ラグランジュ部分多様体とグラフ型ルジャンドル開折*

高橋　雅朋（室蘭工業大学）

1　はじめに

ラグランジュ部分多様体芽に対してラグランジュ同値であればコースティック同値であり，逆が成り立たないことが知られている．本稿ではラグランジュ部分多様体芽がラグランジュ同値になるための条件を提示する．コースティックは言わば目に見える対象であるが，その背後には特別な波面，グラフ型ルジャンドル開折（大ルジャンドル部分多様体芽）が存在することを示す．それぞれ対応する母関数族と対応する同値関係を与える．また，ラグランジュ部分多様体芽の族を考えると，これもグラフ型ルジャンドル開折の族が対応することが分かり，1 つの応用としてラグランジュ部分多様体芽の生成的な分岐の分類を与える ([24])．本稿の多様体，写像は全て滑らか C^∞ とする．可微分写像の特異点論に関しては [1, 17, 19] を参考にしてください．

2　ラグランジュ部分多様体

ラグランジュ特異点論を紹介する ([1, 2, 4]–[26, 30, 31])．余接束 $\pi : T^*\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を考える．$(x,p) = (x_1,\dots,x_n,p_1,\dots,p_n)$ を $T^*\mathbb{R}^n$ の座標とし，$T^*\mathbb{R}^n$ のシンプレクティック構造を $\omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dx_i$ により与える．部分多様体 $i : L \subset T^*\mathbb{R}^n$ に対して，i が**ラグランジュ部分多様体**であるとは $\dim L = n, i^*\omega = 0$ が成り立つことである．このとき $\pi \circ i$ の特異値の集合を $i : L \subset T^*\mathbb{R}^n$ の**コースティック**と言い C_L と書く．ラグランジュ特異点論 ([1, 17]) より母関数族が存在する．関数芽 $F : (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ が**モース関数族**であるとは

$$\Delta F = \left(\frac{\partial F}{\partial q_1},\dots,\frac{\partial F}{\partial q_k}\right) : (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^k, 0)$$

が正則 (非特異) であるとする．ここで，$(q,x) = (q_1,\dots,q_k,x_1,\dots,x_n) \in (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n, 0)$ とする．このとき $C(F) = (\Delta F)^{-1}(0) \subset (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n, 0)$ は n 次元部分多様体芽であり $L(F) : (C(F), 0) \to T^*\mathbb{R}^n$ を

$$L(F)(q,x) = \left(x, \frac{\partial F}{\partial x_1}(q,x),\dots,\frac{\partial F}{\partial x_n}(q,x)\right)$$

とすると $L(F)(C(F))$ はラグランジュ部分多様体芽になる．逆も成り立つことが知られている ([1], page 300).

* タイトルの「ラグランジュ部分多様体とグラフ型ルジャンドル部分多様体」でも間違いではないのですが，論文に書いてある用語の直訳に直しました．

命題 2.1 ([1]) $T^*\mathbb{R}^n$ の全てのラグランジュ部分多様体芽は上の方法で構成される.

$$C(F)=\left\{(q,x)\in(\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^n,0)\;\middle|\;\frac{\partial F}{\partial q_1}(q,x)=\cdots=\frac{\partial F}{\partial q_k}(q,x)=0\right\}$$

を F の**カタストロフ集合**

$$\mathcal{B}_F=\left\{x\in(\mathbb{R}^n,0)\;\middle|\;{}^{\exists}q\in(\mathbb{R}^k,0),\ (q,x)\in C(F),\ \mathrm{rank}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial q_i\partial q_j}(q,x)\right)<k\right\}$$

を F の**分岐集合**という.

モース関数族 $F:(\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R},0)$ を $L(F)(C(F))$ の**母関数族**ともいう. 標準射影 $\pi_n:(\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^n,0)$ に対して F の分岐集合は $\pi_n|_{C(F)}$ の特異値集合と一致する. つまり, $L(F)$ のコースティックは F の分岐集合である. 式で書けば $C_{C(F)}=\mathcal{B}_F$ となる.

ラグランジュ部分多様体芽の同値関係を導入する. $i:(L,x)\subset(T^*\mathbb{R}^n,p)$ と $i':(L',x')\subset(T^*\mathbb{R}^n,p')$ をラグランジュ部分多様体芽とする. i と i' が**ラグランジュ同値**であるとは, 微分同相 $\sigma:(L,x)\to(L',x')$, シンプレクティック微分同相 $\hat{\tau}:(T^*\mathbb{R}^n,p)\to(T^*\mathbb{R}^n,p')$, 微分同相 $\tau:(\mathbb{R}^n,\pi(p))\to(\mathbb{R}^n,\pi(p'))$ が存在して $\hat{\tau}\circ i=i'\circ\sigma$, $\pi\circ\hat{\tau}=\tau\circ\pi$ が成り立つことである. このとき, コースティック C_L と $C_{L'}$ は τ により微分同相である. しかし, 逆にコースティック同値（コースティックを微分同相で保存する同値関係）だからと言ってラグランジュ同値ではないことが知られている (cf. [1, 12, 16]).

$T^*\mathbb{R}^n$ のラグランジュ部分多様体芽が**ラグランジュ安定**であるとは,（ラフに言えば）ラグランジュ部分多様体芽の空間内で任意に少し動かした写像とラグランジュ同値であることである.

$\mathcal{E}_x=\{f:(\mathbb{R}^n,0)\to\mathbb{R}\}$ とする. ここで座標を $x\in\mathbb{R}^n$ としている. $F,G:(\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R},0)$ が P-$\mathcal{R}^+$-同値であるとは, 微分同相 $\Phi:(\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^n,0)$, $\Phi(q,x)=(\phi_1(q,x),\phi_2(x))$ と関数 $\alpha:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R},0)$ が存在して $G(q,x)=F(\Phi(q,x))+\alpha(x)$ となることである. $F_1:(\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R},0)$ と $F_2:(\mathbb{R}^{k'}\times\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R},0)$ が**安定** P-$\mathcal{R}^+$-**同値**であるとは, 非退化２次形式を加えた後で P-$\mathcal{R}^+$-同値になることである.

