$K(n)$-local category のモデルについて

鳥居 猛[*]

(岡山大学大学院自然科学研究科)

1 はじめに

安定ホモトピー論の一分野であるクロマティックホモトピー論 (chromatic homotopy theory) において、$K(n)$-local category は非常に重要な位置を占めています。この講演では Morava E 理論およびその安定化群を用いた $K(n)$-local category のモデルの構成についてお話する予定です。

まずはじめにクロマティックホモトピー論について簡単に紹介します。次に $K(n)$-local スペクトラムをあるコモナド上の余加群と同一視するために必要になる ∞-categorical Barr-Beck theorem と descendable 射について述べます。最後に $K(n)$-local category のモデルを離散対称スペクトラムの圏のなかで構成します。

2 クロマティックホモトピー論

クロマティックホモトピー論は安定ホモトピー圏を調べる一つの方法を与えます。この章ではクロマティックホモトピー論について簡単にまとめておきます。詳しくは [1, 16, 18, 13] などを参照してください。

2.1 安定ホモトピー圏

安定ホモトピー圏は基点付き空間のホモトピー圏のある意味での線型化と考えることができます。この節では安定ホモトピー圏 (スペクトラムのホモトピー圏) について思い出しておきます。

基点付き CW 複体 $X, Y \in \mathrm{Space}_*$ に対して、$[X, Y]$ で基点付き連続写像のホモトピー類のなす集合を、$\Sigma X, \Sigma Y$ で X, Y の懸垂を、$X \wedge Y$ で X と Y のスマッシュ積を表すことにする。基点付き有限 CW 複体 $X, Y \in \mathrm{Space}_*^{\mathrm{fin}}$ に対して、懸垂をとる操作により基点付き集合の写像 $\Sigma : [X, Y] \to [\Sigma X, \Sigma Y]$ が得られる。これを繰り返すと、基点付き集合とその間の写像の列

$$[X, Y] \xrightarrow{\Sigma} [\Sigma X, \Sigma Y] \xrightarrow{\Sigma} [\Sigma^2 X, \Sigma^2 Y] \xrightarrow{\Sigma} \cdots$$

が得られる。この列は十分先では同型になっており、これを $\{X, Y\}$ で表すことにする。このとき、$\{X, Y\}$ はアーベル群になることに注意する。

本研究は科研費 (課題番号: 25400092) の助成を受けたものである。

[*]e-mail: torii@math.okayama-u.ac.jp

Ho(Sp) を安定ホモトピー圏とする。ここでは安定ホモトピー圏の定義を与えることはしないで、その性質を述べるに留めることにします。まず、Ho(Sp) は加法圏である。特に、その射の集合を $[X, Y]$ $(X, Y \in \mathrm{Ho}(\mathrm{Sp}))$ で表すと、$[X, Y]$ はアーベル群である。また、関手 $\Sigma^\infty : \mathrm{Ho}(\mathrm{Space}_*) \to \mathrm{Ho}(\mathrm{Sp})$ が存在し、$X, Y \in \mathrm{Space}_*^{\mathrm{fin}}$ に対して、

$$[\Sigma^\infty X, \Sigma^\infty Y] \cong \{X, Y\}$$

が成り立つ。

さらに、安定ホモトピー圏 Ho(Sp) はテンソル三角圏になる。シフト関手は懸垂 ΣX $(X \in \mathrm{Ho}(\mathrm{Sp}))$ で与えられ、完全三角形はコファイバー列

$$X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow Cf \longrightarrow \Sigma X$$

で与えられる。ここで、Cf は f の写像錐である。さらに、テンソル積はスマッシュ積 $X \wedge Y$ $(X, Y \in \mathrm{Ho}(\mathrm{Sp}))$ で与えられ、単位対象は球面スペクトラム $S = \Sigma^\infty S^0$ である。

2.2 複素向き付け可能コホモロジー理論

安定ホモトピー圏 Ho(Sp)、特に、有限スペクトラムからなる充満部分圏 $\mathrm{Ho}(\mathrm{Sp}^{\mathrm{fin}})$ は、複素コボルディズム MU を通して形式群と密接に関係してます。この節は、形式群と複素向き付け可能コホモロジー理論との関係についてみていきます。

複素向き付け可能な一般コホモロジー理論とは、複素ベクトル束に対して Thom 類が定義できて、Thom 同型が成り立つような一般コホモロジー論のことです。このとき、通常のコホモロジー論と同様に複素ベクトル束に対して Chern 類の理論を展開することができます。

$E^*(-)$ を複素向き付け可能な一般コホモロジー論とする。空間 X 上の複素ベクトル束 $V \to X$ に対して、$c_i^E(V) \in E^{2i}(X)$ で V の ith Chern 類を表すことにする。通常の Chern 類の理論との違いは、ベクトル束のテンソル積の Chern 類をそれぞれのベクトル束の Chern 類で表そうとするときに現れる。

