Levi平坦葉層構造とその埋め込み問題について

小川 竜 (東海大学)*

概　要

本講演ではLevi平坦埋め込み問題を扱う．特にBarrettによるReeb葉層の非埋込定理を紹介した後、その高次元版となる非埋込型定理について解説する．後半では、主定理に必要な複素超曲面の近傍幾何(上田理論)についても概説する．本講演の内容は小池貴之氏(京都大学)との共同研究[KO]に基づく．

1. Levi平坦多様体とLevi葉層

1.1. 設定と問題

複素多様体(X^{2n}, J_X)内の滑らかな実超曲面M^{2n-1}がXの複素超曲面の族$\mathcal{F}$で分割されるとき、Mを**Levi平坦超曲面**、$\mathcal{F}$を**Levi葉層**という[1]．より一般に(Xを忘れて)、奇数次元多様体Mと実余次元1複素多様体族による分割$\mathcal{F}$の組$(M, \mathcal{F}, J_{\mathcal{F}})$を**Levi平坦 (CR) 多様体**と呼ぶ．ここで$J_{\mathcal{F}}$は各葉に沿った複素構造で葉の横断方向へ滑らかに変化する．これは局所座標を用いて述べることができる．Mの局所座標系$\mathfrak{U} = \{(U_j, \varphi_j; (z_j, t_j))\}$であって$\varphi_j(U_j) \approx \Omega_j \times I_j \subset \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{R}$ (Ω_jは$\mathbb{C}^{n-1}$の開集合、I_jを開区間)とし、$U_{jk} \neq \emptyset$では座標変換が

$$\varphi_{jk} : \varphi_k(U_{jk}) \to \varphi_j(U_{jk})\ ;\ \varphi_{jk}(z_k, t_k) = (f_{jk}(z_k, t_k), g_{jk}(t_k)) \in \Omega_{jk} \times I_{jk}$$

で与えられるものとする．ここでf_{jk}はz_kについて正則、t_kについてC^∞、g_{jk}はt_kについてC^∞とする．各$\Omega_k \times \{t_k\}$を貼り合わせて得られるMのはめ込まれた部分多様体Lを**葉**と呼び、葉の集合$\mathcal{F}$をMの**葉層構造**と呼ぶ．また$\mathfrak{U}$を**葉層座標系**と呼ぶ．各葉Lは複素多様体となり、葉の横断方向にその複素構造が滑らかに変化する．本講演では次の問題を考える．

問題 1.1. *どのようなLevi平坦多様体$(M^{2n-1}, \mathcal{F}, J_{\mathcal{F}})$が複素多様体$(X^{2n}, J_X)$に埋め込めるか？ または埋め込めないか？*

ここでいう埋め込みとはMからXへの滑らかな埋め込みであって、各葉L上で正則なものを考えている[2]．本講演ではこれを**Levi平坦 (CR) 埋め込み**と呼ぶ．また埋め込みの像は(X^{2n}, J_X)内のLevi平坦面である．

Levi平坦面の研究は二つの起源を持つと考えられる．一つは正則葉層構造論における**例外的極小集合予想**、もう一つは関数論における**Levi問題**である[3]．例外的極小集合予想とは$\mathbb{C}P^2$内の正則葉層$\mathcal{F}$に対して$\bar{L} \cap Sing\mathcal{F} \neq \emptyset$が成り立つ、即ち全ての葉は特異集合Sing$\mathcal{F}$に漸近するという予想である[CLS] (cf. [BLM],[C])．弱い形の予想として『$\mathbb{C}P^2$内にはコンパクトLevi平坦面は存在しない』と考えられており、これまで多くの研究がある．$\mathbb{C}P^n$ ($n \geqq 3$)のとき同種の予想は肯定的に解決されているが、$\mathbb{C}P^2$では未解決である．この周辺の研究については[LN],[Si],[Br],[Oh3],[De],[AB]などを参

* e-mail: nogawa@tsc.u-tokai.ac.jp

[1] 断りが無ければ全て非特異、C^∞級を仮定する．
[2] 以降、埋め込みと書いたら全てこれを仮定する．
[3] 独立ではなく、互いに関連して研究が進められている．

照せよ．一方、Levi 問題 (または Hartogs の逆問題) とは、『(Levi) 擬凸領域ならば正則領域である』ことを問う問題である．$\mathbb{C}^n$ 内の領域などで Oka らの研究によって肯定的に解決され、Grauert らにより一般化された．しかし一般の複素多様体内の領域では Grauert による反例がある．その擬凸領域に、稠密葉から成るコンパクト Levi 平坦面が出現した．最大値原理から特に非定数正則関数を持たない．この方面からの研究についてては [Oh1],[Oh2] などを参照せよ．

我々は葉層 $\mathcal{F}$ の位相力学系的性質と、埋め込まれた複素多様体の解析的性質との関係に着目しながら話を進める．そのために少し言葉を準備しよう [4]．

葉 L 上の閉曲線 Γ に沿って動いたとき、他の葉がどのような振る舞いをするかを調べたい．その為に $p \in \Gamma$ を中心として $\mathcal{F}$ に横断的な曲線 $\mathcal{T}_p$ を用意する．Γ に沿った葉層座標から得られる $\mathcal{T}_p$ の再帰写像は、局所微分同相 $f : (\mathbb{R}, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ を与える．0 における芽 f_0 を Γ に沿った $\mathcal{F}$ の**ホロノミー**と呼ぶ [5]．ホロノミー f_0 が **contraction** (resp. **expansion**) とは 0 の近傍で $|f(t)| < |t|$ $(t \neq 0)$ (resp. $|f(t)| > |t|$ $(t \neq 0)$) が成り立つときをいう．また

$$f(t) = t + O(t^{r+1})$$

となるとき、ホロノミー f_0 は $t = 0$ で C^r**-flat** と呼ぶ $(r = 1, 2, \ldots, \infty)$．$L$ の基本群の各元に対してホロノミーを取ることで準同型

$$\rho\colon \pi_1(L, p) \to \mathrm{Diff}(\mathbb{R}, 0)$$

を得る．その像は L に沿った $\mathcal{F}$ の**ホロノミー群**と呼ばれ、$\mathcal{H}(L)$ で表す．L が横断方向に有向のときは片側のホロノミーだけを考えることもある．その場合は $\mathcal{H}_+(L)$ で表す．

