# 4次元多様体とLefschetzファイバー空間

松本 幸夫 (学習院大学理学部)*

## 1. はじめに.

「4次元多様体とLefschetzファイバー空間」というお題をいただきましたが，4次元多様体論にしてもLefschetzファイバー空間にしても，最近の動きは活発過ぎて，それらをサーベイすることはとても私の能力の及ぶところではありません.「思い出話」に堕するリスクを覚悟の上で，これらの話題が始まったころの話をさせていただきたいと思います.

なお，遠藤久顕氏によるLefschetzファイバー空間の詳しい解説[12]が雑誌「数学」第６９巻２号に出版されましたので，ぜひご覧ください．遠藤氏の記事には最近の発展についても詳しく書かれています.

## 2. 微分トポロジー.

１９５０年代と６０年代に大発展した**微分トポロジー**は主に高次元（５次元以上）の微分可能多様体を扱うものだった.「コボルディズム理論」「符号数定理」「異種球面」「$h$-コボルディズム定理」「手術理論」など，本質的で重要な理論を含む微分トポロジーであるが，高次元微分トポロジーが議論されることは，現在では殆どなくなったので，次第に忘れ去られて行くのではないかとやや心配になる．微分トポロジーは高次元の微分可能多様体の「かたち」を理解するための主要な理論であることに変わりはない．微分トポロジーが忘れられてしまうことは，大きな知的損失だと思う．しかし，幸いなことに，いくつかの教科書があり，いつでも勉強できるようにはなっている．初等的な入門書として，J. Milnor の本[47], [48], まとまった教科書として M. W. Hirsch, "Differential Topology"[22], [23], 田村一郎「微分位相幾何学」[65], また最近では C. T. C. Wall "Differential Topology"[69] が出版された．最近，松本堯生氏が微分トポロジーの歴史的なサーベイを書かれている[45].

1960年代には，微分トポロジーとは別に，PL多様体（Piecewise Linear Manifolds）を研究する**PLトポロジー**が発展中で，独自の手法で活発に研究されていた．日本では加藤十吉氏がPLトポロジーの若き旗手だった．非常に魅力的な分野に思われた．当時は微分トポロジーとPLトポロジーは二つの違う分野と考えられていたが，1960年代の半ばごろから，多様体を研究する幾何学的トポロジー(Geometric Topology)という分野の異なる二つの側面として意識されるようになった．なお,「幾何学的トポロジー」はホモトピー論を中心とする「代数的トポロジー」と区別する言葉として，このころから使われるようになったと思う．6次元以下では微分トポロジーとPLトポロジーに本質的な差異はなく，7次元以上で「異種球面」で記述される差が現れる.

3次元以下の多様体の研究も本間龍雄先生やC. D. Papakyriakopoulosの証明した「Dehnの補題」を主要な道具とする研究が行われていた．高次元トポロジーとの交流はあまりなく，結び目理論との結びつきが強かったと思う.

本研究は科研費（課題番号：26400095）の助成を受けたものである

* 〒171-8588 東京都豊島区目白1-5-1 学習院大学理学部数学科
e-mail: yukiomat@math.gakushuin.ac.jp

W. Thurston による 3 次元トポロジーの大発展が始まるのは 1970 年代の半ばごろからである．

## 3. 4次元多様体.

高次元と 3 次元以下のはざまにあって，4 次元多様体の研究は殆ど進んでいなかった．1960 年代までの 4 次元多様体に関する結果は「ロホリンの定理」「ミルナーの定理」「ウォールの定理」が主なものであったと思う．

**ロホリンの定理** [57] 向き付られた 4 次元の微分可能閉多様体 $M$ がスピン構造を持てば（第 2 Stiefel-Whitney 類 $w_2 = 0$ であれば），その符号数 $\sigma(M)$ は 16 で割り切れる．

**ミルナーの定理** [46] 向き付られた単連結 4 次元閉多様体の向きを込めたホモトピー型はカップ積 $\cup : H^2(M;\mathbb{Z}) \times H^2(M;\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$ によって決まる．

**ウォールの定理** [68] 向き付けられた単連結 4 次元の微分可能閉多様体 $M_1$ と $M_2$ がホモトピー同値であれば，それらは $h$-コボルダントである．また，ある自然数 $k$ について $M_1\#k(S^2 \times S^2) \cong M_2\#k(S^2 \times S^2)$ （微分同相）が成り立つ．

高次元微分トポロジーが華やかなりし頃は，4 次元多様体は例外的な領域と見なされていたので，とくに研究者に強く意識されることはなかったが，60 年代の後半に高次元トポロジーの中にもチラホラ 4 次元多様体の影が見えるようになった．そのはじめは D. サリヴァンの博士論文（プリンストン大）[62][63] である．サリヴァンは単連結高次元多様体の手術理論を使い，2 つの PL 多様体 $L$ と $M$ の間にホモトピー同値写像 $h : L \to M$ があるとき，これが PL 同相にホモトピックになるか，という問題を考えた．そこで開発した $F/PL$-バンドル理論を応用して，次の形で「基本予想」を解いた．

**定理.** 6 次元以上の単連結 PL 多様体（境界の各連結成分も単連結と仮定する）の間に同相写像 $h : (L, \partial L) \to (M.\partial M)$ があるとき，もし $H_3(M;\mathbb{Z})$ が位数 2 の元を含まなければ，$h$ は PL 同相にホモトピックである．

この定理は当時の一般的なトポロジーの水準をはるかに越えるものであった．

サリヴァンの議論は分かり難いが，$H_3(M, \mathbb{Z})$ の中の位数 2 の元はロホリンの定理に由来するものである．しかし，この段階ではロホリンの定理がそれほど本質的な定理とは捉えられていなかった様に思われる．(サリヴァンの論文にはロホリンの論文が引用されていない.)