$F:(\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R},0)$ が $f=F|_{\mathbb{R}^k\times\{0\}}$ の $\mathcal{R}^+$-**普遍開折**であるとは,

$$\mathcal{E}_q=\left\langle\frac{\partial f}{\partial q_1}(q),\ldots,\frac{\partial f}{\partial q_k}(q)\right\rangle_{\mathcal{E}_q}+\left\langle\frac{\partial F}{\partial x_1}|\mathbb{R}^k\times\{0\},\ldots,\frac{\partial F}{\partial x_n}|\mathbb{R}^k\times\{0\}\right\rangle_{\mathbb{R}}+\langle 1\rangle_{\mathbb{R}}$$

となることである. このとき次が成り立つ.

定理 2.2 モース関数族 $F:(\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R},0), G:(\mathbb{R}^{k'}\times\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R},0)$ に対して,
(1) $L(F)(C(F))$ と $L(G)(C(G))$ がラグランジュ同値である必要十分条件は F と G が安定 P-$\mathcal{R}^+$-同値である.
(2) $L(F)(C(F))$ がラグランジュ安定である必要十分条件は F が $f=F|_{\mathbb{R}^k\times\{0\}}$ の $\mathcal{R}^+$-普遍開折である.

注意 2.3 §3,4,6,7 における安定性や安定同値は, ラグランジュ部分多様体芽のラグランジュ同値によるラグランジュ安定やモース関数族の安定 P-$\mathcal{R}^+$-同値と同様に定義される.

3　1 径数ルジャンドル部分多様体族

1 径数族のルジャンドル部分多様体を考える．$(x,t)=(x_1,\dots,x_n,t)$ を $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^{n+1}$ の座標とする．射影余接束 $\pi : PT^*(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})\to\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$ を考える．$PT^*(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})$ の標準的な接触構造を

$$K=\{X\in TPT^*(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}) \mid \overline{\Pi}(X)(d\overline{\pi}(X))=0\}$$

とする．ここで $\overline{\Pi} : TPT^*(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})\to PT^*(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})$ は接束である．$PT^*(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})\cong(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})\times P(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})^*$ の座標を $((x_1,\dots,x_n,t),[\xi_1:\cdots:\xi_n:\tau])$ とすると $X\in K_{((x,t),[\xi:\tau])}$ は $\sum_{i=1}^n\mu_i\xi_i+\lambda\tau=0$ である．

$PT^*(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})$ はファイバー上で $J^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ のコンパクト化になっている．$U_\tau=\{((x,t),[\xi:\tau])|\tau\neq 0\}$ とすると $((x,t),[\xi:\tau])\in U_\tau$ に対して，

$$((x_1,\dots,x_n,t),[\xi_1:\cdots:\xi_n:\tau])=((x_1,\dots,x_n,t),[-(\xi_1/\tau):\cdots:-(\xi_n/\tau):-1])$$

より $((x_1,\dots,x_n,t),(p_1,\dots,p_n))$, $p_i=-\xi_i/\tau$ となるので，U_τ 上 $\theta^{-1}(0)=K|U_\tau$ となる．ここで，$\theta=dt-\sum_{i=1}^n p_i dx_i$. つまり，$U_\tau$ は $J^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ と同一視され，$U_\tau=J^1_{GA}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})\subset PT^*(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})$ と書く．

部分多様体 $i:\mathcal{L}\subset PT^*(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})$ が**ルジャンドル部分多様体**であるとは $\dim\mathcal{L}=n$ で任意の $p\in\mathcal{L}$ に対して $di_p(T_p\mathcal{L})\subset K_{i(p)}$ である．$p\in\mathcal{L}$ が**ルジャンドル特異点**であるとは $\operatorname{rank} d(\overline{\pi}\circ i)_p<n$ である．$i:\mathcal{L}\subset PT^*(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})$ に対して $\overline{\pi}\circ i(\mathcal{L})=W(\mathcal{L})$ を**大波面**という．また，$\mathcal{L}$ を**大ルジャンドル部分多様体**ともいう．

ルジャンドル部分多様体芽 $i:(\mathcal{L},p_0)\subset(PT^*(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}),p_0)$ に対して，ルジャンドル特異点論 ([1, 17]) より母関数族が存在する．関数芽 $\mathcal{F}:(\mathbb{R}^k\times(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}),0)\to(\mathbb{R},0)$ が**大モース超曲面族**であるとは $(\mathcal{F},d_2\mathcal{F}):(\mathbb{R}^k\times(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}),0)\to(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^k,0)$ が正則（非特異）であるとする．ここで，

$$d_2\mathcal{F}(q,x,t)=\left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial q_1}(q,x,t),\dots,\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial q_k}(q,x,t)\right).$$

このとき, $\Sigma_*(\mathcal{F})=(\mathcal{F},d_2\mathcal{F})^{-1}(0)$ は n 次元部分多様体であり $\mathcal{L}_\mathcal{F}:(\Sigma_*(\mathcal{F}),0)\to PT^*(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})$ を

$$\mathcal{L}_\mathcal{F}(q,x,t)=\left(x,t,\left[\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x}(q,x,t):\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial t}(q,x,t)\right]\right)$$

とすると $\mathcal{L}_\mathcal{F}(\Sigma_*(\mathcal{F}))$ はルジャンドル部分多様体芽になる．逆も成り立つことが知られている．

命題 3.1 ([1]) 全てのルジャンドル部分多様体芽は上の方法で構成される．

関数芽 $\mathcal{F}:(\mathbb{R}^k\times(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}),0)\to(\mathbb{R},0)$ に対して，

$$D(\mathcal{F})=\left\{(x,t)\in(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R},0)\;\middle|\;{}^{\exists}q\in(\mathbb{R}^k,0),\ (q,x,t)\in\Sigma_*(\mathcal{F})\right\},$$

