Chain level string topology, pseudo-holomorphic disks, and Lagrangian submanifolds

入江　慶　(東京大学大学院数理科学研究科)*

1. Lagrange 部分多様体のトポロジー

シンプレクティック多様体 (M,ω) とは $2n$ 次元の多様体 [1] M と M 上の閉かつ非退化な 2 形式 ω との組である．もっとも基本的なのは

$$(\mathbb{C}^n, \omega_n := \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i)$$

で，任意のシンプレクティック多様体は局所的にはこの形に書けることが知られている（Darboux の定理）．M の n 次元部分多様体 L であって $\omega|_L \equiv 0$ となるものを (M,ω) の Lagrange 部分多様体という．Lagrange 部分多様体はシンプレクティック幾何学の基本的な研究対象であるので，与えられたシンプレクティック多様体の Lagrange 部分多様体を「分類」せよというのは自然な問題である．ところが次の問題すら完全解決からはほど遠い：

問題 1.1 与えられた n 次元閉多様体 L に対して，埋込 $e: L \to \mathbb{C}^n$ で $e^*\omega_n \equiv 0$ を満たすもの（Lagrange 埋込）が存在するか判定せよ．

$\{(z_1,\ldots,z_n) \in \mathbb{C}^n \mid |z_1| = \cdots = |z_n| = 1\}$ は ω_n について Lagrange 部分多様体であるので n 次元トーラスは $(\mathbb{C}^n,\omega_n)$ への Lagrange 埋込を持つ．一方，L から $(\mathbb{C}^n,\omega_n)$ への Lagrange 埋込が存在するなら L の Euler 数は偶数であり，また L が向き付け可能なら Euler 数は 0 であることが初等的な考察から分かる．このような初等的な考察を越える（おそらく）最初の結果は Gromov による次の定理 1.2 である．

閉複素円盤 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \le 1\}$ を D とおく．

定理 1.2 (Gromov [9]) $(\mathbb{C}^n,\omega_n)$ の任意の閉 Lagrange 部分多様体 L について，正則写像 $u: (D,\partial D) \to (\mathbb{C}^n, L)$ で $\int_D u^*\omega_n > 0$ を満たすものが存在する．

Stokes の定理から $\langle \sum_{i=1}^n x_i dy_i|_L, u|_{\partial D}\rangle = \int_D u^*\omega_n$ であるので $H^1(L:\mathbb{R}) \neq 0$，特に L は単連結でないことが分かる．

Fukaya [6] は，Gromov が定理 1.2 を証明するのに用いた擬正則円盤のモジュライ空間の理論と，Chas-Sullivan [2] によるストリング・トポロジー（ループ空間上の交叉積の理論）とを合わせていくつかの重要な結果を得，特に $(\mathbb{C}^3,\omega_3)$ への Lagrange 埋込を持つ素な三次元有向閉多様体を決定した（定理 2.3）．

しかし [6] の議論はストリング・トポロジーにおける交叉積をチェイン・レベルで定義したものを使う必要があり，そのようなものを厳密に取り扱う枠組は当時は与えられていなかった．講演者は，Chas-Sullivan [2] が発見した自由ループ空間のホモロジー上の Batalin-Vilkovisky (BV) 代数構造をチェイン・レベルに持ち上げる枠組を [12] で

本研究は日本学術振興会海外特別研究員派遣制度の支援を受けた．
* e-mail: iriek@ms.u-tokyo.ac.jp
[1] 本稿では多様体は全て C^∞ 級とする．

導入し，それと擬正則曲線の理論（特に，Fukaya-Oh-Ohta-Ono [8] による擬正則円盤のモジュライ空間上の倉西構造の構成とその摂動）を合わせて，[13] において上で述べた議論を厳密に実行した．これを解説するのが本稿の目的である．

本稿の構成は次のようである．まず2節で主結果（定理 2.1）を述べ，Lagrange部分多様体のトポロジーへの応用を与える．3節でストリング・トポロジー，特にループ括弧積について説明し，4節で Fukaya [6] に基づき主結果の証明のアイデアを説明する．5節では [12] で導入した自由ループ空間の鎖複体モデルを説明し，6節では，5節の内容と擬正則円盤のモジュライ空間の理論をあわせて，主結果の証明を概説する．

2. 主結果とその応用

本節では2.1節で若干の準備をした後に2.2節で主結果（定理2.1）とその応用を述べる．

2.1. 準備

2.1.1. L_∞ 代数

3節で説明するように，閉多様体の自由ループ空間のホモロジーの上にはループ括弧積によるLie代数の構造が定まる．本稿で重要な役割を果たすのは，この演算をチェイン・レベルで定義することで得られる高次のループ括弧積（Massey積のたぐい）である．このようなものを扱う枠組として L_∞ 代数（ホモトピーLie代数ともよばれる）の概念が便利である．ここではとりあえず定義だけ説明する．

V を $\mathbb{Z}$ 次数付ベクトル空間とする（係数体は標数0，本稿では主に $\mathbb{R}$ の場合を考える）．$(\ell_k)_{k\ge1}$ で次の条件を満たすものを V 上の L_∞ 構造といい，V と $(\ell_k)_{k\ge1}$ の組を L_∞ 代数という：

- 任意の $k\ge1$ について，ℓ_k は $\wedge^k V$ から V への次数 $k-2$ の線形写像．
- 任意の $k\ge1$ と $x_1,\dots,x_k\in V$ について

$$\sum_{\substack{k_1+k_2=k+1\\ \sigma\in\mathbb{S}_k}} \frac{(-1)^\star}{k_1!(k_2-1)!}\ell_{k_2}(\ell_{k_1}(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(k_1)}),x_{\sigma(k_1+1)},\dots,x_{\sigma(k)})=0 \qquad (1)$$

  が成立する（符号 $\star$ を表す式は省略する）．

(1) は $k=1$ のときは $\ell_1^2=0$ つまり (V,ℓ_1) が鎖複体であることを表す．$k=2$ のときは ℓ_2 が Leibniz 則を満たすこと，$k=3$ のときは ℓ_2 が Jacobi 則をホモトピー ℓ_3 を法として満たすことを表している．特に任意の $k\ge3$ について $\ell_k=0$ となるならば Jacobi 則は厳密に成立し，そのような L_∞ 代数を dg Lie代数という．本稿では，dg Lie代数の場合は ℓ_1 を ∂, ℓ_2 を $\{\,,\,\}$ と書く．

