mathfrak{h} = \mathfrak{g}$.

(M) 最小性：$\mathfrak{g}$ の部分Lie環 $\mathfrak{g}'$ が ρ で保たれ $\mathfrak{g}' + \mathfrak{h} = \mathfrak{g}$ を満たすならば、$\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$.

すなわち、上記の H が閉であるという条件の下で、単連結s.t.c.q.と条件(E), (T), (M)を満たす無限小カンドルは1対1に対応する。なお、条件(T), (M)を共に満たすことは、次の条件(TM)と同値である：

(TM) $\mathfrak{g}_0$ を $(1-\rho)(\mathfrak{g})$ で生成される $\mathfrak{g}$ のイデアルとするとき、$\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$.

纏めると、s.t.c.q. を分類するためには、まず (E), (T), (M)（もしくは (E) と (TM)）を満たす無限小カンドルを分類し、次に対応する単連結s.t.c.q. を構成し（このとき H が閉とならないものは除外する)、最後にそれらのどのような商が取れるかを考えればよい。それでも一般の次元でこれらを実行するのは難しいが、１、２次元の場合やコンパクト３次元の場合については [6] で分類を行った。このときにはコンパクト s.t.c.q. についての次の結果を示し、用いた：

命題 2.6 X をコンパクトなs.t.c.q. とするとき、$\mathrm{Inn}_0(X)$ はコンパクト。

なお、一般にはコンパクト s.t.c.q.X に対して $\mathrm{Aut}(X)$ がコンパクトとは限らず、さらに $\mathrm{Aut}(X)$ がコンパクトであっても $\mathrm{Inn}(X)$ がコンパクトとは限らない。

3. カンドルの量子化へ向けて

この節では、smooth quandle の局所構造を変形して結び目不変量を構成する試みを紹介する。

$\mathbb{C}$-代数 H と、余積と呼ばれる準同型 $\Delta : H \to H \otimes H$, 対合と呼ばれる反準同型 $S : H \to H$, 余単位射と呼ばれる準同型 $\varepsilon : H \to \mathbb{C}$ の組であって、幾つかの条件を満たすもののことを **Hopf 代数**と呼ぶのであった[7]。典型例としては以下に挙げるようなものがあり、ここではこれらを考えれば十分である：

例 3.1 (群環) G を群とし、その群環 $\mathbb{C}[G]$ を考える。各 $g \in G \subset \mathbb{C}[G]$ に対し $\Delta(g) = g \otimes g$, $S(g) = g^{-1}$, $\varepsilon(g) = 1$ と定めると、通常の積と併せて $\mathbb{C}[G]$ は Hopf 代数となる。これは積は一般には非可換であるが、余積は余可換な Hopf 代数の例である。

例 3.2 (有限群の関数環) 有限群 G から $\mathbb{C}$ への写像全体の成す環（関数環）を H とする。$H \otimes H$ を $G \times G$ の関数環と同一視した上で、$f \in H, g, g' \in G$ に対し $\Delta(f)(g, g') = f(gg')$, $S(f)(g) = f(g^{-1})$, $\varepsilon(f) = f(e)$（$e \in G$ は単位元）と定めると H は Hopf 代数となる。これは積は可換だが、余積は一般には非余可換な Hopf 代数の例である。

例 3.3 (普遍包絡環) Lie 環 $\mathfrak{g}$ の普遍包絡環を $U(\mathfrak{g})$ と書く。$X \in \mathfrak{g} \subset U(\mathfrak{g})$ に対し $\Delta(X) = X \otimes 1 + 1 \otimes X$, $S(X) = -X$, $\varepsilon(X) = 0$ と定めると $U(\mathfrak{g})$ は Hopf 代数となる。これは一般には非可換かつ余可換な Hopf 代数の例である。

例 3.4 (量子群) Drinfeld-神保によって非可換かつ非可換な Hopf 代数の例が、単純な $\mathfrak{g}$ に対する $U(\mathfrak{g})$ の変形として与えられた。例えば $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2)$ のときには、$q \in \mathbb{C} \setminus \{0, \pm 1\}$ に対し $U_q(\mathfrak{sl}(2))$ を、$E, F, K^{\pm 1}$ で生成される非可換代数を次の関係式で割ったものとして定義する：

$$KE = q^2 EK, \quad KF = q^{-2} FK, \quad EF - FE = \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}}.$$