ロホリンの定理が本質的なものであると認識されたのは，1969 年に R. カービーと L. C. ジーベンマンにより「高次元 PL 多様体に関する基本予想」が完全解決されてからではなかったろうか．

**カービー・ジーベンマンの定理** [33], [34] （簡単のため，閉じた多様体について結果を述べる）(I) 5 次元以上の閉じた位相多様体 $M$ に PL 多様体の構造が入るための唯一の障害類が $H^4(M;\mathbb{Z}_2)$ のなかに存在する．(II) 5 次元以上の閉じた多様体 $M$ に PL 多様体の構造が二つあるとき，これらがアイソトピーで移りあうための唯一の障害が $H^3(M;\mathbb{Z}_2)$ に存在する．

ここに現れる $\mathbb{Z}_2$ という係数は W. C. シアンと J. L. シャネソンによるフェイクトーラス（$n$ 次元トーラスと同じホモトピー型をもつ $n$ 次元 PL 多様体）の分類定理 [24] を経由して現れるが，シアン・シャネソンの定理の証明にはロホリンの定理が効いている．結局，ロホリンの定理は 4 次元多様体の定理でありながら，高次元多様体の位相構造と PL 構造の差を記述するときに本質的な役割を果たすものであることが分かる．

ジーベンマンは，ロホリンの定理を使って，低次元の$s$-コボルディズム定理が4次元または5次元では成り立たないことを示している[59]．ドナルドソンがゲージ理論を応用して5次元の$h$-コボルディズム定理（4次元多様体の間の$h$-コボルディズム定理）が成り立たないことを示したのはこれから15年以上たってからである[9], [10].

高次元位相多様体の三角形分割問題とロホリンの定理のかかわりを示す「おもちゃのモデル」を紹介しよう．これはジーベンマン[60]により（当時未解決だった「2重懸垂問題」が成り立つようなホモロジー3球面が存在すると仮定して）構成されている．J. W. キャノンによって「2重懸垂問題」が解決された後に，私も[37]のなか（p.172）で簡単に紹介した.

まず，$E_8$-プランビングで得られるコンパクト単連結な4次元微分可能多様体$P$を考える．$P$にはスピン構造が入り，しかもその符号数$\sigma(P) = \pm 8$である．この境界$M^3$はいわゆる「ポアンカレのホモロジー3球面」である．$M^3$の錐（cone）$c(M^3)$をつくり，$c(M^3)$と$P$とを$M^3$にそって貼りあわせる．そうすると$X^4 = c(M^3) \cup P$は4次元のホモロジー多様体になる.（$c(M^3)$の頂点$p$が特異点であるので，$X^4$はPL多様体ではない.）$X^4$と円周との積

$$S^1 \times X^4$$

をつくる．この直積は殆ど位相多様体であるが，$c(M^3)$の特異点$p$と円周の直積$S^1 \times \{p\}$の近傍で位相多様体の構造が入るか心配である．ところが，キャノン[5]によって，実はこの近傍には位相多様体の構造が入ること（「2重懸垂問題」の解決）が証明されたので，$S^1 \times X^4$は5次元位相多様体であることがわかる．しかし，**$S^1 \times X^4$はPL多様体として三角形分割できない**．なぜなら，もし$S^1 \times X^4$がPL多様体として三角形分割できるとすると，PLトポロジーの標準的な議論で，$S^1$方向に横断的な閉じた4次元PL部分多様体$L^4$が$S^1 \times X^4$の中に見出せるが，$L^4$は$X^4$と同様にスピン構造をもっており，しかもその符号数$\sigma(L^4) = \pm 8$である．これはロホリンの定理に矛盾してしまう．したがって位相多様体$S^1 \times X^4$はPL多様体として三角形分割できない.

しかし，構成から，$S^1 \times X^4$は単体的な複体に分割されている．ジーベンマン[60]は全ての位相多様体が（たとえPL多様体に分割されなくとも）単体的複体に分割できるかを問題にした．この問題に答えたのが松本堯生氏の博士論文[43], [44]とD. E. ガレフスキー・R. J. スターン[17], [18]である．彼らの結論の一つに，ポアンカレホモロジー3球面のように，符号数8のスピン4次元多様体の境界になっているホモロジー3球面$H^3$であって，自分自身との連結和$H^3 \# H^3$がアサイクリック4次元PL多様体[1]$W^4$の境界になるようなもの$H^3$が存在すれば，全ての高次元位相多様体は単体的複体に分割可能であり，かつ逆も成り立つ，という定理がある．最近，C. マノレスク[35]により，そのようなホモロジー3球面が存在しないことが証明されたので，高次元位相多様体であって単体複体に分割できないものが存在することが確定した[2].