2.1.2. Maslov 類

L を $(\mathbb{C}^n,\omega_n)$ の閉Lagrange部分多様体とする．まず，Maslov類 $\mu_L\in H^1(L:\mathbb{Z})$ を定義しよう（混乱の恐れのないときは μ_L を単に μ と書く）．

$\mathbb{C}^n$ の実 n 次元部分ベクトル空間 V で $\omega_n|_V\equiv0$ を満たすもの全体のなす集合を GLag_n とおき，次のような写像の列を考える：

$$\rho_L: L\to \mathrm{GLag}_n\cong U(n)/O(n)\to U(1).$$

一つ目の写像は各 $x \in L$ に $T_xL \subset \mathbb{C}^n$ を与えることで，二つ目は $U(n)/O(n) \to \mathrm{GLag}_n;\ [U] \mapsto U(\mathbb{R}^n)$ で定義され，三つ目は $\det^2$ である．このとき $\mu_L := \rho_L^*[U(1)]$ と定義する．$\mathbb{Z}$ のイデアル $\mu_L(H_1(L:\mathbb{Z}))$ を生成する非負整数を L の最小 Maslov 数という．L が向き付け可能なときは最小 Maslov 数は偶数であることが容易に分かる．

2.1.3. ループ空間の記号

次にループ空間に関する記号をいくつか導入する．$\mathcal{L}L := C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, L)$ とおき C^∞ 級位相を入れる．$a \in H_1(L:\mathbb{Z})$ に対して $\mathcal{L}^aL := \{\gamma \in \mathcal{L}L \mid [\gamma] = a\}$ とおき

$$\mathbb{H}_*(\mathcal{L}^aL) := H_{*+n+\mu(a)-1}(\mathcal{L}^aL:\mathbb{R}), \qquad \mathbb{H}_*(\mathcal{L}L) := \bigoplus_{a \in H_1(L:\mathbb{Z})} \mathbb{H}_*(\mathcal{L}^aL)$$

とおく．任意の $a \in H_1(L:\mathbb{Z})$ に対して $\bar{a} \in H_2(\mathbb{C}^n, L:\mathbb{Z})$ を $\partial\bar{a} = a$ で定義し，任意の実数 $E > 0$ に対して

$$F^E\mathbb{H}_*(\mathcal{L}L) := \bigoplus_{\omega_n(\bar{a})>E} \mathbb{H}(\mathcal{L}^aL)$$

とおけば $\mathbb{H}_*(\mathcal{L}L)$ 上の自然な Filtration (Action Filtration) が定まる．最後に Action Filtration による完備化を定義する：

$$\widehat{\mathbb{H}}_*(\mathcal{L}L) := \varprojlim_{E\to\infty} \mathbb{H}_*(\mathcal{L}L)/F^E\mathbb{H}_*(\mathcal{L}L).$$

2.2. 主結果とその応用

次の定理 2.1 が本稿の主結果である．

定理 2.1 L は $(\mathbb{C}^n, \omega_n)$ の閉 Lagrange 部分多様体で，向きとスピン構造[2] を持つとする．このとき，$\mathbb{H}_*(\mathcal{L}L)$ 上の L_∞ 構造 $(\ell_k)_{k\geq 2}$（$\ell_1 = 0$ とする）と $X \in \widehat{\mathbb{H}}_{-1}(\mathcal{L}L), Y \in \widehat{\mathbb{H}}_2(\mathcal{L}L)$ で次の条件を満たすものが存在する：

(i): 任意の $k \geq 2$ と $a_1, \ldots, a_k \in H_1(L:\mathbb{Z})$ に対して

$$\ell_k(\mathbb{H}(\mathcal{L}^{a_1}L) \wedge \cdots \wedge \mathbb{H}(\mathcal{L}^{a_k}L)) \subset \mathbb{H}(\mathcal{L}^{a_1+\cdots+a_k}L)$$

が成り立つ．特に ℓ_k は Action Filtration を保つので，$\widehat{\mathbb{H}}(\mathcal{L}L)$ の上にのびる．

(ii): ある $\varepsilon > 0$ が存在して $X \in F^\varepsilon\widehat{\mathbb{H}}_{-1}(\mathcal{L}L)$ が成り立つ．

(iii): $X \in \widehat{\mathbb{H}}_{-1}(\mathcal{L}L)$ と $Y \in \widehat{\mathbb{H}}_2(\mathcal{L}L)$ は

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ell_k(X, \ldots, X)}{k!} = 0, \qquad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ell_k(Y, X, \ldots, X)}{(k-1)!}\bigg|_{a=0} = [L] \tag{2}$$

を満たす（特に X は L_∞ 構造 $(\ell_k)_{k\geq 2}$ の Maurer-Cartan 元）．

(2) の二つの式の左辺は無限和であるが，条件 (ii) より完備化 $\widehat{\mathbb{H}}_*(\mathcal{L}L)$ において意味を持つことに注意．また二つ目の式の右辺の $[L]$ は，各 $p \in L$ に対して p への定置ループを対応させる写像 $L \to \mathcal{L}L$ から定まるホモロジー上の線形写像 $H_*(L) \to H_*(\mathcal{L}L)$ による L の基本類の像である．

[2] スピン構造は，L に境界を持つ擬正則円盤のモジュライ空間の向きを決めるのに使う．実際はより弱い構造である相対スピン構造で十分である．[7] Chapter 8 参照．

定理 2.1 から導かれる，Lagrange 部分多様体のトポロジーに関する重要な結果を二つ説明する（いずれも Fukaya [6] による）．証明の詳細については [6] または [14] を参照されたい．

まず (2) の二つ目の式から，ある $a_1, \dots, a_{k-1} \in H_1(L : \mathbb{Z})$ が存在して

$$X(-a_1), \dots, X(-a_{k-1}), Y(a_1 + \cdots + a_{k-1}) \neq 0$$

となる．これと，一般に閉多様体 X が aspherical（つまり $\pi_{\geq 2}(X) = 0$）ならば任意の $i > \dim X$ について $H_i(\mathcal{L}X : \mathbb{Z}) = 0$ となることを用いると次が示される：

定理 2.2 L が定理 2.1 の条件を満たし aspherical ならば L の最小 Maslov 数は 2.