を $\mathcal{F}$ の**判別集合**という．

大モース超曲面族 $\mathcal{F}:(\mathbb{R}^k\times(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}),0)\to(\mathbb{R},0)$ を $\mathcal{L}_\mathcal{F}(\Sigma_*(\mathcal{F}))$ の**母関数族**ともいう．大波面は $\mathcal{F}$ の判別集合と一致する．つまり，$W(\mathcal{L}_\mathcal{F}(\Sigma_*(\mathcal{F})))=D(\mathcal{F})$ となる．

$i:(\mathcal{L},p_0)\subset(PT^*(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}),p_0)$ と $i':(\mathcal{L}',p_0')\subset(PT^*(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}),p_0')$ を大ルジャンドル部分多様体芽とする．i と i' が $S.P^+$**-ルジャンドル同値**であるとは，微分同相 $\Phi:(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R},\overline{\pi}(p_0))\to(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R},\overline{\pi}(p_0'))$, $\Phi(x,t)=(\phi_1(x),t+\alpha(x))$ と $\Psi:(\mathcal{L},p_0)\to(\mathcal{L}',p_0')$ が存在して $\widehat{\Phi}\circ i=i\circ\Psi$ となることである．ここで，$\widehat{\Phi}:(PT^*(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}),p_0)\to(PT^*(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}),p_0')$ は接触持ち上げである．$S.P^+$-ルジャンドル安定の概念はラグランジュ安定と同様に定義される．

$\mathcal{F},\mathcal{G}:(\mathbb{R}^k\times(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}),0)\to(\mathbb{R},0)$ が s-$S.P^+$-$\mathcal{K}$**-同値**であるとは，微分同相 $\Phi:(\mathbb{R}^k\times(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}),0)\to(\mathbb{R}^k\times(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}),0)$，$\Phi(q,x,t)=(\phi(q,x,t),\phi_1(x),t+\alpha(x))$ が存在して，$\langle\mathcal{F}\circ\Phi\rangle_{\mathcal{E}_{(q,x,t)}}=\langle\mathcal{G}\rangle_{\mathcal{E}_{(q,x,t)}}$ となることである．安定 s-$S.P^+$-$\mathcal{K}$-同値も安定 P-$\mathcal{R}^+$-同値と同様に定義する．

$\mathcal{F}$ が $\overline{f}=\mathcal{F}|_{\mathbb{R}^k\times\{0\}\times\mathbb{R}}$ の $S.P^+$-$\mathcal{K}$**-普遍開折**であるとは，

$$\mathcal{E}_{(q,t)}=\left\langle\frac{\partial\overline{f}}{\partial q_1},\dots,\frac{\partial\overline{f}}{\partial q_k},\overline{f}\right\rangle_{\mathcal{E}_{(q,t)}}+\left\langle\frac{\partial\overline{f}}{\partial t}\right\rangle_{\mathbb{R}}+\left\langle\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x_1}|_{\mathbb{R}^k\times\{0\}\times\mathbb{R}},\dots,\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x_n}|_{\mathbb{R}^k\times\{0\}\times\mathbb{R}}\right\rangle_{\mathbb{R}}$$

となることである．このとき次が成り立つ．

定理 3.2 大モース超曲面族 $\mathcal{F}:(\mathbb{R}^k\times(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}),0)\to(\mathbb{R},0)$, $\mathcal{G}:(\mathbb{R}^{k'}\times(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}),0)\to(\mathbb{R},0)$ に対して，

(1) $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}(\Sigma_*(\mathcal{F}))$ と $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}(\Sigma_*(\mathcal{G}))$ が $S.P^+$-ルジャンドル同値ある必要十分条件は $\mathcal{F}$ と $\mathcal{G}$ が安定 s-$S.P^+$-$\mathcal{K}$-同値である．

(2) $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}(\Sigma_*(\mathcal{F}))$ が $S.P^+$-ルジャンドル安定である必要十分条件は $\mathcal{F}$ が $\overline{f}=\mathcal{F}|_{\mathbb{R}^k\times\{0\}\times\mathbb{R}}$ の $S.P^+$-$\mathcal{K}$-普遍開折である．

次の性質がルジャンドル部分多様体芽の特別な性質である．

命題 3.3 ([31, 26]) $i:(\mathcal{L},p_0)\subset(PT^*(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}),p_0)$ と $i':(\mathcal{L}',p_0)\subset(PT^*(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}),p_0)$ を大ルジャンドル部分多様体芽で $\overline{\pi}\circ i,\overline{\pi}\circ i'$ は固有（プロパー）かつ正則点集合が稠密であるとする．このとき $(\mathcal{L},p_0)=(\mathcal{L}',p_0)$ である必要十分条件は $(W(\mathcal{L}),\overline{\pi}(p_0))=(W(\mathcal{L}'),\overline{\pi}(p_0))$ である．

この条件は生成的な条件であり，特に $S.P^+$-ルジャンドル安定であれば成り立つ．

また $W(\mathcal{L})$ と $W(\mathcal{L}')$ が $S.P^+$**-微分同相**であるとは微分同相 $\Phi:(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R},\overline{\pi}(p_0))\to(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R},\overline{\pi}(p_0'))$, $\Phi(x,t)=(\phi_1(x),t+\alpha(x))$ が存在して $\Phi(W(\mathcal{L}))=W(\mathcal{L}')$ である．命題 3.3 より次が成り立つ．

命題 3.4 $i:(\mathcal{L},p_0)\subset(PT^*(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}),p_0)$ と $i':(\mathcal{L}',p_0)\subset(PT^*(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}),p_0)$ を大ルジャンドル部分多様体芽で $\overline{\pi}\circ i,\overline{\pi}\circ i'$ は固有かつ正則点集合が稠密であるとする．このとき i と i' が $S.P^+$-ルジャンドル同値である必要十分条件は $(W(\mathcal{L}),\overline{\pi}(p_0))$ と $(W(\mathcal{L}'),\overline{\pi}(p_0'))$ が $S.P^+$-微分同相である．