さらに

$$\begin{aligned}
&\Delta(E) = E \otimes K + 1 \otimes E, && S(E) = -EK^{-1}, && \varepsilon(E) = 0,\\
&\Delta(F) = F \otimes 1 + K^{-1} \otimes F, && S(F) = -KF, && \varepsilon(F) = 0,\\
&\Delta(K) = K \otimes K, && S(K) = K^{-1}, && \varepsilon(K) = 1
\end{aligned}$$

---

[7] 定義については [8], [10], [11] 等を参照のこと。大槻先生の本の定義は直接的でわかりやすいが、S が余積に対しても反準同型であるという条件が（少なくとも明示的には）書かれていないことに注意。

とすると $U_q(\mathfrak{sl}(2))$ は Hopf 代数となる。K を（形式的に）q^H とおき、$q \to 1$ としてみると $U(\mathfrak{sl}(2))$ が復元されることが確かめられる。

一般に Lie 群 G に対して群環 $\mathbb{C}[G]$ をそのまま考えると、それは Hopf 代数ではあるがとてつもなく大きく、取り留めのないものになってしまう。一方でその Lie 環 $\mathfrak{g}$ に対して $U(\mathfrak{g})$ を考えると、これは G の局所構造を反映した Hopf 代数であるばかりでなく、ある意味で G の「群環」だと思うことができる。すなわち、仮想的に $X \in \mathfrak{g}$ に対する $e^X \in G$ を $U(\mathfrak{g})$ の元とも思ってみる（もちろん実際にはそのような元は $U(\mathfrak{g})$ に含まれていない）と、このようなものに対する $U(\mathfrak{g})$, $\mathbb{C}[G]$ それぞれの中での積や余積などの Hopf 代数の演算は一致していることがわかる。このような観点で見るならば、量子群とは Lie 群の「群環」を変形したものということができよう。

さて、カンドル $X = (X, *)$ に対してその元を基底とするベクトル空間 $H = \mathbb{C}[X]$ を考え、そこに $*$ を線型に拡張して演算を入れると、これは self-distributive な代数となる（言わば X に対するカンドル環である）。すなわち、群環の場合と同様に $\Delta : H \to H \otimes H$ を $\Delta(x) = x \otimes x$ $(x \in X)$ で定義すると、カンドルの公理 (Q3) に対応する式

$$\text{(QD)} \qquad * \circ (* \otimes \mathrm{id}_H) = * \circ (* \otimes *) \circ P_{2,3} \circ (\mathrm{id}_H \otimes \Delta)$$

を満たす（$P_{2,3} : H^{\otimes 4} \to H^{\otimes 4}$ は 2, 3 番目の成分の入れ替えを表す）。特に $R : H \otimes H \to H \otimes H$ を $R = P \circ (* \otimes \mathrm{id}_H) \circ (\mathrm{id}_H \otimes \Delta)$ と定義すると、R は Yang-Baxter 方程式

$$\text{(YB)} \qquad (R \otimes \mathrm{id}_H) \circ (\mathrm{id}_H \otimes R) \circ (R \otimes \mathrm{id}_H) = (\mathrm{id}_H \otimes R) \circ (R \otimes \mathrm{id}_H) \circ (\mathrm{id}_H \otimes R)$$

を満たし、braid 群の表現を得ることができる[8]。有限カンドルを考えている場合には、結び目を braid 表示しておいてこの表現に関してトレースを取れば、カンドルの彩色数が得られるのであった。

Lie 群の群環に対応する普遍包絡環と類似の構成を、smooth quandle のカンドル環に対して行ってみよう。2.2 節で見たように、s.t.c.q. の局所構造は無限小カンドル $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \rho)$ によって記述されるのであった。ここでは簡単のため、$\mathfrak{h} = 0$ の場合を考えてみる。この場合、考える代数自体は $H = U(\mathfrak{g})$ を持ってくるのが自然であろう。3 つ組のカンドルの構成を思い出すと、ここに次のような演算を入れることに思い至る：

$$x * y = \sum_i \rho(xS(y_{i,1}))y_{i,2}. \tag{1}$$

但し $\Delta(y) = \sum_i y_{i,1} \otimes y_{i,2}$ とした。実際、このように定義した $* : H \otimes H \to H$ が条件 (QD) を満たすこと、従って (YB) が成り立つことがわかる。