---

[1] 多様体$W$がアサイクリック（acyclic）であるとは，連結であり，かつ1次元以上の全てのホモロジー群が0になることである.

[2] ペレルマンによるポアンカレ予想の解決とフリードマンの観察（[15], Cor.1.6）を合わせると，4次元の単連結閉位相多様体で，単体複体に分割可能でないものが存在することがわかる．これについては[37]の「増補新版」（2009年）または「新版」（2016年）のp.248をご覧ください.

## 4. ファイバー構造をもつ4次元多様体

以上は，1970 年代後半までの話である．70 年代には多くの研究者の目が4次元多様体に向けられていった．とくに「驚嘆すべき」結果はないように思われたが，後から考えるとA. キャッソン[6]による「**キャッソンハンドル**」の構成が静かに変革を準備していたことになる．これは後にM. H. フリードマン[15]の4次元ポアンカレ予想の解決（位相的カテゴリーにおける）につながるものであった．またもう一つ，R. カービーによるいわゆる「**カービー・カルキュラス**」の創始[32]があった．当時はすぐに重要性が認識できなかったが，後年の4次元多様体論の発展を基礎づけるものになった．カービーの論文が出てからすぐにS. アクブルトの活躍が始まった[3]．彼やカービーの書く論文はカービー図式満載であったので，それまで文章中心の「お堅い」イメージだった数学論文の「見てくれ」が一変したような印象だった．

1970 年代の終わりごろ，私が気になったのは，4次元多様体を研究しよう（4次元の微分トポロジーを作ろう！）と言っても，4次元の微分可能多様体の例をほとんど知らないという事実であった．例として出てくるのは，複素射影平面$\mathbb{C}P^2$，$S^2 \times S^2$，$S^2 \tilde{\times} S^2$，K3曲面，くらいなものであった．もちろん複素曲面の例は無数にあるが，それらがトポロジーの手法ですぐに理解できると思えなかった．また，カービー・カルキュラスを使えば，いくらでもコンパクトな4次元ハンドル体の例は出来るが，それらは皆，境界のある4次元多様体であった[3]．当時,「**閉じた4次元多様体は人間が作れるようなものではなくて，いつも向こうからやってくるものだ**」という印象を持った．そこで，トポロジカルな手法で理解可能な**4次元閉多様体**の例を沢山得る方法として，閉曲面を底空間として別の閉曲面をファイバーとする**ファイバー構造**をもつ4次元多様体を調べてみようと思った．もちろん単なるファイバーバンドルでは面白くないので，有限個の特異ファイバーを許すものを考える．その頃のいくつかの結果を紹介させていただきたい．

**トーラスファイバー空間.** まずファイバーが**トーラス**の場合を調べてみた．ファイバーをトーラスにしたのは，3次元多様体で重要なザイフェルト・ファイバー空間の4次元でのアナロジーを狙ったことと，複素曲面論で重要な楕円曲面を頭に置いたことが理由である．トポロジカルに特異ファイバーをどう定義するか？で悩み，いろいろと工夫したが（例えば[38]），今では，結局，各ファイバーの近傍に複素構造が入り，プロジェクションがその近傍で複素解析的になっているという定義（[20]，p.404で*locally holomorphic*と呼んでいる状況に近い）が一番すっきりしていると思っている．ただし，ファイバーの近傍は$C^\infty$写像で貼り合わされているとする.（応用範囲を広げるため，この$C^\infty$写像は必ずしも複素構造から決まる「向き」を保たなくてもよいとする.）つまり，局所的に複素ファイバー空間またはその「向き」を変えたファイバー空間になっているものを$C^\infty$写像で貼りあわせたようなファイバー空間を考えるわけである．

始めに考えたのは，最も基本的な4次元多様体，すなわち4次元球面$S^4$にこのようなトーラスファイバー空間の構造が入るかということであった．これはいろいろ考えて，結局，J. M. モンテシノスのツインという構造[52]を使うと，ツイン$Tw$という特異ファイバーを1本もつ$S^2$上のトーラスファイバー空間$S^4 \to S^2$の構造が入ることが

[3]とはいえ，モンテシノスの定理[51]によれば4次元閉多様体の微分同相類は2ハンドル以下のハンドルのアッタチングによって決まる．2ハンドルまでのアタッチングはカービー図式で完全に描けるものなので，カービー・カルキュラスは閉じた4次元多様体の研究にも有効である．

分かったので，自分の講義のときに説明した．それを深谷賢治氏（当時大学院生）が聴いていて，ホップ・ファイブレーションを使ってもっと簡単に構成できることを教えてくれた．この構成は私の論文 [38] で,「深谷による構成」として紹介したが，次のようなものである：