1.2. 具体例

この節では複素多様体内の Levi 平坦面の代表的な例を紹介する．

例 1.2 (Fibered Levi-flats)**.** 最も単純な例はファイブレーションから得られる．正則ファイブレーション $\pi : X \to \mathbb{C}$ と単純閉曲線 $\gamma \subset \mathbb{C} \backslash Critv(\pi)$ に対して、$M := \pi^{-1}(\gamma)$ は X 内の *Levi* 平坦面を定める．*Levi* 葉層 $\mathcal{F}$ は各ファイバーから成る．また複素解析族 $\mathfrak{X} \to \mathbb{C}$ に対しても同様の操作で *Levi* 平坦面を得る．

例 1.3 (Suspension Levi-flats)**.** Riemann 面 Σ 上の平坦 $\mathbb{C}P^1$ 束

$$X := \Sigma \times_\rho \mathbb{C}P^1 = \mathbb{H} \times \mathbb{C}P^1 / (z, \zeta) \sim (z \cdot \gamma, \rho(\gamma)(\zeta))$$

であって $\rho : \pi_1(\Sigma) \to \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ なるものを考える．$M := \Sigma \times_\rho \mathbb{R}P^1$ は X 内の *Levi* 平坦面となる．各葉 L は Σ の被覆空間として与えられ、複素構造も Σ から誘導される．ρ の選び方で *Levi* 葉層 $\mathcal{F}$ の力学系的性質が変化するが、それに伴って補集合 $X \backslash M$ の複素解析的な性質も変化する．葉層 $\mathcal{F}$ の複雑さと補集合 $X \backslash M$ の擬凸性が密接に関係している *[DO] (cf. [Br],[A])*．特に $g \geqq 2$ で *Fuchs* 表現 $\rho : \pi_1(\Sigma) \overset{id}{\to} \pi_1(\Sigma) < \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ のとき、$\mathcal{F}$ が測地流 *Anosov* 葉層となり、$X \backslash M = W_{\mathbb{L}} \cup W_{\mathbb{H}}$ は $W_{\mathbb{H}}$ が *Stein* 空間の改変、$W_{\mathbb{L}}$ が *Stein* 多様体となる．ここで $\mathbb{C}P^1 = \mathbb{H} \cup \mathbb{R}P^1 \cup \mathbb{L}$ と分解した．

---

[4] 葉層構造論の基本的な事柄は [CC] などを参照してほしい．

[5] Γ の p を基点とした L 内のホモトピーにのみ依存する．

例 1.4. $Y := \mathbb{C}P^2$ 上の 9 点 $P = \{p_1, \ldots, p_9\}$ とそれを通る 3次曲線 C を一つ固定する[6]. Y の 9点ブローアップを $X := B\ell_P(Y)$、C の strict transform を $\hat{C}$ で表す．自己交点数は $[\hat{C}]^2 = 0$ となる．一般論から法束 $N_{\hat{C}/X}$ の変換関数 $\{t_{jk}\}$ は U(1)-定数関数に取れる [U]. ファイバー座標 $\{\zeta_j\}$ に対して $\{|\zeta_j| = 1\}$ は貼りあって Levi平坦面を作る．Levi葉層 $\mathcal{F}$ は $\{\zeta_j = 一定\}$ で与えられる．P を固定された C の中で上手に選ぶと $N_{\hat{C}/X}$ が Picard群の中で Diophantine条件を満たすようにでき[7]、特に $\hat{C}$ が法束 $N_{\hat{C}/X}$ の零切断近傍と双正則な近傍を持つ ([Ar], [U], [Br2], [K2]). この同型を通して $\hat{C}$ の近傍にも葉層構造や Levi平坦面が誘導される．特に $\hat{C}$ の定義関数系 $\{(W_j, w_j)\}$ が存在して

$$t_{jk} w_k = w_j$$

を満たす.

例 1.5 (Reeb components)**.** 半空間 (から原点を抜いたもの)

$$\widetilde{M} = \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{R}_{\geqq 0} \setminus \{(\mathbf{0}, 0)\}$$

の商空間 $M = \widetilde{M}/(z,t) \sim (\lambda z, f(t)) \approx D^{2n-2} \times S^1$ を考える．ここで $\lambda \in \mathbb{C}$ は $|\lambda| > 1$ とし、$f : \mathbb{R}_{\geqq 0} \to \mathbb{R}_{\geqq 0}$ は拡大微分同相．M には $\widetilde{M}$ の水平葉層から誘導される複素葉層 $\mathcal{F}_{Reeb}$ が定まり、$(M, \mathcal{F}_{Reeb}, J_{\mathcal{F}})$ は Levi平坦多様体である．また $(M, \mathcal{F}_{Reeb})$ は ***Reeb*成分** と呼ばれる．構成よりコンパクト葉 ∂M は Hopf多様体 ($\approx S^{2n-3} \times S^1$) であり、その他は全て $\mathbb{C}^{n-1}$ 葉となる．∂M に沿った $\mathcal{F}$ のホロノミー群は f で生成される．つまり

$$\mathcal{H}_+(\partial M) \cong \mathbb{Z}\langle f \rangle.$$

$n = 2$ で $\lambda = \exp(2\pi)$ の場合、$\partial M \cong \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{-1})$. この M を二つ用意して、∂M に沿って写像 $z \mapsto \sqrt{-1}z$ で貼り合わせれば、Levi平坦多様体 $(S^3, \mathcal{R}, J_{\mathcal{R}})$ を得る．この葉層 $\mathcal{R}$ は S^3 の ***Reeb*葉層** と呼ばれる.