特に L が n 次元トーラスと同相なら最小 Maslov 数 2 であることが分かるが，これは Audin [1] による予想であった．この Audin 予想については多くの人の研究があったが，最近出版された Cieliebak-Mohnke [3] で最終的に解決されたようである．もう一つの重要な結論は次の定理である：

定理 2.3 L が向きづけ可能かつ素な三次元閉多様体とするとき次の二つは同値：

(i): L から $(\mathbb{C}^3, \omega_3)$ への Lagrange 埋込が存在する．

(ii): L は $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ と閉曲面との直積と同相.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) は初等的に確認できる．難しいのは (i) $\Longrightarrow$ (ii) であり，これは定理 2.1 とループ空間のトポロジーについての初等的な考察，および古典的な三次元多様体論をあわせて証明される．なお Lagrange 部分多様体が単調という強い仮定のもとでは（L が素であることを仮定しなくても）同様の結論が成立することが Damian [4] および Evans-Kędra [5] により示されていた．

3. ストリング・トポロジー，特にループ括弧積

ストリング・トポロジーとは，Chas-Sullivan により [2] で創始された,（多様体の）自由ループ空間上の交叉積の理論である．本稿では特に，自由ループ空間のホモロジー上に Lie 代数の構造を定めるループ括弧積（Loop Bracket）が重要な役割を果たす．本節では，その定義を（正確さはやや犠牲にして）説明する．

M を n 次元閉多様体とし自由ループ空間 $\mathcal{L}M = C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, M)$ への C^∞ 級写像 $\sigma : \Delta^k \to \mathcal{L}M, \tau : \Delta^\ell \to \mathcal{L}M$ を考える．M への写像

$$e_\sigma : \Delta^k \to M;\, p \mapsto \sigma(p)(0), \qquad \bar{e}_\tau : \Delta^\ell \times [0,1] \to M;\, (q, \theta) \mapsto \tau(q)(\theta)$$

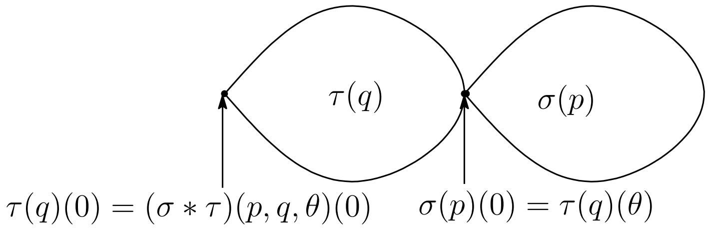
を考え，そのファイバー積から $\mathcal{L}M$ への写像

$$\sigma * \tau : \Delta^k {}_{e_\sigma}\!\times_{\bar{e}_\tau} (\Delta^\ell \times [0,1]) \to \mathcal{L}M \tag{3}$$

を

$$(\sigma * \tau)(p, q, \theta)(t) := \begin{cases} \tau(q)(2t) & (0 \leq t \leq \theta/2) \\ \sigma(p)(2t - \theta) & (\theta/2 \leq t \leq (1+\theta)/2) \\ \tau(q)(2t-1) & ((1+\theta)/2 \leq t \leq 1) \end{cases}$$

で定義する[3].



e_σ と $\bar{e}_\tau$ が M 上で横断的に交わっているとすると，そのファイバー積は $k+\ell+1-n$ 次元のコンパクト角付き多様体になり，その単体分割をとれば写像 $\sigma * \tau$ は $\mathcal{L}M$ 上の $k+\ell+1-n$ 次元の特異鎖を定める[4]．記号の濫用でこれも $\sigma * \tau$ と書く．

そこでループ括弧積 $\{\,,\,\} : H_*(\mathcal{L}M)^{\otimes 2} \to H_{*+1-n}(\mathcal{L}M)$ を

$$\left\{\left[\sum_i a_i\sigma_i\right], \left[\sum_j b_j\tau_j\right]\right\} := \left[\sum_{i,j} a_i b_j(\sigma_i * \tau_j + (-1)^\star \tau_j * \sigma_i)\right]$$

で定義する（符号 $\star$ は省略）．ここで a_i と b_j は係数，σ_i と τ_j は単体からの写像を表す．$\sigma_i * \tau_j$ と $\tau_j * \sigma_i$ は横断正則性条件が成立している場合にしか定義されないが，今の場合は，与えられたホモロジー類に対して，それを満たすようなサイクルをとればよいので問題ない．また，右辺のサイクルは $*$ 積を定義する際の単体分割の取り方に依存するが，ホモロジー類は一意に決まるので上の定義は well-defined である．

Chas-Sullivan [2] は，このようにして定義されたループ括弧積が $H_{*+n-1}(\mathcal{L}M)$ に次数付 Lie 代数の構造を定めることを示した．これは Batalin-Vilkovisky (BV) 代数というより大きい代数構造の一部であるが，そのシンプレクティック・トポロジーへの応用はまだあまりないと思われる．(BV 構造の他の部分として，結合的な積構造を定めるループ積があるが，[10] ではその Hamilton 力学系の周期解への応用を与えた．)

4. ループ括弧積と擬正則円盤のモジュライ空間

本節では，定理 2.1 の証明の直観的なアイデア（Fukaya [6] による）を説明する．まず L に境界を持つ正則円盤全体のなすモジュライ空間を考える．$a \in H_1(L:\mathbb{Z})$ に対して

$$\mathring{\mathcal{M}}(\bar{a}) := \{u : (D, \partial D) \to (\mathbb{C}^n, L) \mid \bar{\partial}u = 0,\, [u] = \bar{a}\}/\mathrm{Aut}(D, 1)$$

とおき（D は閉複素円盤），L のループ空間 $\mathcal{L}^a L$ への写像

$$\mathring{\mathrm{ev}}_a : \mathring{\mathcal{M}}(\bar{a}) \to \mathcal{L}^a L; \qquad [u] \mapsto u|_{\partial D}$$

を考える．左辺の $[u]$ は $\mathrm{Aut}(D, 1)$ 分の不定性があるためこれは well-defined ではないが，とりあえず議論を進める．$\mathring{\mathcal{M}}(\bar{a})$ は自然な位相についてコンパクトにならないが，安定写像を付け加えることで得られる標準的なコンパクト化が存在し，これを $\mathcal{M}(\bar{a})$ と書く．また $\mathring{\mathrm{ev}}_a$ をのばして $\mathrm{ev}_a : \mathcal{M}(a) \to \mathcal{L}^a L$ を定義する[5]．

[3] ただし右辺は一般には C^∞ 級ではないので，この定義は適当に修正する必要がある．その修正の仕方に標準的なものはないので，特にチェイン・レベルで話を作るときはこのステップは慎重に議論する必要があるが，ここではこの点には深入りしない．