「量子カンドル」は存在するかというのは本稿の「夢」とでも言うべき課題であるが、この「カンドル環」を適切に変形することができれば、それはこの「夢」に答えを与えたと言ってよいであろう。ここで $\mathfrak{g}$ を単純 Lie 環とし、$U(\mathfrak{g})$ の変形として $U_q(\mathfrak{g})$ が定義されたことを思い出すと、量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ もしくはより一般の Hopf 代数 H とその上の自己同型 ρ に対して (1) によって演算 $*$ を定義すればよいのではないか、というのは至極当然なのだが、実はこれはうまくいかない。すなわち、一般にこの定義による $*$ は条件 (QD) を満たさないし、そこから得られる R についても (YB) を満たさないのである。以下、これに対する 2 つの打開案を与える。

[8] 一般に、H が余可換であれば (QD) から (YB) が従う（[2]）。

3.1. 第 1 の方針

H を Hopf 代数、ρ をその自己同型とする。上では演算 $*: H \otimes H \to H$ を定義した上で $R: H \otimes H \to H \otimes H$ を定義するという方針を取っていたが、ここでは $*$ や条件 (QD) 自体は諦め、(YB) を満たすような R であって上記の $U(\mathfrak{g})$ に対する R の一般化になっているようなものを構成してみる。

$R: H \otimes H \to H \otimes H$ を次のように定義する：

$$R(x \otimes y) = \sum_i y_{i,2} \otimes \rho(xS(y_{i,1}))y_{i,3}.$$

言い換えると、

$$R = (\mathrm{id}_H \otimes \mu) \circ (\mathrm{id}_H \otimes (\rho \circ \mu) \otimes \mathrm{id}_H) \circ (\mathrm{id}_{H \otimes H} \otimes S \otimes \mathrm{id}_H) \circ P_{1,2} \circ P_{2,3} \circ (\mathrm{id}_H \otimes \Delta^{(2)})$$

とする。但し $\Delta^{(2)} = (\mathrm{id}_H \otimes \Delta) \circ \Delta$ である。このとき、次が成り立つ。

命題 3.5 $R: H \otimes H \to H \otimes H$ は右 H 加群の同型であり、R は (YB) を満たす。

従って特に braid 群の表現 $B_n \to \mathrm{Aut}_H(H^{\otimes n})$ が得られる。なお、R が右 H 加群の同型になっていることは群（環）がカンドル（環）に作用していることに対応している。

(YB) というのは (Q3) もしくは Reidemeister 変形 RIII に対応するものであったし、R^{-1} の存在は (Q2) や RII に対応するものであるから、必要なら少し修正を加えてやれば結び目不変量が得られるのではないかという期待が持てるが、残念ながらこれはうまくいかない。例えば H は有限次元と仮定し、（右 H 加群の準同型を得るため）quantum trace を取ったとしても、正負の full twist に対応する H の元が互いの逆元になっているとは限らないのである。Quantum trace の取り方を工夫すればこの問題は解決されるのかもしれないが、既存の方法ではうまくいきそうにないというのが現状である。

さらにこれ以外にも色々と問題点がある。まず第 1 に、無限次元の量子群についてはそれ自体の quantum trace を取ることができず、無限次元表現から情報をうまく取り出す方法が必要となる。例えば q が 1 の冪根である場合には $U_q(\mathfrak{g})$ の商で有限次元のものを取ることができ（[8] の $\overline{U}_q$）、$U_q(\mathfrak{sl}(2))$ であれば

$$\rho(E) = \lambda E, \quad \rho(F) = \lambda^{-1} F, \quad \rho(K) = K$$

と定義すると Hopf 代数の自己同型 ρ も得られるのでこれを考えるのは 1 つの手であるが、できれば一般の量子群について考えたいところである。また、こうして得られた表現や不変量が何なのか、という問題が挙げられる。上記の例で q が原始 3 乗根の場合ですら $\overline{U}_q(\mathfrak{sl}(2))$ は 27 次元であり、$\overline{U}_q$ の表現に関して完全可約性が成り立たないという難しさも相まって、現時点（本稿執筆時点）ではこの表現がどういうものなのか、全くわかっていない。量子群を用いているという意味では何か非自明な情報を含んでいてほしいと期待するところではあるが、一方で普遍 R-行列のようなものが構成に現れていない以上、特別変わった情報は含まれていないのではないかとも思われる。