問題 1.6. Reeb成分は複素多様体に Levi平坦埋め込みできるか?

次のように埋め込みの障害があることは良く知られている.

命題 1.7. Reeb成分は Kähler多様体には Levi平坦埋め込みできない.

証明は簡単である．埋め込めたすれば、∂M は Kähler部分多様体であり $\int_{\partial M} \omega|_{\partial M}^{n-1} \neq 0$. しかし Reeb成分の定義より $[\partial M] = 0$ となり矛盾.

一方である Hopf 多様体 (non-Kähler) には Reeb 成分が存在する [Ne]. 上の構成で $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 1$ で $f(t) = \mu t, \mu \in \mathbb{R}, \mu > 1$ とすれば簡単に実現できる．この場合 ∂M に沿ったホロノミーの微係数は $f'(0) = \mu > 1$ となる．ではホロノミーが C^r-flat の場合は埋め込めるであろうか?

問題 1.8. C^r-flat Reeb成分 $(M, \mathcal{F}_{Reeb}, J_{\mathcal{F}})$ は複素多様体に Levi平坦埋め込みできるか?

Barrettの結果より部分的な解答が得られている．これが我々の研究の出発点となる.

定理 1.9 (Barrett '90 [B])**.** 3次元 C^∞-flat Reeb成分は複素曲面に Levi平坦埋め込みできない.

[6] general な P を選ぶと滑らかな 3 次曲線 C が一意的に定まる.
[7] $Pic^0(\hat{C})$ の中で全測度.

1.3. Reeb 葉層の非埋込定理

この節では Barrett の定理について解説する．まず複素多様体 X 内の Levi 平坦面 $(M, \mathcal{F})$ とその葉 L を一つ固定し、L は X に埋め込まれていると仮定する．Barrett はホロノミーの C^r-flatness から L の上田類 [8] の消滅を示した．正確には C^r-flatness から次のデータを得る．L の X における定義関数系 $\{(W_j, w_j)\}$ と L の M における (葉上定数となる) 定義関数系 $\{(\mathcal{U}_j, u_j)\}$ であって、$\mathcal{U}_j = W_j \cap M$ とする．さらに $\forall j, k$ に対して以下の条件を満たすものが存在する．

(i) $w_k - w_j = O(w_j^{r+1})$ on W_{jk},

(ii) $u_k - u_j = O(u_j^{r+1})$ on $\mathcal{U}_{jk}$,

(iii) $(\mathrm{Im}\ w_j)|_{\mathcal{U}_j} = o(|w_j|^r)$ on $\mathcal{U}_j$

(iv) $(\mathrm{Re}\ w_j)|_{\mathcal{U}_j} = u_j + o(u_j^r)$ on $\mathcal{U}_j$.

条件 (ii) はホロノミーの C^r-flatness である．条件 (iii) は Barrett-Fornaess[BF] により示された．L の局所定義関数を M に沿ってその虚部の jet を消すように帰納的に修正していくことで条件を満たすように出来る [9]．(iv) は (iii) に Cauchy の評価式と Cauchy-Riemann の関係式を使う．(ii),(iii),(iv) を合わせて (i) を得る．まとめておこう．

命題 1.10 ([B])**.** *複素多様体 X 内の Levi 平坦面 $(M, \mathcal{F})$ と埋め込まれた葉 L を取る [10]．L に沿った $\mathcal{F}$ のホロノミーが C^r-flat ならば、X における L の定義関数系 $\{(W_j, w_j)\}$ が存在して以下の条件を満たす．*

$$w_k - w_j = O(w_j^{r+1}) \ \textit{on}\ W_{jk} \quad \text{かつ} \quad d(Re\ w_j|_{\mathcal{U}_j}) \neq 0 \ \textit{on}\ \mathcal{U}_j.$$

$r \geqq 1$ のとき法束 $N_{L/X}$ は解析的に自明である．$r \geqq 2$ のとき (L, X) の $\{w_j\}$ に関する $(r-1)$ 次上田類は消滅する．特に $r = \infty$ のとき L がコンパクトならば (L, X) は infinite type となる [11]．

これを用いて Barrett は S^3 の Reeb 葉層の非埋込定理を示した．本質的には次の定理を示している．

定理 1.11 (Barrett '90 [B])**.** *3次元 Levi 平坦多様体 $(M^3, \mathcal{F}, J_{\mathcal{F}})$ に対して $\mathcal{F}$ がトーラス葉 L を持ち、$\mathcal{H}_+(L) \cong \mathbb{Z}\langle f \rangle$ を満たすとする．ここで f は C に沿った C^∞-flat contraction. このとき $(M^3, \mathcal{F}, J_{\mathcal{F}})$ は複素曲面 (X^4, J_X) に Levi 平坦埋め込みできない．*

埋め込まれる複素曲面には何の仮定もしていない所に注意してほしい．次の証明から分かるように、埋め込まれたトーラス葉近傍で話が完結している．また $J_{\mathcal{F}}$ についての条件も無い．完全に葉層の条件だけで成り立つ命題である．

(証明) $(M, \mathcal{F})$ がある複素曲面 X に埋め込めたとする．ホロノミーの C^∞-flatness より、**命題 1.10** のような定義関数系 $\{(W_j, w_j)\}$ が取れて (L, X) は infinite type となる．これでは定義関数たちが formal にしか貼りあっていないが、上田の定理 [12] より正則関数 $w : W \to \mathbb{C}$ が存在して、特に $d(\mathrm{Re}\ w|_M) \neq 0$ を満たす．ここで W 上で L に漸近す

[8] 2.1 節参照

[9] 後で触れる上田の議論 [U]、また我々の議論 [KO] においても基本的な考え方は同じである．

[10] コンパクト性は仮定しない．

[11] **定義 2.5** 参照．

[12] **定理 2.6** 参照．

る他の葉 L' に注目する．調和関数 $\mathrm{Re}\ w|_{L'}$ を考えよう．w の条件から $\mathrm{Re}\ w|_{L'} > 0$ としてよい．L' は位相的にアニュラスだが Riemann 面としての構造は幾つか可能性がある．例えば $L' \cong \mathbb{D}^*$ のときは、そのコンパクト化 $\mathbb{D}$ 上へ拡張して考えると調和関数の最大最小値原理から矛盾が起きる．他の場合も同様の矛盾が起きる．□