L_1, L_2 を空間 X 上の複素直線束とする。このとき、任意の X, L_1, L_2 に対して、次が成り立つような形式的べき級数 $F(x, y) \in E_*[\![x, y]\!]$ が一意的に存在する。

$$c_1^E(L_1 \otimes_{\mathbb{C}} L_2) = F(c_1^E(L_1), c_1^E(L_2))$$

特に、通常のコホモロジー $E^*(-) = H^*(-; \mathbb{Z})$ のときは、$F(x, y) = x + y \in \mathbb{Z}[\![x, y]\!]$ が対応します。

このべき級数 $F(x, y) \in E_*[\![x, y]\!]$ は次の代数的な性質を満たすことがわかる。

1. $F(x, 0) = x = F(0, x)$
2. $F(F(x, y), z) = F(x, F(y, z))$
3. $F(x, y) = F(y, x)$

一般に、可換環 R 上のべき級数 $F(x, y) \in R[\![x, y]\!]$ が上の 3 つの性質を満たすとき、$F(x, y)$ を R 上の (1 次元可換) 形式群という。

2.3 複素コボルディズムと形式群のモジュライ空間

MU を複素コボルディズムスペクトラムとします。$MU^*(-)$ は自然な複素向き付けをもつコホモロジー理論であり、さらに複素向き付けられたコホモロジー理論の中で普遍的なものになっています。すなわち、$E^*(-)$ を複素向け付けられたコホモロジー理論とすると、$MU^*(-)$ から $E^*(-)$ へ複素向き付けを保つ乗法的なコホモロジー理論の自然変換が一意的に存在します。この事実が示唆しているように MU と形式群とは密接に関係しています。この節では、MU と形式群のモジュライ空間との関係について述べます。

$\mathcal{M}_{\mathrm{FG}}$ を形式群のモジュライ空間 (moduli stack of formal groups) とする。ここでは正確な定義を述べることはできませんが、大雑把にいって、$\mathrm{Spec}(R)$ から $\mathcal{M}_{\mathrm{FG}}$ への射を与えることと、R 上の形式群の同型類を与えることが対応します。$\mathrm{QCoh}(\mathcal{M}_{\mathrm{FG}})$ で $\mathcal{M}_{\mathrm{FG}}$ 上の ($\mathbb{Z}/2$-次数付き準連接) 層のなすアーベル圏を表す。このとき、一般ホモロジー理論 $MU_*(-)$ は $\mathrm{QCoh}(\mathcal{M}_{\mathrm{FG}})$ に値をもつ関手と考えることができる。

$$MU_*(-) : \mathrm{Ho(Sp)} \longrightarrow \mathrm{QCoh}(\mathcal{M}_{\mathrm{FG}})$$

次に素数 p を固定して、$\mathcal{M}_{\mathrm{FG},(p)} = \mathcal{M}_{\mathrm{FG}} \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ の性質についてみていきます。k を標数 p の体として、$F(x,y)$ を k 上の形式群とする。表記を簡単にするため $x +_F y = F(x,y)$ とおき、自然数 n に対して n-series $[n]^F(x) \in k[\![x]\!]$ を n 倍和 $\overbrace{x +_F \cdots +_F x}^{n}$ と定義する。このとき、$[p]^F(x) \neq 0$ ならば、

$$[p]^F(x) = ax^{p^n} + (\text{higher terms}), \quad 0 \neq a \in k$$

という形になることが知られている。このとき、形式群 $F(x,y)$ の高さは n であるといって、$\mathrm{ht}_p(F) = n$ で表すことにする。また、$[p]^F(x) = 0$ のとき、$\mathrm{ht}_p(F) = \infty$ とし、k が標数 0 の体のとき、$\mathrm{ht}_p(F) = 0$ とする。形式群の高さは同型なものに対して同じ値をとる不変量である。高さが n 以上の形式群の同型類を考えることにより、$\mathcal{M}_{\mathrm{FG},(p)}$ の閉部分空間 $\mathcal{M}^{\geq n}_{\mathrm{FG},(p)}$ が定まり、$\mathcal{M}_{\mathrm{FG},(p)}$ の閉部分空間によるフィルトレイションが得られる。

$$\mathcal{M}_{\mathrm{FG},(p)} = \mathcal{M}^{\geq 0}_{\mathrm{FG},(p)} \supset \mathcal{M}^{\geq 1}_{\mathrm{FG},(p)} \supset \mathcal{M}^{\geq 2}_{\mathrm{FG},(p)} \supset \cdots \supset \mathcal{M}^{\geq n}_{\mathrm{FG},(p)} \supset \cdots \supset \mathcal{M}^{\infty}_{\mathrm{FG},(p)}$$