3.2. 第 2 の方針

もう 1 つの案は (1) をもう少し変形することで (YB) を満たすようにしようというものである。より具体的には、$\mathcal{R} = \sum_j \alpha_j \otimes \beta_j \in H \otimes H$ であって、$R: H \otimes H \to H \otimes H$ を

$$R(x \otimes y) = \sum_{i,j} y_{i,3}\alpha_j \otimes \rho(xS(y_{i,1}))y_{i,2}\beta_j$$

と定めたときこれが (YB) を満たすようなものを見つけようという方針である。そのような $\mathcal{R}$ が存在するのかはわからないが、$H = U_q(\mathfrak{g})$ の場合にはこれを $U(\mathfrak{g})[[h]]$ ($q = e^h$ と置き換えた）の中で考えておき[9]、$\mathcal{R} = 1 \pmod h$ から始めて順に $\mathcal{R}$ を定めていくというのは（理論的には）１つの方法である。

この書き方から察してもらえるかもしれないが、この方針は全く進んでいないし、うまくいくのかどうかもわからない。仮にうまくいったとしても、第１の方針でも挙げた無限次元のものからどのように情報を引き出すか、といった問題は依然残っている。それにもかかわらずここでこの方針を紹介したのは、ρ が自明な場合、すなわち $\rho = \mathrm{id}_H$ の場合にはこれがリボン Hopf 代数から結び目の不変量を得る方法そのものであったからである。言い換えると、もしこの方針がうまくいけば、従来の量子不変量はその最も簡単な場合に過ぎなかったということが言えるのである。

. . . .

思い返してみれば、量子不変量で $q = 1$ の場合、結び目の交点では元をただ交換するということが行われるが、これは $U(\mathfrak{g})$ に自明カンドルの構造を入れているようなものであり、群の共役の概念とは少し遠いものなのであった。量子不変量と古典的な不変量の間に隔たりが感じられる理由がこの辺りにあるのだとすれば、ここで考えたような方法によって得られた「量子カンドル」がそこを結び付けてくれるのではないかという期待が持てるのである。

参考文献

[1] Andruskiewitsch, N., Graña, M., *From racks to pointed Hopf algebras.* Adv. Math. **178** (2003), 177–243.

[2] Carter, J. S., Crans, A. S., Elhamdadi, M., Saito, M., *Cohomology of categorical self-distributivity.* J. Homotopy Relat. Struct. **3** (2008), 13–63.

[3] Carter, J. S., Jelsovsky, D., Kamada, S., Langford, L., Saito, M., *Quandle cohomology and state-sum invariants of knotted curves and surfaces.* Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), 3947–3989.

[4] Iijima, Y., Murao, T., *On connected component decompositions of quandles*, to appear in Tokyo J. Math.

[5] Inoue, A., *Quandle homomorphisms of knot quandles to Alexander quandles.* J. Knot Theory Ramifications **10** (2001), 813–821.

[6] Ishikawa, K., *On the classification of smooth quandles*, preprint.

[7] Joyce, D., *A classifying invariant of knots, the knot quandle.* J. Pure Appl. Algebra **23** (1982), 37–65.

[8] Kassel, C., *Quantum groups.* Graduate Texts in Mathematics, 155. Springer-Verlag, New York, 1995.

[9] Matveev, S. V., *Distributive groupoids in knot theory.* (Russian) Mat. Sb. (N.S.) **119**(**161**) (1982), 78–88.

[10] Ohtsuki, T., *Quantum invariants.* A study of knots, 3-manifolds, and their sets. Series on Knots and Everything, 29. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2002.

[11] 大槻 知忠、結び目の不変量、共立出版、2015.

[9] これは適切な言い方ではないが、よくご存じの方にはこれで何が言いたいのかわかってもらえると信じる。詳しくは [8] を参照のこと。