まず，ホップ・ファイブレーション $h : S^3 \to S^2$ をとり，そのサスペンション $\Sigma h : \Sigma S^3 \to \Sigma S^2$ を考える．$\Sigma S^3 = S^4$, $\Sigma S^2 = S^3$ に注意して，

$$\Sigma h : S^4 \to S^3 \quad \text{と} \quad h : S^3 \to S^2$$

の合成

$$h \circ \Sigma h : S^4 \to S^2$$

を考えると，これがトーラスファイバー空間になる．$\Sigma S^2$ と $S^3$ を同一視するとき，$\Sigma S^2$ の 2 つの懸垂の頂点がホップ・ファイブレーションの同一のファイバー上に乗っていれば，私の構成したツイン特異ファイバー 1 本のトーラスファイバー空間になるし，2 つの懸垂頂点がホップ・ファイブレーションの異なる 2 本のファイバー上にあるとき（こちらのほうが一般的）は，トーラス上の 1 本のメリディアンを 1 点につぶした特異ファイバー（小平の $I_1$ 型）を 2 本持つトーラスファイバー空間になる．ただし，自己交叉の符号は一方はプラスで他方がマイナスになる．あとで（1990 年代に）Lefschetz ファイバー空間を考えたとき [41]，この例のように異なる自己交叉の符号を持つような Lefschetz ファイバー空間を**アキラルな Lefschetz ファイバー空間**と名付けたが，このトーラスファイバー空間 $S^4 \to S^2$ は一番初めにアキラルなファイバー空間に遭遇した例である．またここには，1 本のツイン特異ファイバー $Tw$ が 2 本の簡単な特異ファイバー（$I_1^+$ と $I_1^-$）に分裂する現象も現れている．

4 次元球面 $S^4$ に入るトーラスファイバー空間 $S^4 \to S^2$ は，基本的な例とはいえ，まあそれだけのものと思っていたら，ごく最近，A. J. ディスカラ，粕谷直彦，D. ズッダス 3 人の共著論文 [7] で，このファイバー空間を使って，$\mathbb{R}^4$ の上にケーラーでないような複素構造が構成された．こんな素晴らしい応用があることを知って，つくづく「生きていてよかった」と思った．

**楕円曲面．** トーラスファイバー空間のうち，最も分かりたかったのは小平先生の複素曲面論に現れる「楕円曲面」である．これはリーマン面の上の，ファイバーが「複素楕円曲線」（つまりトーラス）になっているようなトーラスファイバー空間の構造を持つ 4 次元多様体である．楕円曲面のトポロジーに関する先行結果として，A. カス [31] と B. モイシェゾン [50] があった．彼らは 2 次元球面 $S^2$ を底空間とする楕円曲面を考えていたが，彼らの結果を底空間が一般のリーマン面の場合に拡張しようと思った．自分が証明したなかで一番難しかった定理のような気がするが，とにかく最終的には次の結果が証明できた：

**定理** [39] 多重ファイバーを持たない楕円曲面が二つあって，それらの底空間の種数が等しく，全空間のオイラー標数が等しければその二つの楕円曲面の全空間は向きを保って微分同相である．

「多重ファイバー」は小平の分類表で ${}_mI_b,\ m \geqq 2$ と書かれる特異ファイバーのことである．多重ファイバー以外の種数 1 特異ファイバーは，すべて種数 1 の Lefschetz 型特異ファイバーに分裂させられることがカス [31] やモイシェゾン [50] により証明され

ているので，結局，上の定理は底空間が一般の閉リーマン面の場合に，ファイバーの種数が1のLefschetz ファイバー空間の分類定理を得たのと同じことである．

多重ファイバーがある場合には，上正明氏が次の定理を証明した：(述べ方を少し簡略化した．)

定理 [66] 多重ファイバーが3本以上ある場合には，楕円曲面の全空間の微分同相類は全空間のホモトピー型で決まる．

これらの定理が証明された直後[4]，ドナルドソン [9] により，多重ファイバーを2本もつ$S^2$上の楕円曲面で，同相であるが微分同相でないものがある（有理楕円曲面と飯高・ドルガチェフ曲面: [25], Remark A 参照）ということが証明されて，我々の結果とドナルドソンの結果とはうまく補い合うものとなった．

モイシェゾン [50] で，任意の多重ファイバーはLefschetz型の特異ファイバーと「多重トーラス[5]」に分裂することが証明されているので，上氏 [66] の扱った楕円曲面は，Lefschetz型の特異ファイバーと多重トーラスを含むものであった．Lefschetz型以外の特異ファイバーを理論に取り込む重要性が示唆されていると思う．

４次元では微分同相とPL同相に本質的な差はないので，ドナルドソンは，有理楕円曲面と飯高・ドルガチェフ曲面は同相であるがPL同相でないことを証明したことになる．つまり，閉じた４次元多様体に関する「基本予想」は成り立たない[6]．５次元以上の多様体についての基本予想は「ロホリンの定理」で破れるが，４次元多様体の基本予想は（ロホリンの定理でなく）「ゲージ理論」によって破れるということになる．なお，３次元以下の多様体については，基本予想は成立する（E. モイズ [49]）．「基本予想」については，例えば [42] をご覧ください．

## 5. Lefschetzファイバー空間

ファイバーの種数が1のときのLefschetz ファイバー空間がよく分かったと思ったので，ファイバーの種数が2の場合を考えようと思って書いたのが論文 [41] である．この論文は題名からも分かるように，種数１で成功した分類定理を種数２でも完成させようという意気込みで始めたものであるが，結局，難しすぎて成功せず，未完成のままその時点までに分かった結果を纏めたものである．当初解決を目指した予想は，もし底空間が球面$S^2$で，特異ファイバーが全て非分離的ならば（つまり，特異ファイバーの周りの「消滅サイクル」が非分離的であれば），そのような種数２のLefschetz ファイバー空間はこの論文に挙げてあるExamples A, C, D という３つのLefschetz ファイバー空間のファイバー和になるであろう，というものであった．(後年,「超楕円的なLefschetz ファイバー空間についてのジーベルト・ティアンの予想」[61] と呼ばれるようになった予想の種数２の場合であった．)

