強制法公理とパラコンパクト空間

薄葉季路

1. 導入

位相空間論において, 大域的性質と局所的性質との関係は重要なトピックの一つである. 今回の講演では, 代表的な大域的性質であるパラコンパクト性と局所的性質の関係について考察する. 復習すると:

Definition 1.1. X を位相空間とする.

(1) X の部分集合の族 $\mathcal{F}$ が **locally finite** とは, 任意の $p \in X$ に対して, p の開近傍 V で $\{F \in \mathcal{F} : F \cap V \neq \emptyset\}$ が有限になるものが存在することである.
(2) X の部分集合の族 $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ に対して, $\mathcal{F}$ が $\mathcal{G}$ の **refinement** とは, 任意の $F \in \mathcal{F}$ に対して $G \in \mathcal{G}$ で $F \subseteq G$ となるものが存在することである.
(3) X が**パラコンパクト**とは, X の任意の開被覆 $\mathcal{U}$ に対して, locally finite な $\mathcal{U}$ の refinemet $\mathcal{V}$ で $\mathcal{V}$ が開被覆になるものが存在することである.

様々な状況で, パラコンパクト性は基本的性質の一つとして仮定されているが, この理由の一つがパラコンパクト空間においては, 局所的性質を張り合わせて空間全体に広げることが可能だからである. 例えば 1 の分割定理や, 次のマイケルの定理はよく知られている:

Fact 1.2 (Michael)**.** パラコンパクト空間 X の開集合に対する性質 $\mathcal{P}$ で次を満たすものを考える:

(1) X の開集合 V が性質 $\mathcal{P}$ を持つならば, V の任意の開部分集合も性質 $\mathcal{P}$ を持つ.
(2) U, V がともに性質 $\mathcal{P}$ を持てば, $U \cup V$ も性質 $\mathcal{P}$ を持つ.
(3) $\{V_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ が性質 $\mathcal{P}$ を持つ開集合の疎な族であれば, 和集合 $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$ も性質 $\mathcal{P}$ を持つ (ここで X の部分集合の族 $\mathcal{F}$ が疎であるとは, 任意の $p \in X$ に対して p の開近傍 V で高々一つの $\mathcal{F}$ の要素と交わるものが存在することである).

このとき, もし X の各点が性質 $\mathcal{P}$ を持つ開近傍を持つのであれば, X 自身も性質 $\mathcal{P}$ を持つ.

この定理より, 例えばパラコンパクト空間 X の各点が距離付け可能な開近傍を持つのであれば, その距離関数を張り合わせて X 全体の距離関数に拡張できることがわかる.

パラコンパクト空間はこのように, 局所的性質を張り合わせて大域的な性質に持ち上げることができる. このような状況は, パラコンパクト空間が真に大域的な性質であることを示唆している. 本講演では, 逆に, 局所的に良い性質を持つ空間が大域的に良い性質であるパラコンパクト性を持つのはどのような状況であるか, 特に強制法公理と呼ばれる公理の下ではどうか, についての結果を紹介する.

2. 多様体と ω_1

簡単のために, n **次元多様体**とは, 単に各点が $\mathbb{R}^n$ のある開集合と同相な開近傍を持つこととする. 一般に仮定される第二可算性やパラコンパクト性は仮定しないことにする. 多様体は第一可算, かつ局所コンパクトであり, 局所的に非常に良い性質を持つ空間である.

1 次元多様体の自明な例は実数直線 $\mathbb{R}$ や円 S^1 である. 非自明かつ奇妙な例として, 長い直線と呼ばれるものが知られている. ここで, ω_1 を最小の非可算順序数とする. ただし, ω_1 は集合として, 可算順序数全体と同一視することにする. ω_1 上には $\alpha < \beta \iff \alpha$ は β より小さい順序数, として自然に順序が入る.