系 1.12 (Reeb 葉層の非埋込定理 [B])**.** *C^∞-flat Reeb 成分は複素曲面に Levi 平坦埋込みできない．特に S^3 の C^∞ Reeb 葉層は複素曲面に Levi 平坦埋込みできない．*

後に Barrett-Inaba は、複素曲面内の 3 次元 C^∞Levi 平坦面に位相的な制約があることを示した．

定理 1.13 (Barrett-Inaba'92 [BI])**.** *複素曲面内のコンパクト有向 3次元 C^∞ Levi 平坦面 $(M, \mathcal{F})$ に対して次が成り立つ．*
(1) $|\pi_1(M)| = \infty$ かつ
(2) $\pi_2(M) = 0$ または $M \approx S^2 \times S^1$

1.4. 主結果

この節では [KO] で得られた非埋め込み型定理について述べる [13]．これは Barrett の定理の高次元への拡張である．また我々の結果は、葉に含まれる楕円曲線近傍に対する結果であり、葉自身にコンパクト性を仮定しない．

定理 1.14 (Koike-O '17 [KO])**.**
5次元 Levi 平坦多様体 $(M^5, \mathcal{F}, J_{\mathcal{F}})$ が楕円曲線 C を複素部分多様体として含む葉 L を持つとしよう．さらに C の近傍 $\mathcal{U}$ が存在して、以下を満たすと仮定する．
(i) $\mathcal{H}_+(L \cap \mathcal{U}) \cong \mathbb{Z}\langle f\rangle$．ここで f は C に沿った C^∞-flat contraction.
(ii) C^∞-retraction $p\colon \mathcal{U} \to L \cap \mathcal{U}$ が存在して、各葉上では holomorphic covering map.
(iii) $C = f^{-1}(0)$ なる正則関数 $f: L \cap \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ が存在する．
このとき $(M^5, \mathcal{F}, J_{\mathcal{F}})$ は複素 3次元多様体 (X^6, J_X) に Levi 平坦埋め込みできない．

証明は 2.3 節にまわして、先に定理の応用例を幾つか紹介する．

例 1.15. 例 ***1.5*** で構成した *Reeb* 葉層 $(S^3, \mathcal{R}, J_{\mathcal{R}})$ と $\mathbb{C}$ を直積することで *5*次元 *Levi* 平坦多様体 $(S^3 \times \mathbb{C}, \mathcal{F}, J_{\mathcal{F}})$ を得る．ここで $\mathcal{F} = \{L \times \mathbb{C} \mid L \in \mathcal{R}\}$．これは定理の仮定を満たす．したがって、どの複素 *3*次元多様体 (X^6, J_X) にも埋め込めない．

例 1.16. 例 ***1.5*** で構成した *5*次元 *Reeb* 成分 $(M^5, \mathcal{F}_{Reeb}, J_{\mathcal{F}})$ を考えよう．境界葉 ∂M は *Hopf* 曲面であり、その中に楕円曲線

$$C = (\mathbb{C} \times \{0\} \times \{0\}) \backslash \{(\mathbf{0}, 0)\}/z_1 \sim \lambda z_1.$$

を含む．これも定理の仮定を満たすので複素 *3*次元多様体 (X^6, J_X) には埋め込めない [14]．

我々は Barrett-Inaba[BI] による $\mathbb{C}^2$ への Levi 平坦埋め込みの例を用いて以下の命題を得た．(ii) の構成を見ると定理 **1.14** の『C が L の複素部分多様体』という仮定が落とせないことが分かる．このような現象が 3 次元で起きるかどうかは分かっていない．

[13] 本稿では 5 次元 Levi 平坦多様体に限って説明する．設定が複雑になるが、より高い次元でも同様の定理が成り立つ．
[14] [D] も参照．

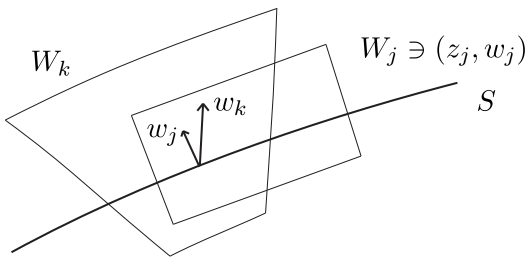
系 1.17. *次を満たす 5 次元 Levi 平坦多様体* $(M_i^5, \mathcal{F}_i, J_{\mathcal{F}_i})$ $(i = 1, 2)$ *が存在する.*
(i) $(M_1, \mathcal{F}_1, J_{\mathcal{F}_1})$ *はどの複素 3 次元多様体* (X^6, J_X) *にも埋め込めない.*
(ii) $(M_2, \mathcal{F}_2, J_{\mathcal{F}_2})$ *は* $\mathbb{C}^3$ *への埋込みを持つ.*
(iii) $(M_1, \mathcal{F}_1)$ *と* $(M_2, \mathcal{F}_2)$ *は* C^∞ *葉層多様体として同型.*

2. 上田の定理とその改良

本節ではReeb葉層の非埋込定理の証明で鍵となる上田の定理とその拡張について述べる. X を複素多様体、S を X の複素超曲面とする. 一般に S の管状近傍の複素幾何は単純ではない. 例えば法束 $N_{S/X}$ の零切断近傍と S の管状近傍は一般に双正則とは限らない. 上田は $[S]^2 = 0$ となる S の近傍の複素幾何を研究した [U]. 上田の理論は、$[S]^2 = 0$ となる S の複素近傍は "おおよそ"擬凹または擬平坦となることを主張する. 我々は後者の場合について考えてゆく (定理 **2.6**).