種数１の Lefschetz ファイバー空間を分類するときの方法は「モノドロミー・カルキュラス」である（[31], [50], [39]）．つまり，底空間に１点$p_0$を定め，その点を起点とする（特異ファイバーの足を通らないような）ループ達に沿ったモノドロミーを考え

---

[4] 上氏と私の論文はともに1986年に出版されていて，ドナルドソンの論文（1985年）の後だったように見えるが，我々が定理を証明したのはドナルドソンの論文が出る前だった．

[5] 中心にある１本の滑らかなトーラスに，周りのトーラスが何回か巻き付いてゆくような場合，中心のトーラスは滑らかでありながら特異ファイバーとなる．「多重トーラス」と呼ばれる特異ファイバーである．

[6] ドナルドソンの基本定理 [8] が出たとき，ほとんど同時に「エキゾチック$\mathbb{R}^4$」の存在が分かったので，非コンパクト４次元多様体について基本予想が成り立たないことは知られていた

る．そして，うまいループを選びつつ，モノドロミーの形をできるだけ簡単にして行く．最後に,「標準形」に到達すれば，ファイバー空間の分類が完成するという方針である．種数1の場合は，モノドロミーの値は群 $SL(2,\mathbb{Z})$ に属する．この群を中心 $\{\pm 1\}$ で割って $PSL(2,\mathbb{Z})$ にすれば，

$$PSL(2,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$$

が知られているので，このような扱いやすい群のなかでのモノドロミー・カルキュラスを行えばよくて，結局この方法で標準形に到達する．

種数2の場合，モノドロミーの値が属するのは種数2の写像類群 $\Gamma_2$ である．この構造は知られているものの，種数1の場合に比べて格段に複雑であり，そこでモノドロミー・カルキュラスを行うのは極めて難しい．というわけで，種数2のLefschetzファイバー空間の分類はまだ出来ていない．

個人的に期待を寄せているのは，鎌田聖一氏の開発した**チャート理論**である．これは曲面結び目を表示する理論として創始されたが（[26], [27]），その後モノドロミー表現にも使えるようになった[28]. とくに驚いたのは，この理論を種数1のLefschetzファイバー空間に応用すると,（あんなに難しいと思った）分類定理がほとんど半ページで証明できてしまうことである[30]. チャートは底空間の曲面に描いた「向きとラベルの付いたグラフ」である.（ラベルはある群 $G$ の生成元に対応している.）曲面上のループがこのグラフを横切るごとに交わりの符号と横切ったチャートに付いていたラベルを読み取って，群 $G$ の元を得る．こうして，ループに沿うモノドロミーが読み取れることになる．チャートはいわば「**モノドロミーの双対**」である．モノドロミー・カルキュラスの場合には，原点 $p_0$ に陣取って，モノドロミーを「定点観測」したのだが，チャート理論では，底空間にモノドロミーの双対の絵を描くわけだから，モノドロミーの大域的な様子が目で見えるようになる．いわば地図を描いて調べるのに似ている．

チャート理論にはモノドロミーの様子を変えずにチャートを変えるいくつかの「変形」操作が組み込まれていて，この変形を使ってチャートを簡単にして行く．最終的に「標準的な」チャートにたどりつけば，Lefschetzファイバー空間の分類が完成する．

Lefschetzファイバー空間の分類はモノドロミー・カルキュラスよりもチャート理論を使ったほうが原理的に簡単になりそうなことは分かるが，しかし，実際にやってみると，チャート理論を使っても，種数2のLefschetzファイバー空間の完全分類は難しい．何が難しいかと言うと，どんな変形をどんなタイミングで行うかという「チャートの組み合わせ理論」が難しい．永瀬輝男氏と志摩亜希子氏は一連の共同研究（[53], [54], ...）で,（曲面結び目理論への応用を目指して）チャート理論の組み合わせ論を展開している．彼らの扱うチャートのターゲットになる群は古典的なブレイド群であるが，チャート理論の組み合わせ論の本質的な内容が現れている．理論が十分に発展すれば，Lefschetzファイバー空間への応用も期待できるのではないだろうか．

なお，現在でも，Lefschetzファイバー空間の「(ある標準的なLefschetzファイバー空間とのファイバー和による）**安定化**を経由した分類」はチャート理論を使って可能である（[29], [13], [14].）

個人的な感想としては，種数2のLefschetzファイブレーションの分類を目指した論文[41]を書いたことは幸運だった．この論文が出た直後に，R. ゴンプ[20] が「Lefschetzファイバー空間 $M \to \Sigma$ において，ファイバーの属する（$\mathbb{R}$ 係数）ホモロジー類が全空