Definition 2.1. $\omega_1 \times [0,1)$ に辞書式順序を入れた直線を考える, すなわち $\langle \alpha, x \rangle < \langle \beta, y \rangle \iff \alpha < \beta$, または $\alpha = \beta$ かつ $x < y$, とする. $\omega_1 \times [0,1) = \mathbb{L}_{\geq 0}$ とし, $\mathbb{L}_{\geq 0}$ から最小元 $(0,0)$ を除いた直線 $\mathbb{L}_+$ を**長い半直線**と呼ぶ. また, $\mathbb{L}_{\geq 0}$ に長い半直線の逆順序を左側に加えた直線 $\mathbb{L}$ を**長い直線**と呼ぶ. 長い半直線, 長い直線には順序位相を入れて位相空間として考えることにする.

長い直線が 1 次元多様体であることは容易にわかる. 一方, 長い直線がパラコンパクトでないことは次の事実より導くことができる.

Fact 2.2. ω_1 に順序位相を入れた位相空間は次の性質を持つ:

(1) 第一可算, 局所コンパクト, 可算コンパクトである.
(2) 遺伝的正規空間である.
(3) 一方で ω_1 はパラコンパクトではない.

ω_1 がパラコンパクトでないことは集合論でよく使われる pressing-down lemma (Fodor's lemma とも呼ばれる) から直ちにわかる.

長い直線において $\{(\alpha, 0) : \alpha \in \omega_1\}$ は長い直線の閉部分集合で ω_1 と同相になるが, パラコンパクト空間の閉部分空間はやはりパラコンパクトになるので, このことから長い直線がパラコンパクトでないことが導かれる.

境界を持たない 1 次元多様体は $\mathbb{R}$, S, $\mathbb{L}$ のどれかと同相になることが知られているので, 境界を持たない 1 次元多様体がパラコンパクトでないことは, ω_1 と同相な閉部分空間を含まないことである, と特徴づけできる.

3. 可分空間とパラコンパクト

多様体に限らず, ω_1 と同相な閉部分空間を持つ空間はパラコンパクトにはならない. それでは, 逆に ω_1 と同相な閉部分空間を持たないならばパラコンパクトになるか? このことに関しては, 次のような von Douwen の例が知られている.

Fact 3.1 (von Douwen [3])**.** 次を満たす位相空間 X が存在する:

(1) X は局所コンパクト, 第一可算, 正規, 可分である.
(2) X^2 の対角部分は X^2 の G_δ 集合になる. 特に X は ω_1 と同相な閉部分空間を持たない.
(3) X はリンデレフではない.

ここで位相空間 X が**リンデレフ**であるとは, X の任意の開被覆が高々可算な開被覆を持つことである.

Fact 3.2. X が可分でパラコンパクトであるならば, X はリンデレフである. 特に X がパラコンパクトならば, X の任意の可分閉部分空間はリンデレフである.

よって, von Douwen の空間は局所的に良い性質を持ち, かつ ω_1 を含まないがパラコンパクトではない例となっている.

以上より, 空間がパラコンパクトであるために必要な条件として少なくとも次があげられる.

- ω_1 を閉部分空間として含まない.
- 任意の可分閉部分空間はリンデレフである.

この二つの条件が, 局所的に良い空間がパラコンパクト空間であることを特徴づけてくれるだろうか? 結論を言えば答えは否定的であるが, 知られている例はいわゆる「標準的な集合論公理系 ZFC と無矛盾である」例である.

Fact 3.3. 次のような空間 X が存在することは ZFC と無矛盾である:

(1) X は局所コンパクト, 可算コンパクト, 第一可算, 遺伝的正規である.
(2) X は ω_1 と同相な閉部分区間を持たない.
(3) X の任意の可分閉部空間は高々可算, 特にリンデレフである.
(4) X はパラコンパクトではない.

しかしながら, この空間の存在はあくまで「ZFC と無矛盾」な例であり, 実際に構成可能な空間ではない. それでは, 上のような空間は常に存在するであろうか? その答えをえるためには, 強制法公理と呼ばれる公理が非常に有用である.