2.1. 上田による障害類と Jet Extension Property

以降 X は S の十分小さな近傍として話を進める. X の局所座標系 $\{(W_j; (z_j, w_j))\}$ であって w_j は $V_j = W_j \cap S$ の定義関数、$\{(V_j; z_j|_S)\}$ は S の局所座標系を定めるものとする.



変換関数が $g_{jk}(z_k, w_k) = w_j/w_k$ で与えられる X 上の線束 $\mathcal{O}_X(S)$ を考える. S へ制限することで $\mathcal{O}_X(S)|_S \cong N_{S/X}$ を得る. 必要なら $\mathcal{O}_S^*$ 倍して $g_{jk}(z_k, 0) = t_{jk}(z_k)$ としてよい. ここで $\{t_{jk}\}$ は法束 $N_{S/X}$ の変換関数. ここで我々は次を仮定する.

仮定 2.1. 法束 $N_{S/X}$ は $U(1)$-平坦. 即ち $\{t_{jk}\}$ は $U(1)$ 値定数関数とする.

特に $N_{S/X}$ は位相的に自明となる. また S に Kähler 性を仮定すれば逆も成り立つ [U]. このとき次の問題を考えよう.

問題 2.2. 線束 $\mathcal{O}_X(S)$ 上に $U(1)$-平坦構造は拡張するか? 即ち、S の定義関数系 $\{(W_j, w_j)\}$ であって

$$t_{jk} w_k = w_j$$

を満たすものが作れるか [15]?

もちろん一般には w_k の w_j による展開は高次の項を含む. この問いは S の定義関数系に対する線型化可能性問題と捉えることができる.

さて、$w_k(z_j, w_j)$ の w_j による展開を以下で表す.

$$t_{jk} w_k = \sum_{\ell=1}^{\infty} f_{jk}^{(\ell)}(z_j) \cdot w_j^\ell.$$

[15] t_{jk} は W_{jk} 上に定数関数として拡張する.

まず w_j が定義関数なので $f_{jk}^{(1)}(z_j) \equiv 1$. したがって2次以上の項が問題となる.

定義 2.3. 組 (S,X) の定義関数系 $\{(W_j, w_j)\}$ が ***type n*** とは、$\forall j,k$ に対して、

$$t_{jk}w_k = w_j + f_{jk}^{(n+1)}(z_j) \cdot w_j^{n+1} + O(w_j^{n+2})$$

となるとき、即ち、$t_{jk}w_k$ と w_j が n-*jet* で貼り合うときをいう.

type n system $\{(W_j, w_j)\}$ が存在するとき、簡単な計算から $\{(V_{jk}, f_{jk}^{(n+1)})\}$ は $N_{S/X}^{-n}$ 値の1-コサイクルを定めることが分かる. Čech コホモロジー類

$$u_n(S,X;\{w_j\}) := [\{(V_{jk}, f_{jk}^{(n+1)})\}] \in \check{H}^1(S; N_{S/X}^{-n})$$

を組 (S,X) の **(n 次) 上田類**と呼ぶ. 特にこれは type $(n+1)$ system が存在するための障害類となっている.

命題 2.4 ([U])**.** (1) $\exists$ *type* $(n+1)$ *system* $\{w_j\} \Rightarrow u_n(\{w_j\}) = 0$.
(2) $\exists$ *type* n *system* $\{w_j\}$ *s.t.* $u_n(\{w_j\}) = 0 \Rightarrow \exists$ *type* $(n+1)$ *system* $\{\widetilde{w}_j\}$.

(証明の概略) (1) は定義. (2) は仮定 $u_n(\{w_j\}) = 0$ より、$\delta\{(V_j, a_j)\} = \{(V_{jk}, f_{jk}^{(n+1)})\}$ なる0-コチェイン $\{(V_j, a_j)\}$ が存在する. これを使って $\{w_j\}$ を

$$\tilde{w}_j := w_j - a_j w_j^{n+1}$$

のように補正すれば、$\{\widetilde{w}_j\}$ は type $(n+1)$ system となることが分かる.□

定義 2.5. *(1)* (S,X) が ***type*** $n \overset{def.}{\Longleftrightarrow} \exists$ *type* n *system* $\{w_j\}$ *s.t.* $u_n(\{w_j\}) \neq 0$.
(2) (S,X) が ***infinite type*** $\overset{def.}{\Longleftrightarrow}$ $\forall n$, $\forall$ *type* n *system* $\{w_j\}$, $u_n(\{w_j\}) = 0$.

ここで上田の理論の中でも、本講演で使うものだけを紹介しておこう. 次の定理は、線型化された定義関数系が存在するための十分条件を提示している.

定理 2.6 (Ueda '83 [U])**.** S を X のコンパクト複素超曲面であって $[S]^2 = 0$ とする. (S,X) が *infinite type* かつ法束 $N_{S/X}$ が *torsion* または *Diophantine* 条件を満たすと仮定する. このとき S の定義関数系 $\{(W_j, w_j)\}$ が存在して $t_{jk}w_k = w_j$ を満たす.

さて、infinite type の定義を見ると、これを示すのはかなり困難に感じる. しかし、もし上田類の消滅 $u_n = 0$ が system の取り方に依存しないのであれば、各 $n \in \mathbb{N}$ に対して、ある type n system $\{w_j\}$ について消滅を示せば infinite type が従う. そこで、上田類の消滅が system の取り方に依存しないとき、『条件 $u_n = 0$ は **well-defined**』と呼ぶことにしよう.

上田は S がコンパクトの場合に $u_n = 0$ が well-defined であることを示している. しかし我々は、S がコンパクトでない場合についても扱いたい. [KO] では $u_n = 0$ が well-defined となるための条件について考察した. この well-definedness という問題は、線型化された定義関数系を作る際に必要となり避けては通れない.