4 グラフ型ルジャンドル開折

グラフ型ルジャンドル開折（または，グラフ型ルジャンドル部分多様体）とは大ルジャンドル部分多様体の特別なクラスである．大ルジャンドル部分多様体 $i:\mathcal{L}\subset PT^*(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})$ が**グラフ**

型ルジャンドル開折とは $\mathcal{L} \subset J^1_{GA}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ となることである．$W(\mathcal{L}) = \bar{\pi}(\mathcal{L})$ を $\mathcal{L}$ のグラフ型波面という．ここで $\bar{\pi}: J^1_{GA}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ は標準射影とする．$J^1_{GA}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ 上の接触形式は $\theta = dt - \Sigma_{i=1}^n p_i dx_i$ で与えられる．$\Pi : J^1_{GA}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \to T^*\mathbb{R}^n$ を $\Pi(x,t,p) = (x,p)$ とすると $\Pi(\mathcal{L})$ は $T^*\mathbb{R}^n$ のラグランジュ部分多様体になる．

$\mathcal{L}$ は $PT^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ の大ルジャンドル部分多様体芽であるので，母関数族 $\mathcal{F} : (\mathbb{R}^k \times (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}), 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ が局所的には存在する．

$\mathcal{L} \subset J^1_{GA}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = U_\tau \subset PT^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ なので， 条件 $(\partial\mathcal{F}/\partial t)(0) \neq 0$ を満たす．逆に $\mathcal{F} : (\mathbb{R}^k \times (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}), 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ を大モース超曲面族とする．$\mathcal{F}$ がグラフ型モース超曲面族であるとは $(\partial\mathcal{F}/\partial t)(0) \neq 0$ を満たすこととする．$\mathcal{F}$ を $\mathcal{L}_\mathcal{F}(\Sigma_*(\mathcal{F}))$ のグラフ型母関数族ともいう．

グラフ型モース超曲面族 $\mathcal{F}$ に対して，陰関数定理より $F : (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ が存在して $\langle \mathcal{F}(q,x,t) \rangle_{\mathcal{E}_{(q,x,t)}} = \langle F(q,x) - t \rangle_{\mathcal{E}_{(q,x,t)}}$ と表せられる．

命題 4.1 ([22]) $\mathcal{F} : (\mathbb{R}^k \times (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}), 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ が $\langle \mathcal{F}(q,x,t) \rangle_{\mathcal{E}_{(q,x,t)}} = \langle F(q,x) - t \rangle_{\mathcal{E}_{(q,x,t)}}$ であるとする．このとき $\mathcal{F}$ がグラフ型モース超曲面族である必要十分条件は F がモース関数族である．

さて，$\mathcal{F}(q,x,t) = \lambda(q,x,t)(F(q,x) - t)$, $\lambda(0) \neq 0$ とすると

$$\Sigma_*(\mathcal{F}) = \{(q, x, F(q,x)) \in (\mathbb{R}^k \times (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}), 0) \mid (q,x) \in C(F)\},$$

$C(F) = \Delta F^{-1}(0)$ でありラグランジュ部分多様体芽は $L(F)(C(F)) \subset T^*\mathbb{R}^n$,

$$L(F)(q,x) = \left(x, \frac{\partial F}{\partial x_1}(q,x), \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(q,x) \right)$$

となる．一方 $\mathcal{F}$ はグラフ型モース超曲面族なので大ルジャンドル部分多様体芽 $\mathcal{L}_\mathcal{F}(\Sigma_*(\mathcal{F})) \subset J^1_{GA}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ は $\mathcal{L}_\mathcal{F} : (\Sigma_*(\mathcal{F}), 0) \to J^1_{GA}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = T^*\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$,

$$\mathcal{L}_\mathcal{F}(q,x,t) = \left(x, t, -\frac{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x_1}(q,x,t)}{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}(q,x,t)}, \dots, -\frac{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x_n}(q,x,t)}{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}(q,x,t)} \right)$$

となる．$\mathfrak{L}_F : (C(F), 0) \to J^1_{GA}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ を

$$\mathfrak{L}_F(q,x) = \left(x, F(q,x), \frac{\partial F}{\partial x_1}(q,x), \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(q,x) \right)$$

とすると $\partial\mathcal{F}/\partial x_i = (\partial\lambda/\partial x_i)(F - t) + \lambda \partial F/\partial x_i$, $\partial\mathcal{F}/\partial t = (\partial\lambda/\partial t)(F - t) - \lambda$ なので, $(\partial\mathcal{F}/\partial x_i)(q,x,t) = \lambda(q,x,t)(\partial F/\partial x_i)(q,x,t)$, $(\partial\mathcal{F}/\partial t)(q,x,t) = -\lambda(q,x,t)$, $(q,x,t) \in \Sigma_*(\mathcal{F})$ となる．よって $\mathfrak{L}_F(C(F)) = \mathcal{L}_\mathcal{F}(\Sigma_*(\mathcal{F}))$. 定義から $\Pi(\mathcal{L}_\mathcal{F}(\Sigma_*(\mathcal{F}))) = \Pi(\mathfrak{L}_F(C(F))) = L(F)(C(F))$ より $\mathcal{L}_\mathcal{F}(\Sigma_*(\mathcal{F})) = \mathfrak{L}_F(C(F))$ のグラフ型波面 は $F|_{C(F)}$ のグラフである．これがグラフ型という理由である．

5 同値関係の関係

定理 5.1 ([13, 16, 20, 21]) $\mathcal{F} : (\mathbb{R}^k \times (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}), 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ と $\mathcal{G} : (\mathbb{R}^{k'} \times (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}), 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ をグラフ型モース超曲面族で $\mathcal{F}(q,x,t) = \lambda(q,x,t)(F(q,x) - t)$, $\mathcal{G}(q',x,t) =$

$\mu(q',x,t)(G(q',x)-t)$ とする．このとき， ラグランジュ部分多様体芽 $L(F)(C(F))$ と $L(G)(C(G))$ がラグランジュ同値である必要十分条件はグラフ型ルジャンドル開折 $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}(\Sigma_*(\mathcal{F}))$ と $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}(\Sigma_*(\mathcal{G}))$ が $S.P^+$-ルジャンドル同値となることである．