4. 強制法公理

集合論でよく使われる強制法公理について簡単に紹介する. 強制法公理は, 名前の通り集合論の強制法と関係が深い公理であるが, ここでは位相空間論の言葉を用いて定義を与える.

強制法公理の大本にあるのは, 次のよく知られた Baire の範疇性定理である:

Fact 4.1 (Baire)**.** X をコンパクト空間 (局所コンパクト, あるいは完備距離空間) とする. $\mathcal{D} = \{D_0, D_1, \dots\}$ が X の稠密開集合の可算族であるならば, その共通部分 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} D_n$ は空でない.

Baire の範疇性定理の可算族を, 濃度 $\aleph_1$ の族に変えることはできないことが知られている. しかしながら空間にある程度の制約をつけることで, それが可能であることを主張するのが強制法公理である. 以後, 集合 X の濃度を $|X|$ で表すことにする

Definition 4.2. κ を無限基数, X をコンパクト空間とする. 強制法公理 $\mathrm{FA}_\kappa(X)$ とは次の主張のことである: X の稠密開集合の族 $\{D_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ に対して, もし $|\Lambda| \le \kappa$ ならばその共通部分 $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} D_\lambda$ も空でない.

Baire の範疇性定理より $\mathrm{FA}_{\aleph_0}(X)$ が任意のコンパクト空間 X に成り立つが, $\mathrm{FA}_{\aleph_1}(X)$ は成り立たない X が存在する. よく使われるのは, 位相空間のクラスを可算鎖条件を満たすものに限定した強制法公理であるマーチンの公理である. ここで空間 X が**可算鎖条件**を満たすとは, X の互いに素な開集合の族は高々可算な族になることである. 可分空間は明らかに可算鎖条件を満たすので, 可算鎖条件は可分性を弱めたものである.

Definition 4.3. **マーチンの公理**とは次の主張である: 任意の無限基数 $\kappa < 2^{\aleph_0}$ と可算鎖条件を持つコンパクト空間 X に対して $\mathrm{FA}_\kappa(X)$ が成り立つ.

連続体仮説 $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ の下ではマーチンの公理が常に成り立つが, 連続体仮説の否定の下では成り立つとは限らない. しかしながら連続体仮説の否定とマーチンの公理は無矛盾であることが知られている.

Fact 4.4 (Solovay-Tennenbaum [7])**.** マーチンの公理+連続体仮説の否定は無矛盾である.

マーチンの公理+連続体仮説の否定からいくつもの興味深い結果が得られることが知られている. いくつか紹介する:

Fact 4.5. マーチンの公理+連続体仮説の否定を仮定する.

(1) 順序位相空間 L が可算鎖条件を満たすならば, L は可分である.
(2) 順序位相空間 L が順序に関して完備, 自己稠密, かつ端点を持たず, 可算鎖条件を満たすならば実数直線 $\mathbb{R}$ と同形である.
(3) X_λ $(\lambda \in \Lambda)$ が可算鎖条件を満たすならば, 積空間 $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ も可算鎖条件を満たす.

現代集合論では, マーチンの公理をさらに強めた**プロパー強制法公理** PFA や**セミプロパー強制法公理** SPFA がよくつかわれるが, そこで問題になる位相空間は非

常に技術的なものになるため本稿では説明を省略する．PFA や SPFA に関してはいくつもの位相空間的に重要な性質が導かれることが知られているが, 次を紹介するにとどめておく．

Fact 4.6. SPFA $\Rightarrow$ PFA $\Rightarrow$ マーチンの公理+連続体仮説の否定

Fact 4.7. プロパー強制法公理 PFA を仮定する．この時,

(1) (Velickovic [8]) $2^{\aleph_0} = \aleph_2$ である．
(2) (Todorcevic) 第一可算空間 X が ω_1 と同相な閉部分空間を含まないことの必要十分条件は, X の部分空間 $Y \subseteq X$ と ω_1 から Y への完全写像が存在しないことである．

ついでに次も紹介しておく．空間 X が **countably tight** とは, 任意の部分集合 $Y \subseteq X$ と Y の閉包に属する点 p に対して, Y の可算部分集合 Z で p が Z の閉包に属するものが存在するときである．特に第一可算空間は countably tight である．

Fact 4.8. 局所コンパクト, countably tight 空間 X について, 以下は同値:

(1) X の部分集合 Y と ω_1 から Y への完全写像は存在しない．
(2) X の一点コンパクト化 X^* は countaly tight.