ここで、$\mathcal{M}^{\infty}_{\mathrm{FG},(p)} = \bigcap_n \mathcal{M}^{\geq n}_{\mathrm{FG},(p)}$ である。

2.4 クロマティック・フィルトレイション

前の節で形式群のモジュライ空間 $\mathcal{M}_{\mathrm{FG},(p)}$ に閉部分空間からなるフィルトレイションを導入しました。この節では、このフィルトレイションを用いて、安定ホモトピー圏にフィルトレイションを導入します。

素数 p に対して、ホモトピー群 $\pi_*(X)$ が $\mathbb{Z}_{(p)}$-加群になっているようなスペクトラム X を p-局所スペクトラムという。$\mathrm{Ho}(\mathrm{Sp}_{(p)})$ で p-局所スペクトラムのなす $\mathrm{Ho(Sp)}$ の充満部分圏を表す。また、$\mathrm{Ho}(\mathrm{Sp}^{\mathrm{fin}}_{(p)})$ で p-局所有限スペクトラムのなす $\mathrm{Ho}(\mathrm{Sp}_{(p)})$ の充満部分圏を表す。

準連接層 $MU_*(X)$ のサポート $\operatorname{supp} MU_*(X)$ が閉部分空間 $\mathcal{M}_{FG,(p)}^{\geq n}$ に入るような p-局所スペクトラム X から成る $\mathrm{Ho}(\mathrm{Sp}_{(p)})$ の充満部分圏を $\mathcal{S}_{(p)}^{\geq n}$ とする。

$$\mathcal{S}_{(p)}^{\geq n} = \{X \in \mathrm{Ho}(\mathrm{Sp}_{(p)}) |\ \operatorname{supp} MU_*(X) \subset \mathcal{M}_{FG,(p)}^{\geq n}\}$$

このとき、$\mathrm{Ho}(\mathrm{Sp}_{(p)})$ の localizing subcategory からなるフィルトレイションが得られる。

$$\mathrm{Ho}(\mathrm{Sp}_{(p)}) = \mathcal{S}_{(p)}^{\geq 0} \supset \mathcal{S}_{(p)}^{\geq 1} \supset \cdots \supset \mathcal{S}_{(p)}^{\geq n} \supset \cdots \supset \mathcal{S}_{(p)}^{\infty} \tag{2.1}$$

ここで、$\mathcal{S}_{(p)}^{\infty} = \bigcap_n \mathcal{S}_{(p)}^{\geq n}$ であり、$X \in \mathcal{S}_{(p)}^{\infty}$ は (p-局所) dissonant spectrum と呼ばれる ([17, 7])。

また、このフィルトレイションを $\mathrm{Ho}(\mathrm{Sp}_{(p)}^{\mathrm{fin}})$ に制限して、$\mathcal{S}_{(p)}^{\mathrm{fin},\geq n} = \mathrm{Ho}(\mathrm{Sp}_{(p)}^{\mathrm{fin}}) \cap \mathcal{S}_{(p)}^{\geq n}, \mathcal{S}_{(p)}^{\mathrm{fin},\infty} = \mathrm{Ho}(\mathrm{Sp}_{(p)}^{\mathrm{fin}}) \cap \mathcal{S}_{(p)}^{\infty}$ とおくと、$\mathrm{Ho}(\mathrm{Sp}_{(p)}^{\mathrm{fin}})$ の thick subcategory によるフィルトレイションが得られる。

$$\mathrm{Ho}(\mathrm{Sp}_{(p)}^{\mathrm{fin}}) = \mathcal{S}_{(p)}^{\mathrm{fin},\geq 0} \supset \mathcal{S}_{(p)}^{\mathrm{fin},\geq 1} \supset \cdots \supset \mathcal{S}_{(p)}^{\mathrm{fin},\geq n} \supset \cdots \supset \mathcal{S}_{(p)}^{\mathrm{fin},\infty} = \{0\} \tag{2.2}$$

2.5 Morava K 理論

この節では Morava K-theory spectrum $K(n)$ を導入し、前の節で得られた $\mathrm{Ho}(\mathrm{Sp}_{(p)}^{\mathrm{fin}})$ のフィルトレイションとの関係について述べます。

素数 p と自然数 n を固定する。Morava K 理論は複素向き付けられた一般コホモロジー理論であり、それを表現するスペクトラムを $K(n)$ で表すことにする。Morava K 理論の係数環は

$$\pi_*(K(n)) = \mathbb{F}_p[v_n^{\pm 1}]$$

で与えられる次数付き体である。ここで、$\mathbb{F}_p$ は標数 p の素体であり、v_n は次数 $2(p^n-1)$ の (可逆) 元である。また、その形式群の p-series は

$$[p]^{K(n)}(x) = v_n x^{p^n}$$

で与えられる。Morava K 理論の (係数環を適当に拡大した) 形式群の自己同型群を Morava 安定化群といって $\mathbb{G}_n$ で表す。このとき、$\mathbb{G}_n$ は副有限群であることに注意する。