グラフ型ルジャンドル開折 $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}(\Sigma_*(\mathcal{F}))$ のルジャンドル特異点の集合は $\pi\circ L(F)$ の特異点であるので， グラフ型波面 $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}(\Sigma_*(\mathcal{F}))$ の特異点は $L(F)$ のコースティック上にある．

定理 5.1 と命題 3.4 より次が成り立つ．

系 5.2 $\mathcal{F}:(\mathbb{R}^k\times(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}),0)\to(\mathbb{R},0)$ と $\mathcal{G}:(\mathbb{R}^{k'}\times(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}),0)\to(\mathbb{R},0)$ をグラフ型モース超曲面族で $\mathcal{F}(q,x,t)=\lambda(q,x,t)(F(q,x)-t)$, $\mathcal{G}(q',x,t)=\mu(q',x,t)(G(q',x)-t)$ とする．$\pi\circ\mathcal{L}_{\mathcal{F}},\pi\circ\mathcal{L}_{\mathcal{G}}$ は固有かつ正則点集合が稠密であるとする．このときラグランジュ部分多様体芽 $L(F)(C(F))$ と $L(G)(C(G))$ がラグランジュ同値である必要十分条件は $W(\mathcal{L}_{\mathcal{F}}(\Sigma_*(\mathcal{F})))$ と $W(\mathcal{L}_{\mathcal{G}}(\Sigma_*(\mathcal{G})))$ が $S.P^+$-微分同相である．

定理 5.1 の系として次が成り立つ．

系 5.3 $\mathcal{F}(q,x,t)=\lambda(q,x,t)(F(q,x)-t)$ がグラフ型モース超曲面族とする．このとき $L(F)(C(F))$ がラグランジュ安定である必要十分条件は $\mathcal{L}(\Sigma_*(\mathcal{F}))$ が $S.P^+$-ルジャンドル安定である．

6 ラグランジュ部分多様体族

$i_r:L\times\mathbb{R}^r\subset T^*\mathbb{R}^n$ が r **径数ラグランジュ部分多様体族**であるとは $i|_{L\times\{s\}}:L\times\{s\}\subset T^*\mathbb{R}^n$ が任意の $s=(s_1,\dots,s_r)\in\mathbb{R}^r$ に対してラグランジュ部分多様体である．$F:(\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r,0)\to(\mathbb{R},0),(q,x,s)\to F(q,x,s)$ を r 径数モース関数族とする．つまり，任意の $s\in(\mathbb{R}^r,0)$ に対して $F_s(q,x)=F(q,x,s)$ はモース関数族とする．

余接束 $\pi_r:T^*(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r)\to\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r$ を考える．$T^*(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r)$ の座標を $(x,s,p,u)=(x_i,s_j,p_i,u_j)$ とする $(i=1,\dots,n,j=1,\dots,r)$．$T^*(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r)$ 上のシンプレクティック構造を $\omega_r=\sum_{i=1}^n dp_i\wedge dx_i+\sum_{j=1}^r du_j\wedge ds_j$ で与える．標準射影を $\widetilde{\pi}_r:T^*(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r)\to T^*\mathbb{R}^n$ とする．

$F:(\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r,0)\to(\mathbb{R},0),(q,x,s)\mapsto F(q,x,s)$ を r 径数モース関数族とする．このとき F はモース関数族でもある．よってラグランジュ部分多様体芽 $L(F)(C(F))\subset T^*(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r)$ が定義される．さらに，$\widetilde{\pi}_r\circ L(F)(C(F))\subset T^*\mathbb{R}^n$ は r 径数ラグランジュ部分多様体芽である．$L(F)(C(F))$ を**大ラグランジュ部分多様体芽**という．

$i_r:(L\times\mathbb{R}^r,(x,0))\subset(T^*(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r),p)$ と $i'_r:(L'\times\mathbb{R}^r,(x',0))\subset(T^*(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r),p')$ を大ラグランジュ部分多様体芽とする．i_r と i'_r が r **径数ラグランジュ同値**であるとは，微分同相 $\sigma:(L\times\mathbb{R}^r,(x,0))\to(L'\times\mathbb{R}^r,(x',0))$, $\sigma(u,s)=(\sigma_1(u,s),\varphi(s))$, シンプレクティック微分同相 $\hat{\tau}:(T^*(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r),p)\to(T^*(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r),p')$, 微分同相 $\tau:(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r,\pi(p))\to(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r,\pi(p'))$, $\tau(x,s)=(\tau_1(x,s),\varphi(s))$ が存在して $\hat{\tau}\circ i_r=i'_r\circ\sigma$, $\pi_r\circ\hat{\tau}=\tau\circ\pi_r$ となることである．

$F, G : (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ が **r-P-$\mathcal{R}^+$-同値**であるとは微分同相 $\Phi : (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, 0) \to (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, 0)$, $\Phi(q, x, s) = (\phi_1(q, x, s), \phi_2(x, s), \varphi(s))$ と関数芽 $\alpha : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ が存在して $G(q, x, s) = F(\Phi(q, x, s)) + \alpha(x, s)$ となることである．

定理 6.1 $F : (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$, $G : (\mathbb{R}^{k'} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ を r 径数モース関数族とする．このとき $L(F)(C(F))$ と $L(G)(C(G))$ が r 径数ラグランジュ同値である必要十分条件は F と G が安定 r-P-$\mathcal{R}^+$-同値である．