定義 2.7 ([KO])**.** (S,X) は同じ. $\mathcal{O}_X$ で X の構造層、$\mathcal{I}_S$ で S の定義イデアル層とする. 組 (S,X) が ***Jet Extension Property (J.E.P.)*** を持つとは、$\forall n \in \mathbb{N}$ に対して制限写像

$$r_* : H^0(X; \mathcal{O}_X/\mathcal{I}_S^{n+1}) \to H^0(X; \mathcal{O}_X/\mathcal{I}_S) \cong H^0(S; \mathcal{O}_S)$$

が全射となるときをいう.

これは『S 上の任意の正則関数が n-jet で貼り合う形で近傍上に拡張する』ということを主張している．特に S がコンパクトならばJ.E.P. を満たす．

命題 2.8 (J.E.P. $\rightsquigarrow$ well-definedness)**.**
(S,X) が *J.E.P.* を満たし $t_{jk}\equiv 1$ ならば条件 $u_n=0$ は *well-defined.*

(証明の概略) 証明は二つの type n system $\{w_j\},\{w'_j\}$ があったとして、$\{w'_j\}$ を $\{w_j\}$ で展開する．これを上田類の条件を保ちつつ、低次の項から逐次修正していく．そのとき、S 上の関数をその近傍上へ拡張したものを使って修正するのだが[16]、拡張の仕方が悪いと議論が上手く進まない．十分高い jet で貼り合った形での拡張を保証するのが Jet Extension Property である．□

ではどのような状況で Jet Extension Property が成り立つだろうか．実は我々の設定とは相性がよい．証明は [KO] 参照．

命題 2.9 (C^r-flat holonomy $\rightsquigarrow$ J.E.P.)**.**
X 上の *Levi* 平坦面 $(M,\mathcal{F})$ と埋め込まれた葉 S に対して、以下の条件を仮定する．
(a) S に沿った $\mathcal{F}$ のホロノミーは C^2*-flat.*
(b) 各葉上で正則な C^∞ *retraction* $p:M\to S$ が存在する．
このとき (S,X) は *J.E.P.* を満たす．

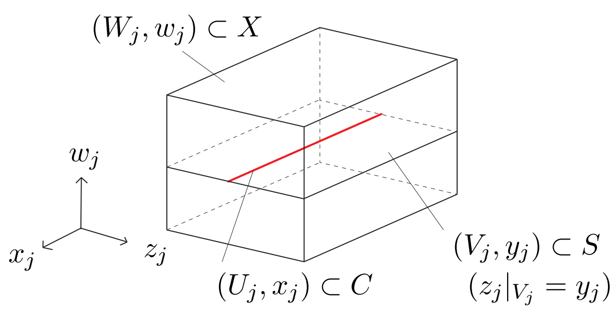
2.2. 余次元 2 上田理論

Barrett の**定理 1.11** を高次元化するには、上田の**定理 2.6** に相当するものを証明することが必要である．小池は [K] において上田理論の余次元 2 の場合への拡張を試みている．我々はそれを Levi 平坦埋め込み問題に使える形に改良した [KO]．

複素超曲面 $C\subset S\subset X$ の三つ組 (C,S,X) で、C はコンパクトを仮定する (下図)[17]．前節と同様に C の十分小さな近傍で話をする．$\{U_j\}$,$\{V_j\}$,$\{W_j\}$ で C,S,X の開被覆とする[18]．次を仮定しよう．

仮定 2.10. 法束 $(N_{C/S},\{s_{jk}\})$、法束 $(N_{S/X},\{t_{jk}\})$ は $U(1)$-平坦とする[19]．

x_j を U_j の座標、y_j を V_j における U_j の定義関数、w_j を W_j における V_j の定義関数とする．x_j,y_j を w_j と合わせて W_j の座標となるように拡張する．後で y_j の拡張の仕方を議論したいので、y_j の拡張を z_j で表す $(z_j|_{V_j}=y_j)$．必要なら $\mathcal{O}^*$ 倍して $(w_j/w_k)|_{V_{jk}}\equiv t_{jk}$ かつ $(y_j/y_k)|_{U_{jk}}\equiv s_{jk}$ として良い．



前節と同様に次の問題を考える．

[16] S がコンパクトの場合、正則関数は定数なので定数関数として拡張すればOK.
[17] S は X 内の超曲面で C は S 内の超曲面.
[18] $V_j=W_j\cap S$, $U_j=V_j\cap C$, $V_{jk}=\emptyset \iff W_{jk}=\emptyset$ を満たし、十分良い被覆とする.
[19] **命題 2.9** より我々の設定においては後者の仮定が満たされる.

問題 2.11. 線束 $\mathcal{O}_X(S)$ 上に $U(1)$-平坦構造は拡張するか？ 即ち、S の定義関数系 $\{(W_j, w_j)\}$ であって

$$t_{jk}w_k = w_j$$

を満たすものが作れるか？

小池 [K] は以上の設定のもとで上田類を定義した.

定義 2.12. 組 (C, S, X) の定義関数系 $\{(W_j, w_j)\}$ が ***type(n,m)*** とは、$\forall j, k$ に対して、

$$t_{jk}w_k = w_j + g_{jk}^{(n+1,m)}(x_j) \cdot w_j^{n+1} z_j^m + O(z_j^{m+1})w_j^{n+1} + O(w_j^{n+2})$$

となるときをいう.

type (n, m) system $\{(W_j, w_j)\}$ が存在するとき、$\{(U_{jk}, g_{jk}^{(n+1,m)})\}$ は $N_{S/X}|_C^{-n} \otimes N_{C/S}^{-m}$ 値 1-cocycle を定めている. そこでコホモロジー類

$$u_{n,m}(C, S, X; \{w_j\}) = [\{(U_{jk}, g_{jk}^{(n+1,m)})\}] \in \check{H}^1(C; N_{S/X}|_C^{-n} \otimes N_{C/S}^{-m})$$

を組 (C, S, X) の **((n, m) 次) 上田類**と呼ぶ. これは type $(n, m+1)$ system が存在するための障害となっている.

さらに [KO] では、V_j における U_j の定義関数系 $\{y_j\}$ がさらに $s_{jk}y_k = y_j$ を満たすとき、それが $\{W_j\}$ へ綺麗に拡張する為の障害も定義した.