いま、テンソル三角圏 $\mathcal{C}$ の thick tensor ideal $\mathcal{T}$ に対して、$a \otimes b \in \mathcal{T} \Longrightarrow a \in \mathcal{T}$ または $b \in \mathcal{T}$ が成り立つとき $\mathcal{T}$ は prime であるということにする。$\mathcal{C}$ の proper prime thick tensor ideal 全体の集合を $\mathrm{Spec}(\mathcal{C})$ で表す ([2, 3])。

このとき、Hopkins-Smith による thich subcategory theorem ([8]) により、

$$\mathrm{Spec}(\mathrm{Ho}(\mathrm{Sp}_{(\mathrm{p})}^{\mathrm{fin}})) = \{\mathcal{S}_{(p)}^{\mathrm{fin},\geq 1}, \mathcal{S}_{(p)}^{\mathrm{fin},\geq 2}, \ldots, \mathcal{S}_{(p)}^{\mathrm{fin},\infty}\} \tag{2.3}$$

となることがわかる。また、$\mathcal{S}_{(p)}^{\mathrm{fin},\geq n+1}$ は Morava K 理論 $K(n)$ により次のように特徴付けられる。

$$\mathcal{S}_{(p)}^{\mathrm{fin},\geq n+1} = \{X \in \mathrm{Ho}(\mathrm{Sp}_{(p)}^{\mathrm{fin}}) |\ K(n)_*(X) = 0\} \tag{2.4}$$

2.6 Bousfiled 局所化

三角圏 $\mathcal{S}_{(p)}^{\geq n}$ の部分三角圏 $\mathcal{S}_{(p)}^{\geq n+1}$ による Verdier 商 $\mathcal{S}_{(p)}^{\geq n}/\mathcal{S}_{(p)}^{\geq n+1}$ は、その構成から想像されるように高さが n の形式群と密接に関係しています。この節では、Bousfiled 局所化 ([5]) を導入し、安定ホモトピー圏 Ho(Sp) の Morava K 理論 $K(n)$ による Bousfiled 局所化が $\mathcal{S}_{(p)}^{\geq n}/\mathcal{S}_{(p)}^{\geq n+1}$ と同値になることをみます。

一般ホモロジー理論 $E_*(-)$ に対して、$E_*(-)$ ホモロジーが自明になるようなスペクトラムを 0 と同一視することにより得られる安定ホモトピー圏の Verdier 商を、安定ホモトピー圏の内部に実現するのが Bousfield 局所化である。スペクトラム W に対して、$E_*(W)=0$ のとき、W は E-acyclic であるという。また、スペクトラム X は、任意の E-acyclic なスペクトラム W に対して $[W,X]=0$ が成り立つとき、E-local であるという。

$\mathrm{Ho}(\mathrm{Sp}_E)$ で E-local スペクトラムから成る Ho(Sp) の充満部分圏を表す。このとき、包含関手 $i:\mathrm{Ho}(\mathrm{Sp}_E)\hookrightarrow \mathrm{Ho}(\mathrm{Sp})$ は左随伴 $L_E:\mathrm{Ho}(\mathrm{Sp})\to\mathrm{Ho}(\mathrm{Sp}_E)$ をもつ。

$$L_E:\mathrm{Ho}(\mathrm{Sp})\rightleftarrows \mathrm{Ho}(\mathrm{Sp}_E):i$$

また、合成 $i\circ L_E:\mathrm{Ho}(\mathrm{Sp})\to\mathrm{Ho}(\mathrm{Sp})$ も L_E で表す。L_E を E に関する Bousfiled 局所化という。

いま素数 p と自然数 n を固定する。Verdier 商 $\mathrm{Ho}(\mathrm{Sp}_{(p)}^{\geq n})/\mathrm{Ho}(\mathrm{Sp}_{(p)}^{\geq n+1})$ を monochromatic category という。この monochromatic category は Morava K 理論 $K(n)$ による Bousfield 局所化と三角圏として同値になることが知られている。

$$\mathrm{Ho}(\mathrm{Sp}_{K(n)})\simeq \mathrm{Ho}(\mathrm{Sp}_{(p)}^{\geq n})/\mathrm{Ho}(\mathrm{Sp}_{(p)}^{\geq n+1})$$

$\mathrm{Ho}(\mathrm{Sp}_{K(n)})$ を $K(n)$-local category という。

フィルトレイション (2.1) からわかるように、$K(n)$-local category は、安定ホモトピー圏における基本構成単位と考えることができる。また、フィルトレイション (2.2) や (2.3)、(2.4) からわかるように、Morava K 理論 $K(n)$ は p-局所有限スペクトラムのホモトピー圏 $\mathrm{Ho}(\mathrm{Sp}_{(p)}^{\mathrm{fin}})$ を調べる上で非常に重要である。