7 グラフ型ルジャンドル開折族

r 径数大ルジャンドル部分多様体 $i : \mathcal{L} \times \mathbb{R}^r \subset PT^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R})$ が r **径数ルジャンドル開折**であるとは $\mathcal{L} \times \mathbb{R}^r \subset J^1_{GA}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, \mathbb{R})$ となることである．$W(\mathcal{L} \times \mathbb{R}^r) = \overline{\pi}_r(\mathcal{L} \times \mathbb{R}^r)$ を $\mathcal{L} \times \mathbb{R}^r$ の r **径数グラフ型波面**という．ここで $\overline{\pi}_r : J^1_{GA}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}$ は標準射影とする．$\mathcal{F} : (\mathbb{R}^k \times (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}), 0) \to (\mathbb{R}, 0), (q, x, s, t) \to \mathcal{F}(q, x, s, t)$ を r 径数グラフ型モース超曲面族とする．つまり，任意の $s \in (\mathbb{R}^r, 0)$ に対して，$\mathcal{F}_s(q, x, t) = \mathcal{F}(q, x, s, t)$ はグラフ型モース超曲面族とする．

$i : (\mathcal{L} \times \mathbb{R}^r, (p, 0)) \subset (PT^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}), p_0)$, $i' : (\mathcal{L}' \times \mathbb{R}^r, (p', 0)) \subset (PT^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}), p'_0)$ が **r-$S.P^+$ ルジャンドル同値**であるとは，微分同相 $\Phi : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}, \overline{\pi}_r(p_0)) \to (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}, \overline{\pi}_r(p'_0))$, $\Phi(x, s, t) = (\phi_1(x, s), \varphi(s), t + \alpha(x, s))$ と微分同相 $\Psi : (\mathcal{L} \times \mathbb{R}^r, p_0) \to (\mathcal{L}' \times \mathbb{R}^r, p'_0)$, $\Psi(u, s) = (\psi_1(u, s), \varphi(s))$ が存在して $\widehat{\Phi} \circ i = i \circ \Psi$ となる．ここで $\widehat{\Phi} : (PT^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}), p_0) \to (PT^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}), p'_0)$ は Φ の接触持ち上げである．

$\mathcal{F}, \mathcal{G} : (\mathbb{R}^k \times (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}), 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ が **r-s-$S.P^+$-$\mathcal{K}$-同値**であるとは，微分同相 $\Phi : (\mathbb{R}^k \times (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}), 0) \to (\mathbb{R}^k \times (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}), 0)$, $\Phi(q, x, s, t) = (\phi(q, x, s, t), \phi_1(x, s), \varphi(s), t + \alpha(x, s))$ が存在して $\langle \mathcal{F} \circ \Phi \rangle_{\mathcal{E}_{(q,x,s,t)}} = \langle \mathcal{G} \rangle_{\mathcal{E}_{(q,x,s,t)}}$ となることである．

定理 7.1 $\mathcal{F} : (\mathbb{R}^k \times (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}), 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ と $\mathcal{G} : (\mathbb{R}^{k'} \times (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}), 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ を r 径数グラフ型ルジャンドル開折とする．このとき $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}(\Sigma_*(\mathcal{F}))$ と $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}(\Sigma_*(\mathcal{G}))$ が r-$S.P^+$-ルジャンドル同値である必要十分条件は $\mathcal{F}$ と $\mathcal{G}$ が安定 r-s-$S.P^+$-$\mathcal{K}$ 同値である．

8 r 係数の同値関係の関係

r 径数の場合のラグランジュ同値とグラフ型ルジャンドル開折の同値関係の関係を考える．

定理 8.1 ([24]) $\mathcal{F} : (\mathbb{R}^k \times (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}), 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ と $\mathcal{G} : (\mathbb{R}^{k'} \times (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}), 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ が r 径数グラフ型ルジャンドル開折で $\mathcal{F}(q, x, s, t) = \lambda(q, x, s, t)(F(q, x, s) - t)$, $\mathcal{G}(q', x, s, t) = \mu(q', x, s, t)(G(q', x, s) - t)$ とする．このとき r 径数ラグランジュ部分多様体芽 $L(F)(C(F))$ と $L(G)(C(G))$ が r 径数ラグランジュ同値である必要十分条件は r 径数グラフ型ルジャンドル開折 $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}(\Sigma_*(\mathcal{F}))$ と $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}(\Sigma_*(\mathcal{G}))$ が r-$S.P^+$-ルジャンドル同値である．

$i:(\mathcal{L}\times\mathbb{R}^r,p_0)\subset J^1_{GA}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r,\mathbb{R})$ と $i':(\mathcal{L}'\times\mathbb{R}^r,p'_0)\subset J^1_{GA}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r,\mathbb{R})$ が r 径数グラフ型ルジャンドル開折とする．$W(\mathcal{L}\times\mathbb{R}^r)$ と $W(\mathcal{L}'\times\mathbb{R}^r)$ が r**-**$S.P^+$**-微分同相**であるとは，微分同相 $\Phi:(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r\times\mathbb{R},\overline{\pi}(p_0))\to(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r\times\mathbb{R},\overline{\pi}(p'_0))$, $\Phi(x,s,t)=(\phi_1(x,s),\varphi(s),t+\alpha(x,s))$ が存在して $\Phi(W(\mathcal{L}\times\mathbb{R}^r))=W(\mathcal{L}'\times\mathbb{R}^r)$ となることである．

定理 8.1 と命題 3.4 より次が成り立つ．

系 8.2 $\mathcal{F}:(\mathbb{R}^k\times(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}),0)\to(\mathbb{R},0)$ と $\mathcal{G}:(\mathbb{R}^{k'}\times(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}),0)\to(\mathbb{R},0)$ が r 径数グラフ型ルジャンドル開折で $\mathcal{F}(q,x,s,t)=\lambda(q,x,s,t)(F(q,x,s)-t)$, $\mathcal{G}(q',x,s,t)=\mu(q',x,s,t)(G(q',x,s)-t)$ とする．$\overline{\pi}_r\circ\mathcal{L}_{\mathcal{F}},\overline{\pi}_r\circ\mathcal{L}_{\mathcal{G}}$ が固有写像であり，正則集合が稠密であるとする．このとき，r 径数ラグランジュ部分多様体芽 $L(F)(C(F))$ と $L(G)(C(G))$ が r-ラグランジュ同値である必要十分条件は $W(\mathcal{L}_{\mathcal{F}}(\Sigma_*(\mathcal{F})))$ と $W(\mathcal{L}_{\mathcal{G}}(\Sigma_*(\mathcal{G})))$ が r-$S.P^+$-微分同相である．