定義 2.13. $s_{jk}y_k = y_j$ を満たす U_j の定義関数系 $\{(V_j, y_j)\}$ の ***type(n,m)*** **拡張** $\{z_j\}$ とは、$\forall j, k$ に対して $z_j|_{V_j} = y_j$ であって

$$s_{jk}z_k = z_j + q_{jk}^{(n,m)}(x_j) \cdot w_j^n z_j^m + O(z_j^{m+1})w_j^n + O(w_j^{n+1})$$

となるときをいう.

type (n, m) 拡張 $\{z_j\}$ が存在するとき $\{(U_{jk}, q_{jk}^{(n,m)})\}$ は $N_{S/X}|_C^{-n} \otimes N_{C/S}^{-m+1}$ 値 1-cocycle を定めている. そこでコホモロジー類

$$v_{n,m}(C, S, X; \{z_j\}) = [\{(U_{jk}, q_{jk}^{(n,m)})\}] \in \check{H}^1(C; N_{S/X}|_C^{-n} \otimes N_{C/S}^{-m+1})$$

を $\{y_j\}$ の **((n, m) 次) extension class** と呼ぶ. これは type $(n, m+1)$ 拡張 $\{z_j\}$ が存在するための障害となっている.

我々の問題をまとめると次のようになる.

問題 2.14 (線型化可能性問題)**.** S の定義関数系 $\{w_j\}$ と $s_{jk}y_k = y_j$ を満たす C の定義関数系 $\{y_j\}$ の拡張 $\{z_j\}$ が与えられたとき、$\{x_j\}$,$\{y_j\}$ を固定しながら、$\{w_j\}$ と $\{z_j\}$ を取り直して

$$t_{jk}w_k = w_j \text{ かつ } s_{jk}z_k = z_j$$

を満たすようにできるか？

定義 2.15. *(1)* (C, S, X) が ***infinite type*** $\overset{def.}{\Longleftrightarrow}$ $\forall n, m, \forall$*type*(n, m) *system* $\{w_j\}$,

$$u_{n,m}(C, S, X; \{w_j\}) = 0.$$

(2) $\{y_j\}$ が ***extension type infinity*** $\overset{def.}{\Longleftrightarrow}$ $\forall n, m, \forall$*type*(n, m) 拡張 $\{z_j\}$,

$$v_{n,m}(C, S, X; \{z_j\}) = 0.$$

前節でも述べたように、infinite type や extension type infinity という条件を示すのは一般に困難である．しかし 障害類消滅の well-definedness が保証されていれば、示すのはずっと楽になる．障害類 $u_{n,m}$,$v_{n,m}$ の well-definedness についても同様の命題が成り立つ．証明は [KO] 参照.

命題 2.16 (J.E.P. $\rightsquigarrow$ well-definedness)**.**
(1) (S,X) が *J.E.P.* を満たし $t_{jk} \equiv 1$ ならば $u_{n,m}(C,S,X)=0$ は *well-defined.*
(2) (S,X) が *J.E.P.* を満たし $t_{jk} \equiv 1, s_{jk} \equiv 1$ ならば $v_{n,m}(C,S,X)=0$ は *well-defined.*

2.3. 証明の概略

最後に**主定理 1.14** の証明の方針を説明する．基本的な戦略は**定理 1.11** の証明と同じである．証明には上田の**定理 2.6** に相当する次の命題が必要である．

命題 2.17. (C,S,X)*,* $\{U_j\},\{V_j\},\{W_j\}$*,* $\{x_j\},\{y_j\},\{z_j\},\{w_j\}$ *などは今までと同じ.*
以下の条件を仮定する.
(1) 法束 $N_{S/X}$ は $U(1)$*-平坦かつ torsion.*
(2) S 上 C の定義関数 $f : S \to \mathbb{C}$ が存在する*.*
(3) (C,S,X) は *infinite type* かつ $f=\{f|_{V_j}\}$ は *extension type infinity.*
このとき S の定義関数系 $\{w_j\}$ と $f=\{f|_{V_j}\}$ の拡張 $\{z_j\}$ が存在して

$$t_{jk}w_k = w_j \text{ かつ } s_{jk}z_k = z_j$$

を満たす*.*

(命題 **2.17** の証明の概略)

$$\begin{tikzcd}
W_j \arrow[r, "{t_{jk}w_k \,=\, w_j+\cdots,\quad s_{jk}z_k \,=\, z_j+\cdots}"] & W_k \\
W_j \arrow[u, "\Phi_j"] \arrow[r, "{t_{jk}v_k \,=\, v_j,\quad s_{jk}\zeta_k \,=\, \zeta_j}"] & W_k \arrow[u, "\Phi_k"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{pmatrix} w_j \\ z_j \end{pmatrix} = \Phi_j(v_j,\zeta_j,x_j) = \begin{pmatrix} v_j \\ \zeta_j \end{pmatrix} + \sum_{\nu=2}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty} \begin{pmatrix} G_j^{(\nu,\mu)}(x_j) \\ Q_j^{(\nu,\mu)}(x_j) \end{pmatrix} \cdot v_j^{\nu}\zeta_j^{\mu}$$

与えられた system$(\{w_j\},\{z_j\})$ を別の system$(\{v_j\},\{\zeta_j\})\})$ による展開式を考える．満たすべき条件 (可換図式や線型条件 $t_{jk}v_k = v_j, s_{jk}\zeta_k = \zeta_j$ など) から $G_j^{(\nu,\mu)}(x_j), Q_j^{(\nu,\mu)}(x_j)$ が定まれば、逆にこの関数方程式を解くことで線型化された system $\{v_j\},\{\zeta_j\}$ を得る.