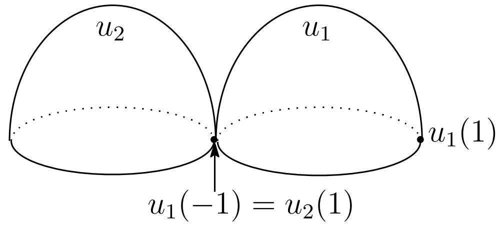
[4] もちろん単体分割の取り方は一意でないのでこれは well-defined でないが，その点もとりあえず深入りしない．

[5] このようにのばせるためには，$\mathring{\mathrm{ev}}_a$ を定義するときにループのパラメータ付けを慎重にきめる必要がある．

安定写像の定義は本稿では説明しないが（[7] Chapter 3参照），いま重要なのは$\mathcal{M}(\bar{a})$の余次元1の境界$\partial_1\mathcal{M}(\bar{a})$の内部$(\mathring{\partial_1}\mathcal{M})(\bar{a})$が一点で貼りあった二つの正則円盤のモジュライ空間と同一視できることである．これを

$$(\mathring{\partial_1}\mathcal{M})(\bar{a}) = \{(u_1, u_2) \mid \bar{\partial}u_1 = \bar{\partial}u_2 = 0, \quad [u_1], [u_2] \neq 0, \quad [u_1] + [u_2] = \bar{a}, \\ u_1(-1) = u_2(1)\}/(\mathrm{Aut}(D, \{-1, 1\}) \times \mathrm{Aut}(D, 1)) \tag{4}$$

と書こう．



さて

$$x(a) := (\mathrm{ev}_a)_*[\mathcal{M}(\bar{a})] \in C_{n+\mu(a)-2}(\mathcal{L}^a L) \tag{5}$$

とおこう．ここで$[\mathcal{M}(\bar{a})]$はモジュライ空間$\mathcal{M}(\bar{a})$の（境界を法とした）相対基本ホモロジー類を表す「鎖」であり，右辺の$C_*(\mathcal{L}^a L)$はループ空間$\mathcal{L}^a L$の「鎖」全体のなす複体を表す．勿論これは直観的な説明であり，(5) 式に意味を付けて本節の残りの議論を正当化することが次節以降の目標となるが，とりあえず議論をすすめる．[6] の重要な洞察は

$$\partial x(a) = \frac{1}{2} \sum_{a_1 + a_2 = a} \{x(a_1), x(a_2)\} \tag{6}$$

が成り立つということである．ここで右辺の$\{\,,\,\}$はチェイン・レベルで定義されたループ括弧積である．(6) は，直観的には，$\partial_1\mathcal{M}(\bar{a})$の記述 (4) とループ括弧積のチェイン・レベルの記述（3節）がちょうど対応することにより説明される．

さて$x := \sum_{\mathcal{M}(\bar{a}) \neq \emptyset} x(a)$は無限和であるが，Gromov コンパクト性より

$$\widehat{\mathcal{C}}_*(\mathcal{L}L) := \varprojlim_{E \to \infty} \Bigg(\bigoplus_{a \in H_1(L:\mathbb{Z})} C_{*+n+\mu(a)-1}(\mathcal{L}^a L) \Bigg) \Big/ \Bigg(\bigoplus_{\omega_n(\bar{a}) > E} C_{*+n+\mu(a)-1}(\mathcal{L}^a L) \Bigg)$$

の元として意味を持ち，Maurer-Cartan 方程式$\partial x - \frac{1}{2}\{x, x\} = 0$を満たす．さらに$\mathbb{C}^n$上の（コンパクト台）Hamilton 微分同相写像φで$\varphi(L) \cap L = \emptyset$を満たすものが存在することから，Cauchy-Riemann 方程式の Hamilton 摂動の1パラメータ族を考えて上と同様な議論をすることで，$y \in \widehat{\mathcal{C}}_2(\mathcal{L}L)$で$(\partial y - \{x, y\})|_{a=0}$が$L$の基本類を代表するサイクルとなるようなものがとれる．

以上は鎖複体$\widehat{\mathcal{C}}_*(\mathcal{L}L)$上の議論であったが，$L_\infty$代数に対する Homotopy Transfer Theorem（[15] Section 10.3 参照）を使うと，$\widehat{\mathbb{H}}_*(\mathcal{L}L)$上の$L_\infty$代数構造$(\ell_k)_{k \geq 2}$で dg Lie 代数$(\widehat{\mathcal{C}}_*(\mathcal{L}L), \{\,,\,\})$とホモトピー同値なものが定義され，さらに鎖$x, y$に対応して，$\widehat{\mathbb{H}}_*(\mathcal{L}L)$の元$X, Y$で定理2.1の条件を満たすものがとれる（このステップの詳細は[14]を参照されたい）．

以上が定理2.1の証明の概要であるが，これを正当化するにはまず，自由ループ空間$\mathcal{L}L$の適切な鎖複体モデル$\widehat{\mathcal{C}}_*(\mathcal{L}L)$を見つける必要がある．これは純トポロジー的な問題であり，5節で論じる．次に鎖x, yを定義するには，擬正則曲線（およびその Hamilton 摂動）のモジュライ空間の基本鎖を考える必要があるが，そのためにモジュライ空間の仮想摂動のテクニックを用いる．これを6節で論じる．

5. 自由ループ空間の鎖複体モデル

本節では[12]に基づいて自由ループ空間の鎖複体モデルを導入する．本節の内容は，ほぼ[11]の5.2節と同じであるが，両者の間にはいろいろ細かい違いがあることを注意しておく．本節の内容は純トポロジー的なものであるので，任意の n 次元有向閉多様体（M とかく）の上で論じる．

まず任意の $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{k+1}M := \{(T, \gamma, t_1, \ldots, t_k) \mid T \in \mathbb{R}_{>0}, \quad \gamma \in C^\infty(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, M),\\ 0 < t_1 < \cdots < t_k < T, \quad \partial_t^m \gamma(t_j) = 0 \quad (\forall m \geq 1,\, 0 \leq \forall j \leq k)\}\end{aligned}$$

とおく．これは $k+1$ 個の標識点 $t_0 := 0, t_1, \ldots, t_k$ を持つ M 上の自由ループ全体のなす空間である．最後の条件は，各標識点の上で m 階の微分が任意の $m \geq 1$ について消えているというもので，これは C^∞ 級という条件を保ったままループの concatenation をとるために必要となる．各 $j \in \{0, \ldots, k\}$ に対して，$\mathrm{ev}_j : \mathcal{L}_{k+1}M \to M$ を $\mathrm{ev}_j(T, \gamma, t_1, \ldots, t_k) := \gamma(t_j)$ で定義する．