定理 8.1 の系として次が成り立つ．

系 8.3 $\mathcal{F}(q,x,s,t)=\lambda(q,x,s,t)(F(q,x,s)-t)$ を r 径数グラフ型ルジャンドル開折とする．このとき，$L(F)(C(F))$ が r-ラグランジュ安定である必要十分条件は $\mathcal{L}(\Sigma_*(\mathcal{F}))$ が r-$S.P^+$-ルジャンドル安定である．

9 ラグランジュ部分多様体芽の分岐

ラグランジュ部分多様体芽の分岐を考える．つまり，1 径数族, $r=1$ の場合を考える．定理 8.1 の応用として, 低次元の場合の 1 径数ラグランジュ部分多様体芽の生成的な分類が，1 径数グラフ型ルジャンドル開折を用いることにより得られる．関数芽 $\mathcal{F}:(\mathbb{R}^k\times(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}),0)\to(\mathbb{R},0)$ は 1 径数の 1 径数を考えることになり，証明は [3, 10] と [27, 28, 29] の手法を用いる．

定理 9.1 ([24]) $1\le n\le 3$ とする． 1 径数モース関数族 $F:(\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R},0)\to(\mathbb{R},0)$ に対して，生成的な 1 径数ラグランジュ部分多様体芽 $L(F)(C(F))$ は次の 1 径数モース関数族の 1 径数ラグランジュ部分多様体芽とラグランジュ同値である：

$n=1$;
(1) q_1
(2) $\pm q_1^2+x_1$
(3) $q_1^3+x_1q_1$
(4) $\pm q_1^4+\alpha(x_1,s)q_1^2+x_1q_1$, $\partial\alpha/\partial s(0)\neq 0,\partial\alpha/\partial x_1(0)=0$,
$n=2$;
(1) q_1,
(2) $\pm q_1^2+x_1q_1$,
(3) $q_1^3+x_1q_1+x_2$,
$(4)_1$ $\pm q_1^4+x_1q_1^2+x_2q_1$,
$(4)_2$ $\pm q_1^4+\alpha(x_1,x_2,s)q_1^2+x_1q_1+x_2$, $\partial\alpha/\partial s(0)\neq 0,\partial\alpha/\partial x_1(0)=\partial\alpha/\partial x_2(0)=0$,
$(5)_1$ $q_1^5+\alpha(x_1,x_2,s)q_1^3+x_1q_1^2+x_2q_1$, $\partial\alpha/\partial s(0)\neq 0,\partial\alpha/\partial x_1(0)=\partial\alpha/\partial x_2(0)=0$,
$(5)_2$ $q_1^5+x_1q_1^3+\alpha(x_1,x_2,s)q_1^2+x_2q_1$, $\partial\alpha/\partial s(0)\neq 0,\partial\alpha/\partial x_1(0)=\partial\alpha/\partial x_2(0)=0$,

(6) $q_1^3 \pm q_1q_2^2 + \alpha(x_1, x_2, s)q_1^2 + x_1q_1 + x_2q_2$, $\partial\alpha/\partial s(0) \neq 0, \partial\alpha/\partial x_1(0) = \partial\alpha/\partial x_2(0) = 0$,

$n = 3$;

(1) q_1,

(2) $\pm q_1^2 + x_1q_1$,

(3) $q_1^3 + x_1q_1 + x_2$,

$(4)_1$ $\pm q_1^4 + x_1q_1^2 + x_2q_2 + x_3$,

$(4)_2$ $\pm q_1^4 + \alpha(x_1, x_2, x_3, s)q_1^2 + x_1q_1 + x_2$, $\partial\alpha/\partial s(0) \neq 0, \partial\alpha/\partial x_i(0) = 0\ i = 1, 2, 3$,

$(5)_1$ $q_1^5 + x_1q_1^3 + x_2q_1^2 + x_3q_1$,

$(5)_2$ $q_1^5 + \alpha(x_1, x_2, x_3, s)q_1^3 + x_1q_1^2 + x_2q_1 + x_3$, $\partial\alpha/\partial s(0) \neq 0, \partial\alpha/\partial x_i(0) = 0$,

$(5)_3$ $q_1^5 + x_1q_1^3 + \alpha(x_1, x_2, x_3, s)q_1^2 + x_2q_1 + x_3$, $\partial\alpha/\partial s(0) \neq 0, \partial\alpha/\partial x_i(0) = 0$,

$(6)_1$ $q_1^3 \pm q_1q_2^2 + x_1q_1^2 + x_2q_1 + x_3q_2$,

$(6)_2$ $q_1^3 \pm q_1q_2^2 + \alpha(x_1, x_2, x_3, s)q_1^2 + x_1q_1 + x_2q_2 + x_3$, $\partial\alpha/\partial s(0) \neq 0, \partial\alpha/\partial x_i(0) = 0$,

$(7)_1$ $\pm q_1^6 + \alpha(x_1, x_2, x_3, s)q_1^4 + x_1q_1^3 + x_2q_1^2 + x_3q_1$, $\partial\alpha/\partial s(0) \neq 0, \partial\alpha/\partial x_i(0) = 0$,

$(7)_2$ $\pm q_1^6 + x_1q_1^4 + \alpha(x_1, x_2, x_3, s)q_1^3 + x_2q_1^2 + x_3q_1$, $\partial\alpha/\partial s(0) \neq 0, \partial\alpha/\partial x_i(0) = 0$,

$(7)_3$ $\pm q_1^6 + x_1q_1^4 + x_1q_1^3 + \alpha(x_1, x_2, x_3, s)q_1^2 + x_3q_1$, $\partial\alpha/\partial s(0) \neq 0, \partial\alpha/\partial x_i(0) = 0$,

$(8)_1$ $\pm(q_1^2q_2 + q_2^4) + \alpha(x_1, x_2, x_3, s)q_1^2 + x_1q_2^2 + x_2q_1 + x_3q_2$, $\partial\alpha/\partial s(0) \neq 0, \partial\alpha/\partial x_i(0) = 0$,

$(8)_2$ $\pm(q_1^2q_2 + q_2^4) + x_1q_1^2 + \alpha(x_1, x_2, x_3, s)q_2^2 + x_2q_1 + x_3q_2$, $\partial\alpha/\partial s(0) \neq 0, \partial\alpha/\partial x_i(0) = 0$,

$i = 1, 2, 3$.