間 $M$ の中で 0 でなければ[7]，全空間 $M$ にはシンプレクティック多様体の構造が入る」ことを証明し[8]（[20] p.401)，またドナルドソン [11] が「任意のシンプレクティック 4 次元多様体には Lefschetz ペンシルの構造が入る（したがって，それを何回かブロウ・アップすると Lefschetz ファイバー空間の構造が入る)」ことを証明したので，Lefschetz ファイバー空間はほぼシンプレクティック 4 次元多様体の下部構造であることが判明し，それによって Lefschetz ファイバー空間への注目度が一気に上がったことである．それと関連するかどうかわからないが，私の論文 [41] で出した問題，つまり，$\Gamma_2$ の中の関係

$$(\zeta_1\zeta_2\zeta_3\zeta_4\zeta_5^2\zeta_4\zeta_3\zeta_2\zeta_1)^4 = 1$$
$$(\zeta_1\zeta_2\zeta_3\zeta_4)^{10} = 1$$

を考えると，これらはそれぞれ $S^2$ 上の種数 2 の（40 本の特異ファイバーを持つ）Lefschetz ファイバー空間 $M_1 \to S^2$ と $M_2 \to S^2$ を定め，[15] を使うとこれらの全空間 $M_1$ と $M_2$ は向きを保って同相であることがわかるが，では $M_1$ と $M_2$ は微分同相であろうか？という問題について，T. Fuller[16] がそれらは微分同相でないことを証明した．この例は，種数 2 の Lefschetz ファイバー空間のなかにエキゾチックな微分構造を持つものが存在することが分かった最初の例である．

なお，上の例でも示したが，写像類群のなかの（右ひねりの）デーン・ツィストの間の関係子は $S^2$ 上の Lefschetz ファイバー空間を与えるので，その全空間は閉じた 4 次元多様体になる．Lefschetz ファイバー空間を通して，多くの**閉じた** 4 次元多様体を手に入れることができる．

実は，J. アモロス，F. ボゴモロフ，L. カツァルコフ，T. パンテフ [4] およびゴンプ [19] によって，任意の有限表示群が，ある Lefschetz ファイバー空間の全空間の基本群として実現できることが示されているので，Lefschetz ファイバー空間は我々にはちと多すぎる．

## 6. Axial ファイバー空間

最後に，Lefschetz ファイバー空間と似ているが性格の違う **Axial ファイバー空間**（軸性ファイバー空間）を紹介したい．Axial ファイバー空間のアイデアを得たのはかなり昔のことであるが，塩田徹治先生が標数 $p$ の K3 曲面に，定義方程式の因数分解を使ってファイバー構造を入れているのを見てからである（[58]）．そのとき,「標準的な」4 次元多様体の無限列を与えている「Fermat 曲面」のかたちを，この方法を使って調べてみようと思った．$n$ を 1 以上の整数として，**$n$ 次 Fermat 曲面** $V_n$ は $\mathbb{C}P^3$ のなかで

$$z_0^n + z_1^n + z_2^n + z_3^n = 1$$

という式で定義される複素曲面（トポロジーの立場では 4 次元微分可能閉多様体）である．

$$V_1 \cong \mathbb{C}P^2,\ V_2 \cong S^2 \times S^2,\ V_3 \cong \mathbb{C}P^2 \# 6\overline{\mathbb{C}p^2},\ V_4 \cong \text{K3 曲面}$$

が知られているので，一般の場合の $V_n$ の形が気になる．以下，$n \geqq 2$ とする．

[7] この条件は，ファイバーの種数が 2 以上であれば自動的に満たされる．
[8] ゴンプは，この結果を，必ずしも Lefschetz ファイバー空間でないようなより一般の locally holomorphic fibration に拡張している [20], p.404 (b) が，同じ結果は Vu Thi Thu Ha　が東京大学に出した博士論文 (2000）で証明されている [67]

Fermat 曲面 $V_n$ にファイバー構造を入れるため，定義方程式が

$$z_0^n - z_1^n = z_2^n - z_3^n \tag{1}$$

であると考えることにする.（複素係数なので，係数のプラスマイナスは座標変換で自由に変えられる.）そして，(1) の両辺を因数分解して，写像 $f : V_n \to \hat{\mathbb{C}}$ を

$$f = \frac{z_0 - z_1}{z_2 - z_3} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} z_2^{n-1-k} z_3^k}{\sum_{k=0}^{n-1} z_0^{n-1-k} z_1^k}$$

とおいて定義する.（$\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \cong S^2$ である.）簡単に言えば，

$$f = \begin{cases} z_2^{n-1}/z_0^{n-1} & z_0 = z_1 \text{ かつ } z_2 = z_3 \text{ のとき} \\ (z_0 - z_1)/(z_2 - z_3) & \text{その他の場合} \end{cases} \tag{2}$$

となる．このような写像 $f : V_n \to \hat{\mathbb{C}}$ を **Axial fibration**（軸性ファイバー空間）とよぶ．こう呼ぶのは次の理由による．まず，$z_0 - z_1 = 0$. $z_2 - z_3 = 0$ という二つの 1 次式で複素直線（軸）が定義され，この「軸」を含む複素平面達を考えると，その全体は $\hat{\mathbb{C}}$ でパラメトライズできる．$a \in \hat{\mathbb{C}}$ に対応する平面 $P_a$ は

$$(z_0 - z_1) - a(z_2 - z_3) = 0$$

に他ならない．そして，$f : V_n \to \hat{\mathbb{C}}$ のファイバー $f^{-1}(a)$ は，複素平面 $P_a$ と $V_n$ の切り口 $V_n \cap P_a$ になっている．つまり，軸性ファイバー空間は,「軸」$z_0 - z_1 = z_2 - z_3 = 0$ により，すべてが決定されるわけである.