2.7 Morava E 理論

この節では $K(n)$-local category を調べる上で基本的な道具となる Morava E 理論について述べます。

素数 p と自然数 n を固定する。Morava E 理論 $E_n^*(-)$ は複素向き付けられた一般コホモロジー理論であり、それを表現するスペクトラムを E_n で表すことにする。Morava E 理論の係数環は

$$\pi_*(E_n)=W[\![u_1,\ldots,u_{n-1}]\!][u^{\pm1}]$$

で与えられる。ここで、$W=W(\mathbb{F}_{p^n})$ は有限体 $\mathbb{F}_{p^n}$ を係数にもつ Witt vector のなす環であり、u_i $(i=1,\ldots,n-1)$ の次数は 0、u の次数は 2 である。また、Morava E 理論 E_n の形式群は Morava K 理論 $K(n)$ の (係数環を適当に拡大した) 形式群の普遍変形である。さらに、Morava 安定化群 $\mathbb{G}_n$ は $E_n^*(-)$ に乗法的なコホモロジー作用素として作用する。

$K(n)$-local category と Morava E 理論との関係は、次のスペクトル系列の存在によって与えられる。有限スペクトラム X に対して、X の $K(n)$ 局所化 $L_{K(n)}X$ のホモトピー群に収束するスペクトル系列 ($K(n)$-local E_n-based Adams spectral sequence)

$$E_2^{s,t} = H_c^s(\mathbb{G}_n; (E_n)^t(X)) \Longrightarrow \pi_{-s-t}(L_{K(n)}X)$$

が存在する。ここで、$H_c^*(\mathbb{G}_n; (E_n)^*(X))$ は位相アーベル群 $(E_n)^*(X)$ を係数とする副有限群 $\mathbb{G}_n$ の連続コホモロジーである。

Remark 2.1. スペクトル系列は X が有限スペクトラムという仮定なしに存在する。

このスペクトル系列の存在は $K(n)$-local category と $\mathbb{G}_n$ 作用をもつ E_n-加群の導来圏 (ホモトピー圏) との関係を示唆している。この講演ではこの関係を明示的に与えるような $K(n)$-local category のモデルの構成についてお話します。

3 ∞-categorical Barr-Beck theorem と descendable morphisms

主定理はモデル圏のレベルで述べられますが、その証明では ∞-category([11]) を経由しています。この章では後で必要になる ∞-categorical Barr-Beck theorem と descendable 射について触れておきます。

3.1 ∞-categorical Barr-Beck Theorem

この節では Lurie による Barr-Beck theorem の ∞-category への拡張について述べます。

まず、通常の圏における Barr-Beck theorem について思い出しておきます。$\mathcal{C}, \mathcal{D}$ を圏として、随伴 $F : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : G$ があったとする。このとき、関手の合成 $T := G \circ F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ はモナド ($\mathrm{End}(\mathcal{C}) = \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{C})$ におけるモノイド対象) になる。$\mathrm{Mod}_T(\mathcal{C})$ で左 T 加群の圏を表す。このとき、自由関手と忘却関手により随伴 $F' : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathrm{Mod}_T(\mathcal{C}) : G'$ が得られる。さらに、比較関手 $\widetilde{G} : \mathcal{D} \to \mathrm{Mod}_T(\mathcal{C})$ が存在し、$G' \circ \widetilde{G} = G$ をみたす。$\widetilde{G}$ が圏の同値を与えるとき、関手 $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ はモナド的であるという。Barr-Beck theorem は G がモナド的になるための必要十分条件を与えるものでした。ここでは、その条件は省略します。

次に、∞-category における Barr-Beck theorem について考えます。∞-category の随伴

$$F : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : G$$

に対して、

$$T := G \circ F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$$

は ∞ モナド (モノイダル ∞-category $\mathrm{End}(\mathcal{C}) = \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{C})$ におけるモノイド対象) になり、左 T 加群のなす ∞-category $\mathrm{Mod}_T(\mathcal{C})$ を考えることができる。さらに、比較関手

$$\widetilde{G} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathrm{Mod}_T(\mathcal{C})$$

が定義できて、$G' \circ \widetilde{G} \simeq G$ が成り立つ。$\widetilde{G}$ が ∞-category の同値を与えるとき、関手 $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ はモナド的であるという。∞-categorical Barr-Beck theorem は G がモナド的であるための必要十分条件を与えます。

Theorem 3.1 (∞-categorical Barr-Beck theorem (Lurie [12])). G がモナド的であるための必要十分条件は、G に関して次の 2 つの条件が成り立つことである。