関数 α を**関数モジュライ**という．図は講演中にお見せしたい．

注意 9.2 1 径数コースティック同値による生成的な分類 ([1, 2, 31]) では関数モジュライは特別な型になっている．例えば，コースティック同値であると，定理 9.1 の $(7)_1$ の関数モジュライは $\alpha(x, s) = s$ のみであり，$(7)_2$ と $(7)_3$ はコースティック同値の生成的な分類には現れない．

参考文献

[1] V. I. Arnol'd, S. M. Gusein-Zade and A. N. Varchenko, *Singularities of Differentiable Maps vol.* I. Birkhäuser (1986).

[2] V. I. Arnol'd, *Singularities of Caustics and Wave Fronts.* Mathematics and Its Applications. **62** Kluwer Academic Publishers (1990).

[3] J. Damon, *The unfolding and determinacy theorems for subgroups of $\mathcal{A}$ and $\mathcal{K}$.* Memoirs of Amer. Math. Soc. **50-306** (1984).

[4] J. J. Duistermaat, *Oscillatory Integrals, Lagrange Immersions and Unfolding of Singularities.* Communications of Pure and Applied Math. **XXVII** (1974), 207–281.

[5] J. Ehlers and E.T. Newman, *The theory of caustics and wave front singularities with physical applications*, J. Math. Physics. **41** (2000), 3344–3378.

[6] V. V. Goryunov and V. M. Zakalyukin, *Lagrangian and Legendrian singularities*, Real and complex singularities, Trends Math., Birkhauser, Basel, (2007), 169–185.

[7] W. Hasse, M. Kriele and V. Perlick, *Caustics of wavefronts in general relativity*, Class. Quantum Grav. **13** (1996), 1161–1182.

[8] L. Hörmander, *Fourier Integral Operators,I.* Acta. Math. **128** (1972), 79–183.

[9] S. Izumiya, *Perestroikas of optical wave fronts and graphlike Legendrian unfoldings.* J. Differential Geom. **38** (1993), 485–500.

[10] S. Izumiya, *Completely integrable holonomic systems of first-order differential equations.* Proc. Roy. Soc. Edinburgh. **125A** (1995), 567–586.

[11] S. Izumiya, *Differential Geometry from the viewpoint of Lagrangian or Legendrian singularity theory.* in Singularity Theory (ed., D. Chéniot et al), World Scientific (2007), 241–275.

[12] S. Izumiya, *The theory of graph-like Legendrian unfoldings and its applications.* J. Singl. **12** (2015), 53–79.

[13] S. Izumiya, *Geometric interpretation of Lagrangian equivalence.* Canadian Math. Bull. (2016) 806–812.

[14] S. Izumiya, *Geometry of world sheets in Lorentz-Minkowski space.* RIMS Kôkyûroku Bessatsu, **B55** (2016), 89–109.

[15] S. Izumiya, *Caustics of world hyper-sheets in the Minkowski space-time.* Contemporary Mathematics, AMS, **675** (2016), 133–151.

[16] S. Izumiya, *The theory of graph-like Legendrian unfoldings: Equivalence relations.* Preprint. (2016).

[17] 泉屋周一，石川剛郎，応用特異点論. 共立出版 (1998).

[18] S. Izumiya, D-H. Pei and M. Takahashi, *Singularities of evolutes of hypersurfaces in hyperbolic space.* Proc. Edinburgh Math. Soc. **47** (2004), 131–153.

[19] S. Izumiya, M. C. Romero-Fuster, M. A. S. Ruas, F. Tari, *Differential Geometry from a Singularity Theory Viewpoint.* World Scientific Pub. Co Inc. (2015).

[20] S. Izumiya and M. Takahashi, *Spacelike parallels and evolutes in Minkowski pseudo-spheres.* J. Geom. and Phys. **57** (2007), 1569–1600.

[21] S. Izumiya and M. Takahashi, *Caustics and wave front propagations: Applications to differential geometry.* Banach Center Publications. Geometry and topology of caustics. **82** (2008), 125–142.

[22] S. Izumiya and M. Takahashi, *On caustics of submanifolds and canal hypersurfaces in Euclidean space.* Topology and its appl. **159** (2012), 501–508.

[23] S. Izumiya and M. Takahashi, *Pedal foliations and Gauss maps of hypersurfaces in Euclidean space.* J. Singlu. **6** (2012), 84–97.

[24] S. Izumiya and M. Takahashi, *On families of Lagrangian submanifolds.* Preprint. (2017).

[25] S. Janeczko and M. Roberts, *Classification of symmetric caustics II. Caustic equivalence.* J. London Math. Soc. **48** (1993), 178–192.

[26] M. Kokubu, W. Rossman, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Singularities of flat fronts in hyperbolic space*, Pacific J. Math. **221** (2005), 303–351.

[27] M. Takahashi, *Bifurcations of ordinary differential equations of Clairaut type.* J. Diff. Equations. **190** (2003), 579–599.

[28] M. Takahashi, *Bifurcations of holonomic systems of general Clairaut type.* Hokkaido Math. J. **35** (2006), 905–934.

[29] M. Takahashi, *Bifurcations of completely integrable first order ordinary differential equations.* J. Math. Sci. (N. Y.) **144** (2007), 3854–3869.

[30] G. Wassermann, *Stability of Caustics.* Math. Ann. **216** (1975), 43–50.

[31] V. M. Zakalyukin, *Reconstructions of fronts and caustics depending on a parameter and versality of mappings.* J. Soviet Math. **27** (1983), 2713–2735.