ここで注意すべきは，**「軸」は $V_n$ に含まれているが**，(2) のお蔭で,「軸」の上に $f : V_n \to \hat{\mathbb{C}}$ を制限しても well-defined であることである．ここが，Lefschetz ファイバー空間との大きな違いで，たとえば，$\mathbb{C}P^3$ の中のある代数曲面 $W$ に Lefschetz ペンシルを構成しようとするときには，まず適当な「軸」を $W$ に横断的に交わらせる.（このとき，当然**「軸」は $W$ に含まれない**.）「軸」と $W$ には，“base points” と呼ばれる有限個の交点ができる.「軸」を含む複素平面達は $\hat{\mathbb{C}}$ でパラメトライズされ，点 $a \in \hat{\mathbb{C}}$ に対応する複素平面 $P_a$ と $W$ の交わり $C_a \overset{\text{def}}{=} W \cap P_a$ を寄せ集めると，$W$ を分割する曲線の集まり（曲線叢 : pencil）$\{C_a\}_{a \in \hat{\mathbb{C}}}$ ができる．しかし，これらの曲線は皆 base points を通過するので，曲線達は disjoint ではない．これを改良するため，base points で $W$ をブロー・アップすれば，全ての曲線達は disjoint になる．$W$ は base points の個数だけブロー・アップされて Lefschetz ファイバー空間 $W \# \overline{\mathbb{C}P^2} \# \cdots \# \overline{\mathbb{C}P^2} \to \hat{\mathbb{C}}$ が得られる.（点 $a \in \hat{\mathbb{C}}$ の上のファイバーは $C_a$ である.）

Fermat 曲面 $V_n$ のように,「軸」が $V_n$ に含まれる場合，この軸に関する Axial ファイバー空間を考えると，**ブロー・アップすることなしに**ファイバー空間 $f : V_n \to \hat{\mathbb{C}}$ が得られる．ここが利点である．4 次元多様体の微分同相類はブロー・アップすることによってかなりの情報が失われるからである．$V_n$ そのものを調べるとき，Axial ファイバー空間が重要である.

Axial ファイバー空間の構造を使って Fermat 曲面を調べたのが [40]，[36] である．論文 [40] では次数 $n = 5$ の場合に限って調べた．Axial ファイバー空間 $V_5 \to \hat{\mathbb{C}}$ の特異ファイバーの場所と位相形を決定し，阿原一志氏 [1] によるコンピュータ計算の結果を利用

して，大域的なモノドロミーを与える写像類達の絵を描いた．論文 [36] では，次数 $n$ が一般の場合に，全ての特異ファイバーの位置と位相形を決定した．この決定には「三角関数版のディオファントス方程式」を考えねばならなくなって，一時ほとんどギヴアップ状態になったが，増田一男氏の腕力を借りて決定に至った．出てくる特異ファイバーはほぼLefschetz 型の特異ファイバーである（ただし，同じ特異ファイバーにいくつもノードがある）が，$n \geqq 3$ のとき，0 と $\infty$ の上には，$n-1$ 本の複素直線が一つの共通点で交わるような形の特異ファイバーがある．

残っているのは「大域的なモノドロミー」の決定である．これについては阿原一志氏と粟田育子氏の論文 [2] で，次数 $n$ が奇数の場合に，理論的な（コンピュータを使わない）考察がなされている．ただし，モノドロミーを表す写像類の絵は描かれていない．

Axial ファイバー空間でもそうであったが，必ずしも Lefschetz 型でないような特異ファイバーが現れる場面が数多く存在する．これらの一般の特異ファイバーを Lefschetz 型あるいは多重ファイバーに分裂させる理論が期待される．高村茂氏がそのような理論を構築中である [64]．最近の成果に，「プロペラ型」の特異ファイバー（種数 $g$ の閉曲面の，$g$ 個の「穴」を巡回的に入れ替える位数 $g$ の写像の商空間として得られる特異ファイバー）を何回かの変形を重ねて Lefschetz 型に分解できることが証明された [55]．これにも良い応用が期待できると思う．

## 参考文献


[1] K. Ahara, *On the topology of Fermat type surface of degree* 5 *and the numerical analysis of algebraic curves*, Tokyo J. Math., **16** (1993), 321–340.

[2] K. Ahara and I. Awata, *On the global monodromy of a fibration of the Fermat surface of odd degree $n$*, Tokyo J. Math. **34** (2011), 19–52.

[3] S. Akbulut and R. Kirby, *Mazur manifolds*, Michigan Math. J. **26** (1979), 259–284.

[4] J. Amorós, F. Bogomolov, L. Katzarkov and T. Pantev, *Symplectic Lefschetz fibrations with arbitrary fundamental groups*, preprint.

[5] J. W. Cannon, *Shrinking cell-like decompositions of manifolds, Codimension three*, Ann. of Math. **110** (1979), 83–112.