よって特に, PFA の下では, 局所コンパクト第一可算空間 X が ω_1 と同相な閉部分空間を持たないことは一点コンパクト化 X^* が countably tight であることと同値である．

特に重要なことは, SPFA から次のような Fleissner の組み合わせ論的原理 Axiom R が導かれることである:

Definition 4.9 (Fleissner [5])**.** (1) A を非可算集合とし, $[A]^{\aleph_0}$ を A の可算部分集合全体とする．$C \subseteq [A]^{\aleph_0}$ が次を満たすとき, C を $[A]^{\aleph_0}$ の**クラブ**と呼ぶ:

(a) 任意の $x \in [A]^{\aleph_0}$ に対して $x \subseteq y$ となる $y \in C$ がある．
(b) 任意の $\subseteq$ に関する C の要素の上昇列 $\{x_0, x_1, \dots\}$ に対して, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} x_n$ は C の要素になる．

(2) $S \subseteq [A]^{\aleph_0}$ が $[A]^{\aleph_0}$ の**定常集合**とは, S が任意のクラブと交わることである．
(3) A を非可算集合とし, $[A]^{\aleph_1}$ を A の濃度 $\aleph_1$ の部分集合全体とする．$C \subseteq [A]^{\aleph_1}$ が次を満たすとき, C を $[A]^{\aleph_1}$ の **ω_1-クラブ**と呼ぶ:

(a) 任意の $x \in [A]^{\aleph_1}$ に対して $x \subseteq y$ となる $y \in C$ がある．
(b) 任意の $\subseteq$ に関する C の要素の長さ ω_1 の上昇列 $\{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ に対して, $\bigcup_{\alpha<\omega_1} x_\alpha$ は C の要素になる．

(4) Aixom R とは次の主張である: 任意の非可算集合 X, 定常集合 $S \subseteq [X]^{\aleph_1}$, ω_1-クラブ C に対して, $Y \in C$ で $S \cap [Y]^{\aleph_0}$ が $[Y]^{\aleph_0}$ の定常集合になることである．

Axiom R は, 大きな集合の定常性が小さな (濃度 $\aleph_1$) の集合の定常性に反映されることを主張する．この手の原理は反映原理と呼ばれ, 現代集合論において盛んに

研究されている. Balogh [1] は, Axiom R の下でのパラコンパクト性についての研究を行ったが, その結果を後述の PFA(S)[S] と組み合わせることで, パラコンパクト空間の興味深い結果が得られている. また, Axiom R から $2^{\aleph_0} \leq \aleph_2$ が導かれることもついでに指摘しておく.

5. 強制法公理とパラコンパクト

2000 年以降, Todorcevic によって開発された PFA の変形である PFA(S)[S] と呼ばれる公理の研究が盛んにおこなわれ, PFA(S)[S] の下では様々な位相空間が構成可能であることが判明した. そのような中で, PFA(S)[S] と Axiom R を用いることで, 次のような結果が得られている:

Theorem 5.1 (Dow-Tall [2])**.** 次は ZFC と無矛盾である: 任意の局所コンパクト, 第一可算正規空間 X に対して, X がパラコンパクトであるための必要十分条件は

(1) ω_1 と同相な閉部分空間を持たない, かつ
(2) X の任意の可分閉部分空間はリンデレフである.

よって, 局所コンパクト, 第一可算, 正規な空間に対しては

(1) ω_1 と同相な閉部分空間を持たない, かつ
(2) X の任意の可分閉部分空間はリンデレフである.