1. G は conservative である。
2. $\mathcal{D}$ における任意の G-split simplicial object に対して colimit が存在し、G はその colimit を保つ。

以下では、この定理の双対を用います。

3.2 descendable 射

スペクトラムからなる ∞-category を Sp で表す。E をスペクトラムとし、Sp_E を E-local なスペクトラムからなる Sp の充満部分圏とする。この節では descendable 射を導入し、descendable 射が誘導する随伴がコモナド的になることをみます。

$f : A \to B$ を Sp_E における可換モノイドの射とする。$\mathrm{Mod}_A(\mathrm{Sp}_E)$ は対称モノイダル安定 ∞-category であり、そのホモトピー圏 $\mathrm{Ho}(\mathrm{Mod}_A(\mathrm{Sp}_E))$ はテンソル三角圏になる。B をホモトピー圏 $\mathrm{Ho}(\mathrm{Mod}_A(\mathrm{Sp}_E))$ の対象と考えて、B が生成する thick tensor ideal が A を含むとき、f を descendable という ([14], [15])。

$f : A \to B$ が Sp_E における可換モノイドの射のとき、∞-category の関手

$$B \otimes_A (-) : \mathrm{Mod}_A(\mathrm{Sp}_E) \longrightarrow \mathrm{Mod}_B(\mathrm{Sp}_E)$$

は右随伴をもつ。このとき、$f : A \to B$ が descendable であれば、$B \otimes_A (-) : \mathrm{Mod}_A(\mathrm{Sp}_E) \to \mathrm{Mod}_B(\mathrm{Sp}_E)$ はコモナド的である。したがって、比較関手により、$\mathrm{Mod}_A(\mathrm{Sp}_E)$ は随伴からできるコモナド上の左余加群の ∞-category と同値になる。

Example 3.2. $\mathrm{Sp}_{K(n)}$ を $K(n)$-local スペクトラムのなす ∞-category とする。Hopkins-Ravenel による smash product theorem ([18]) より、$\mathrm{Sp}_{K(n)}$ における可換モノイドの射 $L_{K(n)}S \to E_n$ は descendable であることがわかる。したがって、関手

$$L_{K(n)}(E_n \wedge (-)) : \mathrm{Sp}_{K(n)} \longrightarrow \mathrm{Mod}_{E_n}(\mathrm{Sp}_{K(n)})$$

はコモナド的である。

4 $K(n)$-local category のモデル

この章では離散対称 G スペクトラムを用いて、$K(n)$-local category $\mathrm{Ho}(\mathrm{Sp}_{K(n)})$ のモデルを構成します。

4.1 離散対称 G スペクトラム

この節では副有限群 G の作用をもつスペクトラムの一つの定式化である離散 (対称) G スペクトラムについて紹介します。

G を副有限群とし、G が集合 X に作用しているとする。集合 X に離散位相を入れたとき、この作用が連続になるとき、この作用は離散であるということにする。離散作用をもつ G 集合と G 同変射の圏を $\mathrm{Set}(G)$ で表すことにする。圏 $\mathrm{Set}(G)$ に値をもつ単体的対象のなす圏を $\mathrm{SSet}(G)$ で表す。Hovey による一般論 ([9]) により、$\mathrm{SSet}(G)$ 上の対称スペクトラムの圏 $\Sigma\mathrm{Sp}(G)$ を構成することができる ([4])。$\Sigma\mathrm{Sp}(G)$ は対称モノイダル圏の構造をもち、また、単体的モデル圏になっている。G の作用を忘れることにより関手

$$U : \Sigma\mathrm{Sp}(G) \longrightarrow \Sigma\mathrm{Sp}$$

が得られる。ここで、$\Sigma\mathrm{Sp}$ は対称スペクトラムの圏であり、stable モデル構造を入れて考える ([10])。このとき、$\Sigma\mathrm{Sp}(G)$ のモデル構造は次のように与えられる ([4])。$\Sigma\mathrm{Sp}(G)$ における射 $f : X \to Y$ に対して、

- f が弱同値 $\Leftrightarrow$ Uf が弱同値
- f がコファイブレイション $\Leftrightarrow$ Uf がコファイブレイション
- f がファイブレイション $\Leftrightarrow$ コファイブレイションかつ弱同値である任意の射に対して、f が right lifting property をもつ。

k を対称スペクトラムとし、モデル圏 $\Sigma\mathrm{Sp}(G)$ の k に関する左 Bousfield 局所化を $\Sigma\mathrm{Sp}(G)_k$ で表す。$\Sigma\mathrm{Sp}(G)_k$ は対称モノイダル圏なので、モノイド対象上の加群の圏を考えることができる。A を $\Sigma\mathrm{Sp}(G)_k$ のモノイド対象とする。$\Sigma\mathrm{Sp}(G)_k$ における A 加群の圏を $\mathrm{Mod}_A(\Sigma\mathrm{Sp}(G)_k)$ で表す。$\mathrm{Mod}_A(\Sigma\mathrm{Sp}(G)_k)$ には単体的モデル圏の構造が入る。