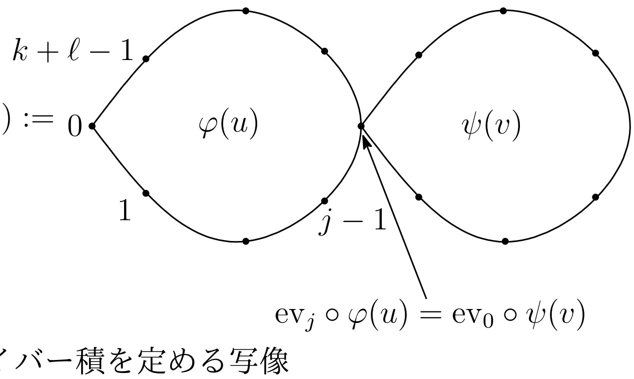
集合 $\mathcal{L}_{k+1}M$ の上には位相を考えず，かわりにプロットというものを考える．任意の自然数 n について $\mathbb{R}^n$ の有向部分多様体全体のなす集合を $\mathcal{U}_n$ とおき $\mathcal{U} := \bigsqcup_{n\geq 1} \mathcal{U}_n$ とおく．$U \in \mathcal{U}$ と写像 $\varphi : U \to \mathcal{L}_{k+1}M$ の組 (U, φ) で次の条件 (a), (b) を満たすものを $\mathcal{L}_{k+1}M$ 上のプロットとよび，プロット全体の集合を $\mathcal{P}(\mathcal{L}_{k+1}M)$ と書く．

(a): φ は C^∞ 級写像．つまり $\varphi = (T^\varphi, \gamma^\varphi, t_1^\varphi, \ldots, t_k^\varphi)$ とおけば $T^\varphi, t_1^\varphi, \ldots, t_k^\varphi \in C^\infty(U, \mathbb{R}_{>0})$ で，かつ $\{(u,t) \mid u \in U,\, 0 \leq t \leq T^\varphi(u)\} \to M; (u,t) \mapsto \gamma^\varphi(u)(t)$ は C^∞ 級写像．

(b): $\mathrm{ev}_0 \circ \varphi : U \to M$ は沈め込み．

任意の $(U, \varphi) \in \mathcal{P}(\mathcal{L}_{k+1}M)$, $(V, \psi) \in \mathcal{P}(\mathcal{L}_{\ell+1}M)$ と $j \in \{1, \ldots, k\}$ について，条件 (b) よりファイバー積 $U\,{}_{\mathrm{ev}_j \circ \varphi}\!\times_{\mathrm{ev}_0 \circ \psi} V$ は再び $\mathcal{U}$ の元になり（向きを決める必要があるが），ループの concatenation をとることで自然な写像 $\varphi *_j \psi : U\,{}_{\mathrm{ev}_j \circ \varphi}\!\times_{\mathrm{ev}_0 \circ \psi} V \to \mathcal{L}_{k+\ell}M$ が定義できる．

$(\varphi *_j \psi)(u, v) :=$



そこでプロットのファイバー積を定める写像

$$\circ_j : \mathcal{P}(\mathcal{L}_{k+1}M) \times \mathcal{P}(\mathcal{L}_{\ell+1}M) \to \mathcal{P}(\mathcal{L}_{k+\ell}M)$$

を

$$(U, \varphi) \circ_j (V, \psi) := (U\,{}_{\mathrm{ev}_j \circ \varphi}\!\times_{\mathrm{ev}_0 \circ \psi} V, \varphi *_j \psi)$$

で定義する．

次にプロットを用いてループ空間のホモロジーを計算するために，プロットとコンパクト台微分形式を組み合わせたde Rham鎖というものを考える．任意の$N \in \mathbb{Z}$に対して$\mathbb{R}$ベクトル空間

$$C_N^{\mathrm{dR}}(\mathcal{L}_{k+1}M) := \Big(\bigoplus_{(U,\varphi)\in\mathcal{P}(\mathcal{L}_{k+1}M)} \mathcal{A}_c^{\dim U - N}(U)\Big)/Z_N$$

を考える．ただし$\mathcal{A}_c^*(U)$はU上のコンパクト台微分形式全体のなす$\mathbb{R}$ベクトル空間であり，Z_Nは

$$(U,\varphi,\pi_!\omega) - (V,\varphi\circ\pi,\omega)$$

の形の元で生成される部分空間である（ここで$(U,\varphi)\in\mathcal{P}(\mathcal{L}_{k+1}M)$, $V\in\mathcal{U}$, $\pi : V \to U$はC^∞級の沈め込みであり，$\pi_!$はファイバーに沿った積分を表す）．$C_*^{\mathrm{dR}}(\mathcal{L}_{k+1}M)$上の境界作用素$\partial$は

$$\partial[(U,\varphi,\omega)] := (-1)^{|\omega|+1}[(U,\varphi,d\omega)]$$

で定義する．ファイバーに沿った積分は外微分と（符号を法にして）可換なのでこれはwell-definedであり，明らかに$\partial^2 = 0$を満たす．このようにして得られる鎖複体$C_*^{\mathrm{dR}}(\mathcal{L}_{k+1}M)$を$\mathcal{L}_{k+1}M$のde Rham鎖複体，その元をde Rham鎖ということにする．またそのホモロジーを$H_*^{\mathrm{dR}}(\mathcal{L}_{k+1}M)$と書く．このホモロジーは次の補題から計算される：

補題 5.1 (i): 任意の$k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$について，標識点を忘れることで定義される写像

$$\mathcal{L}_{k+1}M \to \mathcal{L}_1M; \qquad (T,\gamma,t_1,\dots,t_k) \to (T,\gamma)$$

が誘導する線形写像$H_*^{\mathrm{dR}}(\mathcal{L}_{k+1}M) \to H_*^{\mathrm{dR}}(\mathcal{L}_1M)$は同形である．

(ii): 同形$H_*^{\mathrm{dR}}(\mathcal{L}_1M) \cong H_*^{\mathrm{sing}}(\mathcal{L}M : \mathbb{R})$が成り立つ．ただし右辺は$\mathcal{L}M = C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, M)$に$C^\infty$位相を入れたものの$\mathbb{R}$係数特異ホモロジー．

補題5.1 (ii)は，Mの自由ループ空間をM上のbroken geodesicsの空間の列で近似して，有限次元多様体に対するde Rhamの定理に帰着することで証明される．