の二つの条件でパラコンパクトになりえることになり, この二つの条件がパラコンパクト性の (ある意味で) 本質をとらえている, とみることが可能である.

また, さらに次も知られている:

Theorem 5.2. 次は ZFC と無矛盾である:

(1) (Dow-Tall [4]) $n > 1$ の時, 任意の遺伝的正規な n 次元多様体はパラコンパクトである, 特に距離付け可能である.
(2) (Larson-Tall [6]) 局所コンパクト, 遺伝的正規空間が遺伝的パラコンパクトであるための必要十分条件は ω_1 と同相な閉部分空間を持たないことである.

一方で, これらの結果は正規性が仮定されていた. しかしながら, 一般位相空間論において正規性は非常に扱いにくい性質である: 積に関して保存されない, 特に正規空間と単位閉区間 $[0,1]$ の積が正規になるとは限らない, 遺伝的とは限らない, など. それではこれらの結果から正規性を外すことはできるかを考えることは自然である. しかしながら, 次のような例が知られている:

Fact 5.3. 次を満たす空間 X が存在する:

(1) X は局所コンパクト, 第一可算, 正則である.
(2) ω_1 と同相な閉部分空間を持たない.
(3) 可分閉部分空間は高々可算, よってリンデレフである.
(4) $\aleph_1$-collectionwise Hausdorff ではない.

ここでκが無限基数の時, 空間Xが**κ-collectionwise Hausdorff**とは任意の濃度が高々κな閉離散部分集合$D \subseteq X$に対して, たがいに素な開集合の族$\{O_p : p \in D\}$で$p \in O_p$となるものが存在することである. パラコンパクト空間は任意の無限基数κに対してκ-collectionwise Hausdorffになることが知られている. したがって上のFactの空間はパラコンパクトではない.

Tall-Dowの定理ではAxiom Rを用いて上の結果を得ていたが, Axiom Rをさらに強めたものを用いることで次が得られる:

Theorem 5.4 (Usuba)**.** *次はZFCと無矛盾である: 任意の局所コンパクト, 第一可算正則空間Xに対して, Xがパラコンパクトであるための必要十分条件は*

(1) *ω_1と同相な閉部分空間を持たない, かつ*
(2) *Xの任意の可分閉部分空間はリンデレフである, かつ*
(3) *Xは$\aleph_1$-collectionwise Hausdorffである.*

よって, 局所コンパクト第一可算空間に関してはパラコンパクト性が次のようにまとめられる:

パラコンパクト

$\iff$ 正規 + ω_1を含まない + 可分閉部分空間はリンデレフ

$\iff$ 正則 + ω_1を含まない + 可分閉部分空間はリンデレフ + $\aleph_1$-collectionwise Hausdorff.

References

[1] Z. T. Balogh, *Locally nice spaces and axiom R.* Topology Appl. 125, 2 (2002), 33–341. [
[2] A. Dow, F. D. Tall, *Normality vs paracompactness in locally compact spaces.* preprint.
[3] E. K. van Douwen, *A technique for constructing honest locally compact submetrizable examples.* Topology Appl. 47 (1992), 179–201.
[4] A. Dow, F. D. Tall, *Hereditarily normal manifolds of dimension > 1 may all be metrizable.* preprint.
[5] W. G. Fleissner, *Left separated spaces with point-countable bases* Trans. Amer. Math. Soc. 294 (1986), 665–677.
[6] P. Larson, F. D. Tall, *Locally compact perfectly normal spaces may all be paracompact.* Fund. Math. 210 (2010), 285–300.
[7] R. M. Solovay, S. Tennenbaum, *Iterated Cohen extensions and Souslin's problem.* Ann. Math. (2) 94 (1971), 201–245.
[8] B. Velickovic, *Forcing axioms and stationary sets.* Adv. Math. 94 (1992), no.2, 256–284.

(薄葉季路) 169-8555 東京都新宿区大久保 3-4-1 早稲田大学基幹理工学研究科
E-mail address: `usuba@waseda.jp`