$U : \Sigma\mathrm{Sp}(G)_k \to \Sigma\mathrm{Sp}_k$ を G の作用を忘れる関手とする。U は右随伴 $V : \Sigma\mathrm{Sp}_k \to \Sigma\mathrm{Sp}(G)_k$ をもつ。また、U は関手 $U : \mathrm{Mod}_A(\Sigma\mathrm{Sp}(G)_k) \to \mathrm{Mod}_{UA}(\Sigma\mathrm{Sp}_k)$ を誘導し、単体的 Quillen 随伴 $U : \mathrm{Mod}_A(\Sigma\mathrm{Sp}(G)_k) \rightleftarrows \mathrm{Mod}_{UA}(\Sigma\mathrm{Sp}_k) : V$、および、$\infty$-category の随伴

$$U : \mathrm{Mod}_A(\mathrm{Sp}(G)_k) \rightleftarrows \mathrm{Mod}_{UA}(\mathrm{Sp}_k) : V$$

が得られる。

ここで、Behrens-Davis による局所化 L_k に関する条件を思い出しておきます。

Condition 4.1 (Behrens-Davis [4]). Bousfiled 局所化 $L_k : \mathrm{Ho}(\mathrm{Sp}) \to \mathrm{Ho}(\mathrm{Sp})$ は、局所化の合成 $L_M L_T$ に同値である。ここで、L_T は smashing であり、L_M は有限スペクトラム M による局所化である。

特に、Morava K 理論 $K(n)$ による局所化は Behrens-Davis の条件をみたす。

次の Proposition は ∞-categorical Barr-Beck theorem (Theorem 3.1) の条件を確かめることによって得られる。

Proposition 4.2 ([19]). 副有限群 G は仮想コホモロジー次元有限であり、L_k が Behrens-Davis の条件 (Condition 4.1) を満たすとする。このとき、∞-category の関手

$$U : \mathrm{Mod}_A(\mathrm{Sp}(G)_k) \longrightarrow \mathrm{Mod}_{UA}(\mathrm{Sp}_k)$$

はコモナド的である。したがって、$\mathrm{Mod}_A(\mathrm{Sp}(G)_k)$ はコモナド UV 上の左余加群の ∞-category と同値である。

4.2 主定理

この節では、$K(n)$-local category $\mathrm{Ho}(\mathrm{Sp}_{K(n)})$ のモデルを構成します。

素数 p と自然数 n を固定する。$\mathbb{G}_n$ を Morava 安定化群とする。$\mathbb{G}_n$ は副有限群なので、離散対称 $\mathbb{G}_n$ スペクトラムの圏 $\Sigma\mathrm{Sp}(\mathbb{G}_n)_{K(n)}$ を考えることができる。Morava E 理論 E_n への $\mathbb{G}_n$ 作用により、E_n を離散 (対称)$\mathbb{G}_n$ スペクトラムと思うことはできないが、Devinatz-Hopkins ([6]) のホモトピー固定点スペクトラムを用いることにより、E_n の離散モデル $F_n \in \Sigma\mathrm{Sp}(\mathbb{G}_n)_{K(n)}$ を構成することができる。F_n は $\Sigma\mathrm{Sp}(\mathbb{G}_n)_{K(n)}$ の可換モノイドである。また、$\Sigma\mathrm{Sp}_{K(n)}$ における可換モノイドの射 $UF_n \to E_n$ が存在して、ホモトピー同値 $L_{K(n)}UF_n \simeq E_n$ が成り立つ。

Example 3.2 より、∞-category $\mathrm{Sp}_{K(n)}$ における可換モノイドの射 $L_{K(n)}S \to E_n$ は descendable であり、∞-category の関手

$$L_{K(n)}(E_n \wedge (-)) : \mathrm{Sp}_{K(n)} \to \mathrm{Mod}_{E_n}(\mathrm{Sp}_{K(n)})$$

はコモナド的である。対応するコモナドを C とする。

また、単体的モデル圏の Quillen 随伴 $U : \mathrm{Mod}_{F_n}(\Sigma\mathrm{Sp}(\mathbb{G}_n)_{K(n)}) \rightleftarrows \mathrm{Mod}_{UF_n}(\Sigma\mathrm{Sp}_{K(n)}) : V$ は、∞-category の随伴

$$U : \mathrm{Mod}_{F_n}(\mathrm{Sp}(\mathbb{G}_n)_{K(n)}) \rightleftarrows \mathrm{Mod}_{E_n}(\mathrm{Sp}_{K(n)}) : V$$

を誘導する。Proposition 4.2 より、$U : \mathrm{Mod}_{F_n}(\mathrm{Sp}(\mathbb{G}_n)_{K(n)}) \to \mathrm{Mod}_{E_n}(\mathrm{Sp}_{K(n)})$ はコモナド的である。この随伴が定めるコモナドを D とする。