さてde Rham鎖のファイバー積は容易に定義できる．すなわち，整数$1 \leq j \leq k$と$\ell \geq 0$に対して，鎖写像$\circ_j : C_*^{\mathrm{dR}}(\mathcal{L}_{k+1}M) \otimes C_*^{\mathrm{dR}}(\mathcal{L}_{\ell+1}M) \to C_{*-n}^{\mathrm{dR}}(\mathcal{L}_{k+\ell}M)$を

$$[(U,\varphi,\omega)] \circ_j [(V,\psi,\eta)] := (-1)^\star [(U\,{}_{\mathrm{ev}_j\circ\varphi}\!\times_{\mathrm{ev}_0\circ\psi} V, \varphi *_j \psi, \omega\times\eta)]$$

で定義する（符号$\star$は省略）．そこで$\prod_{k=0}^\infty C_{*+n+k-1}^{\mathrm{dR}}(\mathcal{L}_{k+1}M)$上のdg Lie代数の構造が次の式で定義できる：

$$\begin{aligned}
(\partial x)_k &:= \partial(x_k),\\
(x*y)_k &:= \sum_{\substack{k_1+k_2=k+1\\ 1\leq j\leq k_1}} (-1)^\star x_{k_1}\circ_j y_{k_2},\\
\{x,y\} &:= x*y - (-1)^{|x||y|}y*x.
\end{aligned}$$

これを用いて，自由ループ空間$\mathcal{L}M$の鎖複体モデルを次のように定めよう：

定理 5.2 ([12]) $\mu = (\mu_k)_{k\ge 0} \in \prod_{k=0}^{\infty} C^{\mathrm{dR}}_{n+k-2}(\mathcal{L}_{k+1}M)$ が次の条件を満たすとする：

(i): μ は Maurer-Cartan 元，つまり $\partial\mu - \frac{1}{2}\{\mu,\mu\} = 0$ が成り立つ．

(ii): $\mu_0 = \mu_1 = 0$.（これと (i) から $\partial\mu_2 = 0$ が導かれる．）

(ii): 同形 $H^{\mathrm{dR}}_n(\mathcal{L}_3 M) \cong H^{\mathrm{sing}}_n(\mathcal{L}M : \mathbb{R})$ を通じて，$[\mu_2] \in H^{\mathrm{dR}}_n(\mathcal{L}_3 M)$ は $[M] \in H^{\mathrm{sing}}_n(\mathcal{L}M : \mathbb{R})$ に対応する．

このとき同形

$$H_*\Bigl(\prod_{k=0}^{\infty} C^{\mathrm{dR}}_{*+n+k-1}(\mathcal{L}_{k+1}M), \partial_\mu\Bigr) \cong H^{\mathrm{sing}}_{*+n-1}(\mathcal{L}M : \mathbb{R}) \tag{7}$$

が成立する．ただし $\partial_\mu x := \partial x - \{\mu, x\}$.

μ にもう少し条件を付けると (7) が Lie 代数の同形であることも言えるが，定理 2.1 の証明には直接は必要ないので省略する．

6. 定理 2.1 の証明

本節では定理 2.1 の証明を概説する．6.1 節で定理 2.1 をその「チェイン版」である定理 6.1 に帰着し，6.2 節では定理 6.1 の証明の重要な一部である Maurer-Cartan 元の構成（ここで正則円盤のモジュライ空間を用いる）を説明する．

以降 L は $(\mathbb{C}^n, \omega_n)$ の閉 Lagrange 部分多様体で向きとスピン構造を持つものとする．

6.1. チェイン版への帰着

まず前節で導入した自由ループ空間の鎖複体モデルを少し変更する必要があるので，それを説明する．任意の $a \in H_1(L : \mathbb{Z})$ に対して

$$\mathcal{L}^a_{k+1}L := \{(T, \gamma, t_1, \ldots, t_k) \in \mathcal{L}_{k+1}L \mid [\gamma] = a\},$$
$$C(a)_* := \prod_{k=0}^{\infty} C^{\mathrm{dR}}_{*+n+k-1+\mu(a)}(\mathcal{L}^a_{k+1}L)$$

とし，

$$\widehat{C}_* := \varprojlim_{E\to\infty} \Bigl(\bigoplus_{a\in H_1(L:\mathbb{Z})} C(a)_*\Bigr)\Big/\Bigl(\bigoplus_{\omega_n(\bar{a})>E} C(a)_*\Bigr)$$

とおく．$\widehat{C}_*$ は次の式により dg Lie 代数の構造を持つ：

$$(\partial x)(a,k) := \partial(x(a,k)),$$
$$(x * y)(a,k) := \sum_{\substack{k_1+k_2=k+1\\ 1\le j\le k\\ a_1+a_2=a}} (-1)^{\star} x(a_1,k_1) \circ_j y(a_2,k_2),$$
$$\{x,y\} := x * y - (-1)^{|x||y|} y * x.$$

この dg Lie 代数の上で定理 2.1 の「チェイン版」を述べることができる：

定理 6.1 $x \in \widehat{C}_{-1}$, $y \in \widehat{C}_2$, $z \in \widehat{C}_1$ で次の条件を満たすものが存在する：

- $\partial x - \frac{1}{2}\{x, x\} = 0$, $\partial y - \{x, y\} = z$.
- $x(a, k) \neq 0 \implies \omega_n(\bar{a}) > 0$ or $a = 0$, $k \geq 2$. （これから $\partial x(0, 2) = 0$ が従う.）
- 同形 $H_n^{\mathrm{dR}}(\mathcal{L}_3 L) \cong H_n^{\mathrm{sing}}(\mathcal{L}L)$ を通じて $[x(0, 2)]$ は $(-1)^{n+1}[L]$ に対応する.
- $z(a, k) \neq 0 \implies \omega_n(\bar{a}) > 0$ or $a = 0$. （これから $\partial z(0, 0) = 0$ が従う.）
- 同形 $H_n^{\mathrm{dR}}(\mathcal{L}_1 L) \cong H_n^{\mathrm{sing}}(\mathcal{L}L)$ を通じて $[z(0, 0)]$ は $(-1)^{n+1}[L]$ に対応する.