しかし実際に正則関数 $\{v_j\},\{\zeta_j\}$ の存在をいうためには、係数 $G_j^{(\nu,\mu)}(x_j), Q_j^{(\nu,\mu)}(x_j)$ を適切に選ぶ必要がある．各障害類が消滅することを用いて係数を適切に定め、関数方程式を解くことで、より高次の jet で貼り合う system が手に入る．$\{w_j\}$, $\{z_j\}$ をこの新しい system に取り替えて同様の議論を繰り返す．帰納法を回す際の注意点は (a) 綺麗にした低次の項に寄与しないこと、(b) 右辺の無限級数が正の収束半径を持つように係数を評価することである．(b) に (i) の条件と C のコンパクト性を使う．これらをクリアすれば、最後は逆関数定理から線型化された system$\{v_j\},\{\zeta_j\}$ を得る．□

この証明を見ると $\{v_j\}, \{\zeta_j\}$ を手に入れるために、system を何度も取り替えている．(3) の条件からどの system に対しても障害類の消滅が保証されている所がポイントである．

(**定理 1.14** の証明の概略) 埋め込まれたとする．(i),(ii) と**命題 2.9** から Jet Extension Property が導かれる．(i),(iii) から $t_{jk} \equiv 1, s_{jk} \equiv 1$ が分かる [20]．さらに**命題 2.16** より障害類の well-definedness が分かる．(i),(iii), J.E.P. と well-definedness を合わせて (C, S, X) が infinite type、f が extension type infinity であることが従う．これで**命題 2.17** を使うことができる．S の定義関数 $w : W \to \mathbb{C}$ が存在して、特に $d(\mathrm{Re}\ w|_M) \neq 0$ を満たすように取れる．残りは**命題 1.11** の証明と同様にして矛盾が出る．□

参考文献

[A] M. Adachi, On the ampleness of positive CR line bundles over Levi-flat manifolds. Publ. Res. Inst. Math. Sci. 50 (2014), 153-167.

[AB] M. Adachi, J. Brinkschulte, Curvature restrictions for Levi-flat real hypersurfaces in complex projective planes, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **65** (2015), no. 6, 2547–2569.

[Ar] V. I. Arnol'd, Bifurcations of invariant manifolds of differential equations and normal forms in neighborhoods of elliptic curves, Funkcional Anal. i Prilozen., 10-4 (1976), 1-12 (English translation : Functional Anal. Appl., 10-4 (1977), 249-257).

[B] D. E. Barrett, Complex analytic realization of Reeb's foliation of S^3, Math. Z., **203** (1990), 355–361.

[BF] D. E. Barrett, J. -E. Fornæss, On the smoothness of Levi-foliations. Publ. Mat., **32** (1988), 171–177.

[BI] D. E. Barrett, T. Inaba, On the Topology of Compact Smooth Three-Dimensional Levi-Flat Hypersurfaces, J. Geom. Anal., **2** (1992), no. 6, 489–497.

[Br] M. Brunella, On the dynamics of codimension one holomorphic foliations with ample normal bundle, Indiana. Univ. Math. J. **57** (2008), 3101–3113.

[Br2] M. Brunella, On Kähler surfaces with semipositive Ricci curvature. Riv. Math. Univ. Parma (N.S.) 1 (2010), no. 2, 441-450.

[BLM] C. Bonatti, R. Langevin, R. Moussu, Feuilletages de CP(n): de l'holonomie hyperbolique pour les minimaux exceptionnels. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. **75** (1992), 123–134.

[C] D. Cerveau, Minimaux des feuilletages algébriques de $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$, Ann. Inst. Fourier **43**, 1535–1543 (1993).

[CC] A. Candel, L. Conlon, Foliations I and II, American Mathematical Society, 2003.

[CLS] C. Camacho, A. Lins Neto, P. Sad, Minimal sets of foliations on complex projective spaces, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. **68** (1988), 187–203.

[D] G. Della Sala, Non-embeddability of certain classes of Levi flat manifolds, Osaka J. Math. **51** (2014), 161–169.

[De] B. Deroin, Hypersurfaces Levi-plates immergées dans les surfaces complexes de courbure positive, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **337** (2003), no.12, 777–780.

[DO] K. Diederich, T. Ohsawa, Harmonic mappings and disc bundles over compact Kähler manifolds. Publ. Res. Inst. Math. Sci. 21 (1985), 819-833.

[K] T. Koike, Toward a higher codimensional Ueda theory, Math. Z., Volume 281, Issue 3 (2015), 967–991.

[K2] T. Koike, Complex K3 surfaces containing Levi-flat hypersurfaces, arXiv:1703.03663.

[20] 簡単のため f が C の定義関数の場合のみ扱う．

[KO] T. Koike, N.Ogawa, Local Criteria for Non-Embeddability of Levi-Flat Manifolds, to appear in J. Geom. Anal.

[LN] A. Lins-Neto, A note on projective Levi flats and minimal sets of algebraic foliations, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **49** (1999), 1369–1385.

[Ne] S. Nemirovski, Stein domains with Levi-flat boundaries in compact complex surfaces, Math. Notes **66** (1999), 522–525.

[Oh1] T. Ohsawa, Levi flat hypersurfaces in complex manifolds, Complex analysis and digital geometry, Acta Univ. Upsaliensis Skr. Uppsala Univ. C Organ. Hist., **86**, Uppsala Universitet, Uppsala, (2009), 223–231

[Oh2] T. Ohsawa, A survey on Levi flat hypersurfaces, Complex Geometry and Dynamics Volume 10 of the series Abel Symposia, 211–225.

[Oh3] T. Ohsawa, Nonexistence of certain Levi flat hypersurfaces in Kähler manifolds from the viewpoint of positive normal bundles, Publ. RIMS Kyoto Univ. **49** (2013), 229–239.

[Si] Y. Siu, Nonexistence of smooth Levi-flat hypersurfaces in complex projective spaces of dimension ≥ 3, Ann. of Math. (2) **151** (2000), no. 3, 1217–1243.

[U] T. Ueda, On the neighborhood of a compact complex curve with topologically trivial normal bundle, J. Math. Kyoto Univ., **22** (1983), 583–607.