このとき、任意の $M \in \mathrm{Mod}_{E_n}(\mathrm{Sp}_{K(n)})$ に対して、$C(M) \simeq D(M)$ が成り立つことから、C と D は $\mathrm{Mod}_{E_n}(\mathrm{Sp}_{K(n)})$ 上のコモナドとして同値である。また、$\mathrm{Sp}_{K(n)}$ は左 C 余加群の ∞-category と同値であり、$\mathrm{Mod}_{F_n}(\mathrm{Sp}(\mathbb{G}_n)_{K(n)})$ は左 D 余加群の ∞-category と同値であることより、次の定理が得られる。

Theorem 4.3 ([20]). 左 Quillen 関手

$$F_n \wedge (-) : \Sigma\mathrm{Sp}_{K(n)} \to \mathrm{Mod}_{F_n}(\Sigma\mathrm{Sp}(\mathbb{G}_n)_{K(n)})$$

は Quillen 同値である。特に、$K(n)$-local category $\mathrm{Ho}(\mathrm{Sp}_{K(n)})$ はモデル圏 $\mathrm{Mod}_{F_n}(\Sigma\mathrm{Sp}(\mathbb{G}_n)_{K(n)})$ のホモトピー圏と (テンソル三角圏として) 同値である。

$$\mathrm{Ho}(\mathrm{Sp}_{K(n)}) \simeq \mathrm{Ho}(\mathrm{Mod}_{F_n}(\Sigma\mathrm{Sp}(\mathbb{G}_n)_{K(n)}))$$

4.3 今後の課題

今後はこの $K(n)$-local category のモデルを用いて、より一般の Verdier 商 $\mathcal{S}_{(p)}^{\geq n}/\mathcal{S}_{(p)}^{\geq n+k}$ $(k \geq 2)$ の構造について調べることが課題である。

References

[1] J.F. Adams, Stable homotopy and generalised homology, Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, Ill., 1974.

[2] P. Balmer, The spectrum of prime ideals in tensor triangulated categories, J. Reine Angew. Math. 588 (2005), 149–168.

[3] P. Balmer, Spectra, spectra, spectra—tensor triangular spectra versus Zariski spectra of endomorphism rings, Algebr. Geom. Topol. 10 (2010), no. 3, 1521–1563.

[4] M. Behrens and D.G. Davis, The homotopy fixed point spectra of profinite Galois extensions, Trans. Amer. Math. Soc. 362 (2010), no. 9, 4983–5042.

[5] A.K. Bousfield, The localization of spectra with respect to homology, Topology 18 (1979), no. 4, 257–281.

[6] E.S. Devinatz and M.J. Hopkins, Homotopy fixed point spectra for closed subgroups of the Morava stabilizer groups, Topology 43 (2004), no. 1, 1–47.

[7] M.J. Hopkins and D.C. Ravenel, Suspension spectra are harmonic, Papers in honor of José Adem (Spanish). Bol. Soc. Mat. Mexicana (2) 37 (1992), no. 1–2, 271–279.

[8] M.J. Hopkins and J.H. Smith, Nilpotence and stable homotopy theory. II, Ann. of Math. (2) 148 (1998), no. 1, 1–49.

[9] M. Hovey, Spectra and symmetric spectra in general model categories, J. Pure Appl. Algebra 165 (2001), no. 1, 63–127.

[10] M. Hovey, B. Shipley, J. Smith, Symmetric spectra, J. Amer. Math. Soc. 13 (2000), no. 1, 149–208.

[11] J. Lurie, Higher topos theory, Annals of Mathematics Studies, 170. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2009.

[12] J. Lurie, Higher algebra, available at http://www.math.harvard.edu/~lurie/.

[13] J. Lurie, Chromatic Homotopy Theory, Lecture series 2010, available at http://www.math.harvard.edu/~lurie/.

[14] A. Mathew, The Galois group of a stable homotopy theory, Adv. Math. 291 (2016), 403–541.

[15] A. Mathew, N. Naumann, and J. Noel, Nilpotence and descent in equivariant stable homotopy theory, Adv. Math. 305 (2017), 994–1084.

[16] J. Morava, Noetherian localisations of categories of cobordism comodules, Ann. of Math. (2) 121 (1985), no. 1, 1–39.

[17] D.C. Ravenel, Localization with respect to certain periodic homology theories, Amer. J. Math. 106 (1984), no. 2, 351–414.

[18] D.C. Ravenel, Nilpotence and periodicity in stable homotopy theory, Annals of Mathematics Studies, 128. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1992.

[19] T. Torii, Discrete G-spectra and embeddings of module spectra, to appear in Journal of Homotopy and Related Structures.

[20] T. Torii, On quasi-categories of comodules and Landweber exactness, preprint, arXiv:1612.03265.