定理2.1を定理6.1から導くのは易しい．実際 $x^0 := \sum_{k \geq 2} x(0, k)$ は $\partial x^0 - \frac{1}{2}\{x^0, x^0\} = 0$ を満たし $H_*(\widehat{C}, \partial_{x_0}) \cong \widehat{\mathbb{H}}_*(\mathcal{L}L)$ が成り立つ（つまり x^0 が定理5.2における μ の役割を果たす）．さらに $x^+ := x - x^0$ および y は

$$\partial_{x^0} x_+ - \frac{1}{2}\{x^+, x^+\} = 0, \qquad \partial_{x^0} y - \{x^+, y\} = z$$

を満たす．そこで Homotopy Transfer Theorem を用いて $(\widehat{C}, \partial_{x^0}, \{\ ,\ \})$ とホモトピー同値な L_∞ 代数構造を $\widehat{\mathbb{H}}_*(\mathcal{L}L)$ の上に定義し，x^+, y に対応する元を X, Y とおけば定理2.1の条件を満たす.

さて定理6.1を示すには鎖 x, y, z を定義する必要がある．どれも本質的に同じであるので，次小節では，L に境界を持つ正則円盤のモジュライ空間から Maurer-Cartan 元 x を定義する方法を説明する.

6.2. Maurer-Cartan 元の構成

定理6.1の条件を満たす $x \in \widehat{C}_{-1}$ を定義するには，任意の $a \in H_1(L : \mathbb{Z})$ と $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $x(a, k) \in C^{\mathrm{dR}}_{n+\mu(a)+k-2}(\mathcal{L}^a_{k+1} L)$ を定義して

$$\partial x(a, k) = \sum_{\substack{a_1 + a_2 = a \\ k_1 + k_2 = k+1 \\ 1 \leq j \leq k_1}} (-1)^\star x(a_1, k_1) \circ_j x(a_2, k_2)$$

が成り立つようにする必要がある．以降の議論では $\omega_n(\bar{a}) > 0$ あるいは $a = 0$, $k \geq 2$ の場合のみを考え，その他の場合は $x(a, k) := 0$ とおく．モジュライ空間

$$\begin{aligned} \mathring{\mathcal{M}}_{k+1}(\bar{a}) := \{(u, e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_k}) \mid u : (D, \partial D) \to (\mathbb{C}^n, L),\ \bar{\partial} u = 0, \\ [u] = \bar{a},\ 0 < \theta_1 < \cdots < \theta_k < 2\pi\}/\mathrm{Aut}(D, 1) \end{aligned}$$

を考え任意の $j \in \{0, \ldots, k\}$ に対して $\mathring{\mathrm{ev}}_j : \mathring{\mathcal{M}}_{k+1}(\bar{a}) \to L$ を

$$\mathring{\mathrm{ev}}_j : [(u, e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_k})] \mapsto u(e^{i\theta_j})$$

で定義する（ただし $\theta_0 := 0$ とおく）．$\mathring{\mathcal{M}}_{k+1}(\bar{a})$ に安定写像を付け加えて得られるコンパクト化を $\mathcal{M}_{k+1}(\bar{a})$ と書くと，$\mathring{\mathrm{ev}}_j$ を延長して $\mathrm{ev}_j : \mathcal{M}_{k+1}(\bar{a}) \to L$ が定義される.

$\mathcal{M}_{k+1}(\bar{a})$ は適切な位相によりコンパクト Hausdorff 空間になるが，$x(a, k)$ を定義するには位相構造だけでは不十分で，まずモジュライ空間 $\mathcal{M}_{k+1}(\bar{a})$ 上の倉西構造が必要である．$\mathcal{M}_{k+1}(\bar{a})$ は，ある Banach 多様体上の Banach ベクトル束の Fredholm 切断の零点として表される[6]ので，各点の近傍では，有限次元多様体上の有限次元ベクトル束

[6] モジュライ空間の境界の部分ではこの記述は不正確である.

の切断の零点として表すことができる．より明示的には，各 $p \in \mathcal{M}_{k+1}(\bar{a})$ に対して以下のデータを与えることができる[7]：

- 有限次元有向角付多様体 U_p
- U_p 上の有限次元有向ベクトル束 $\mathcal{E}_p$
- ベクトル束 $\mathcal{E}_p \to U_p$ の C^∞ 級切断 s_p
- 開埋込 $\psi_p : (s_p)^{-1}(0) \to \mathcal{M}_{k+1}(\bar{a})$ で $p \in \operatorname{Im}\psi_p$ を満たすもの

以上の四つ組 $(U_p, \mathcal{E}_p, s_p, \psi_p)$ を p における有向倉西チャートという[8]．モジュライ空間 $\mathcal{M}_{k+1}(\bar{a})$ 上の有向倉西構造とは

- 任意の $p \in \mathcal{M}_{k+1}(\bar{a})$ における有向倉西チャート $\mathcal{U}_p = (U_p, \mathcal{E}_p, s_p, \psi_p)$
- 任意の $p \in \mathcal{M}_{k+1}(\bar{a})$, $q \in \operatorname{Im}\psi_p$ に対する $\mathcal{U}_q$ から $\mathcal{U}_p$ への座標変換

であって座標変換たちのあいだの整合性が成り立つものをいう．(「座標変換」と「整合性」の定義は省略する．[8] Section 3 を見よ．)

さて $x(a,k)$ を定義するには，さらに各 $p \in \mathcal{M}_{k+1}(\bar{a})$ に対して（倉西チャートの間の座標変換と整合的であるように）以下のデータを与える必要がある：

- C^∞ 級写像 $\mathrm{ev}_p : U_p \to \mathcal{L}^a_{k+1}L$（ループ空間への evaluation map）
- s_p の CF (continuous family) 摂動

後者の CF 摂動について少し説明しよう[9]．s_p はベクトル束 $\mathcal{E}_p \to U_p$ の C^∞ 級切断であるが，一般に零と横断的であるとは限らず，これがモジュライ空間の基本鎖を定義する際には問題になる．そこで十分大きい自然数 D_p をとって射影 $\mathrm{pr}_{U_p} : \mathbb{R}^{D_p} \times U_p \to U_p$ を考え，$(\mathrm{pr}_{U_p})^*\mathcal{E}_p$ の C^∞ 級切断の族 $(s^\varepsilon_p)_{\varepsilon \in (0,1]}$ で以下の条件を満たすものをとる：

- コンパクト C^1 位相について $\lim_{\varepsilon \to 0} s^\varepsilon_p = (\mathrm{pr}_{U_p})^* s_p$.
- 任意の $\varepsilon > 0$ について s^ε_p は零に横断的であり，$\mathrm{ev}_0 \circ \psi_p \circ \mathrm{pr}_{U_p} : (s^\varepsilon_p)^{-1}(0) \to L$ は沈め込み.

さらに $\omega_p \in \mathcal{A}^{D_p}_c(\mathbb{R}^{D_p})$ で $\int_{\mathbb{R}^{D_p}} \omega_p = 1$ を満たすものをとる．以上の組 $(D_p, (s^\varepsilon_p)_{\varepsilon \in (0,1]}, \omega_p)$ が s_p の CF 摂動である.

以上のデータが与えられると，$\varepsilon \in (0,1]$ が十分小さいとき $x_\varepsilon(a,k) \in C^{\mathrm{dR}}_*(\mathcal{L}^a_{k+1}L)$ を次のように定義することができる．$\mathcal{M}_{k+1}(\bar{a})$ 上の点列 $(p_i)_{1 \le i \le N}$ で $\bigcup_{i=1}^N \operatorname{Im}\psi_{p_i} = \mathcal{M}_{k+1}(\bar{a})$ を満たすものと「1 の分割」$(\chi_{p_i} : U_{p_i} \to [0,1])_{1 \le i \le N}$ をとり

$$x_\varepsilon(a,k) := \sum_{i=1}^N (-1)^\star((s^\varepsilon_{p_i})^{-1}(0), \mathrm{ev}_{p_i} \circ \mathrm{pr}_{U_{p_i}}, (\mathrm{pr}_{\mathbb{R}^{D_{p_i}}})^*\omega_{p_i} \wedge (\mathrm{pr}_{U_{p_i}})^*\chi_{p_i})$$

[7] 標準的には決まらない.

[8] 通常の定義では U_p は orbifold，$\mathcal{E}_p$ は orbibundle とするが，今の状況では群作用を考えず多様体上のベクトル束を考えれば十分である.

[9] 以下に続く CF 摂動の説明はアイデアを説明するために単純化されており，実際の定義（[8] Section 7, 9）とは微妙に異なる.

とおけばよい[10]．ここで右辺が $(p_i)_i$ や $(\chi_{p_i})_i$ のとり方によらないためには ε が十分小さい必要がある．

以上の議論ではモジュライ空間 $\mathcal{M}_{k+1}(\bar{a})$ を固定していたが，(a,k) を動かした場合，複数のモジュライ空間たちは

$$\partial\mathcal{M}_{k+1}(\bar{a}) \cong \coprod_{\substack{k_1+k_2=k+1\\ a_1+a_2=a\\ 1\le j\le k_1}} \mathcal{M}_{k_1+1}(\bar{a_1})\,{}_{\mathrm{ev}_j}\times_{\mathrm{ev}_0} \mathcal{M}_{k_2+1}(\bar{a_2}) \tag{8}$$

により関係付けられている．各モジュライ空間に対して，ループ空間への evaluation map と CF 摂動を (8) と整合的になるようにとれば[11]，(8) から

$$\partial x_\varepsilon(a,k) = \sum_{\substack{k_1+k_2=k+1\\ a_1+a_2=a\\ 1\le j\le k_1}} (-1)^\star x_\varepsilon(a_1,k_1) \circ_j x_\varepsilon(a_2,k_2)$$

が導かれる．ここで注意するべきことは，ε を決めるには一度に有限個のモジュライ空間しか扱えないことである．したがって十分小さい $\varepsilon > 0$ 毎に Maurer-Cartan 方程式 $\partial x - \frac{1}{2}\{x,x\} = 0$ の近似解 x_ε を構成し，$\varepsilon \to 0$ の極限として Maurer-Cartan 元を構成するという議論が必要になる．これと実質的に同じ議論はLagrangian Floer Theory の設定において [7] Section 7.2.3 で論じられているが，今の状況では [13] Section 6 で詳細に論じられている．

参考文献

[1] M. Audin, *Fibrés normaux d'immersions en dimension double, points doubles d'immersions lagragiennes et plongements totalement réels*, Comment. Math. Helv. 63 (1988), 593–623.

[2] M. Chas, D. Sullivan, *String Topology*, arXiv:math/9911159.

[3] K. Cieliebak, K. Mohnke, *Punctured holomorphic curves and Lagrangian embeddings*, Invent. Math. 212 (2018), 213–295.

[4] M. Damian, *On the topology of monotone Lagrangian submanifolds*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. 48 (2015), 237–252.

[5] J. Evans, J. Kędra, *Remarks on monotone Lagrangians in* $\mathbb{C}^n$, Math. Res. Lett. 21 (2014), 1241–1255.

[6] K. Fukaya, *Application of Floer homology of Lagrangian submanifolds to symplectic topology*, Morse theoretic methods in nonlinear analysis and in symplectic topology, 231–276, NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem., 217, Springer, Dordrecht, 2006.

[7] K. Fukaya, Y. G. Oh, H. Ohta, K. Ono, *Lagrangian Intersection Floer Theory: Anomaly and Obstruction, Part I and II*, AMS/IP Studies in Advanced Math. vol. 46.1 and 46.2, International Press/ Amer. Math. Soc. (2009).

[8] K. Fukaya, Y. G. Oh, H. Ohta, K. Ono, *Kuranishi structure, Pseudo-holomorphic curve, and Virtual fundamental chain: Part 1 and 2*, arXiv:1503.07631v1, 1704.01848v1.

[9] M. Gromov, *Pseudoholomorphic curves in symplectic manifolds*, Invent. Math. 82 (1985), 307–347.

[10] K. Irie, *Hofer-Zehnder capacity of unit disk cotangent bundles and the loop product*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 16 (2014), 2477–2497.

[10] この説明もアイデアを伝えるために単純化されており，実際の定義（[13] Section 8）とは異なる．
[11] このステップは非常に慎重に議論する必要がある．

[11] K. Irie, *Chain level operations in string topology via de Rham chains*, 第62回トポロジーシンポジウム予稿.

[12] K. Irie, *A chain level Batalin-Vilkovisky structure in string topology via de Rham chains*, Int. Math. Res. Notices, doi: 10.1093/imrn/rnx023.

[13] K. Irie, *Chain level loop bracket and pseudo-holomorphic disks*, arXiv:1801.04633v2.

[14] J. Latschev, *Fukaya's work on Lagrangian embeddings*, Free loop spaces in geometry and topology, 243–270, IRMA Lect. Math. Theor. Phys., 24, Eur. Math. Soc., Zürich, 2015.

[15] J.-L. Loday, B. Vallette, *Algebraic Operads*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 346. Springer, Heidelberg, 2012.