[6] A. Casson, *Three lectures on new infinite constructions in 4-dimensional manifolds* in [21].（キャッソンのアイデアは1973年ごろに得られたものであるが，出版は遅くなり，1986年になった．それまでは，講演を手書きしたメモのようなノートが研究者の間でコピーされて読まれていた.）

[7] A. J. DiScala, N. Kasuya and D. Zuddas, *Non-Kähler complex structures on* $\mathbb{R}^4$, Geometry & Topology, **21** (2017), 2461–2473.

[8] S. K. Donaldson, *An application of gauge theory to four dimensional topology*, J. Diff. Geom. **18** (1983), 279–315.

[9] S. K. Donaldson, *La topologie différentielle des surfaces complexes*, C. R. Acad. Sci, **301** (1985), 317–320.

[10] S. K. Donaldson, *Irrationality and the h-cobordism conjecture*, J. Diff. Geom. **26** (1987), 141–168.

[11] S. K. Donaldson, *Lefschetz fibrations in symplectic geometry*, Proc. Internat. Cong. Math. (Berlin 1998), Vol II, Doc. Math. Extra Volume ICMII (1998), 309–314.

[12] 遠藤久顕，Lefschetz ファイバー空間，数学 第69巻　第2号　2017年4月，157–180.

[13] H. Endo and S. Kamada, *Chart description for hyperelliptic Lefschetz fibrations and their stabilization*, Topology Appl., **196** part B (2015), 416–430.

[14] H. Endo, I. Hasegawa, S. Kamada and K. Tanaka, *Charts, Signatures, and stabilizations of Lefschetz fibrations*, to appear in Geom. Topol. Monogr.

[15] M. H. Freedman, *The topology of four-dimensional manifolds*, J. Diff. Geom. **17** (1982), 337–453.

[16] T. Fuller, *Diffeomorphism types of genus 2 Lefschetz fibrations*, Math. Ann., **311** (1998), 163–176.

[17] D. E. Galewski and R. J. Stern, *Simplicial triangulations of topological manifolds*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics. **32** Part 2 (1978), 7–12.

[18] D. E. Galewski and R. J. Stern, *Classification of simplicial triangulations topological manifolds*, Ann. of Math. **111** (1980), 1-34.

[19] R. Gompf, *A new construction of symplectic manifolds*, Ann. of Math. **142** (1995), 527–595.

[20] R. Gompf and A. Stipsicz, *4-Manifolds and Kirby Calculus*, Graduate Studies in Math., **20** (1999), Amer. Math. Soc.

[21] L. Guillou et A. Marin, *A la Recherche de la Topologie Perdue*, Progress in Mathematics, **62**, Birkhäuser, 1986.

[22] M. W. Hirsch, *Differential Topology*, Springer Graduate Texts **33**, Springer-Verlag, 1976.

[23] M. W. ハーシュ（松本堯生 [訳]），微分トポロジー,「シュプリンガー数学クラシックス」, 1992.

[24] W. C. Hsiang and J. L. Shaneson, *Fake Tori*, in "Topology of Manifolds"(ed. J. C. Cantrell and C. H. Edwards, Jr.),1970, Markham Publ. Company, 18–51.

[25] S. Iitaka, *Deformations of compact complex surfaces*, in "Global Analysis", Papers in honor of K. Kodaira, (ed. D. C. Spencer and S. Iyanaga), Univ. of Tokyo Press, Princeton Univ. Press, 1969, 267–272.

[26] S. Kamada, *Surfaces in* $\mathbb{R}^4$ *of braid index three are ribbon*, J. Knot Theory Ramifications, **1** (1992), 137–160.

[27] S. Kamada, *Braid and Knot Theory in Dimension Four*, Math. Surveys and Monographs, **95** (2002), Amer. Math. Soc.

[28] S. Kamada, *Graphic descriptions of monodromy representations*, Topology Appl., **154** (2007), 1430–1446.

[29] S. Kamada, *Chart description for genus-two Lefschetz fibrations and a theorem on their stabilization*, Topology Appl., **159** (2012), 1041–1051.

[30] S. Kamada, Y. Matsumoto, T. Matumoto, and K. Waki, *Chart description and a new proof of the classification theorem of genus one Lefschetz fibrations*, J. Math. Soc. Japan, **57** (2005), 537–555.

[31] A. Kas,*On the deformation types of regular elliptic surfaces*, in "Complex Analysis and Algebraic Geometry", (ed.by W. L. Baily, Jr. and T. Shioda), 107–112, Iwanami Shoten and Cambridge University Press (1977).

[32] R. Kirby, *A calculus for framed links in* $S^3$, Invent. Math. **45** (1978), 35–56.

[33] R. C. Kirby and L. C. Siebenmann, *On the triangulation of manifolds and the Hauptvermutung*, Bull. Amer. Math. Soc., **75** (1969), 742–749.

[34] R. C. Kirby and L. C. Siebenmann, *Foundational Essays on Topological Manifolds, Smoothings, and Triangulations*, Ann. Math. Studies **88**, Princeton Univ. Press, 1977.

[35] C. Manolescu, $Pin(2)$*-equivariant Seiberg-Witten Floer homology and the triangulation conjecture*, arXiv: 1303.2354v4[math GT].

[36] K. Masuda and Y. Matsumoto, *Axial fibrations of the Fermat surfaces and their singular fibers*, Rev. Mat. Complut. **26** (2013), 589–633.

[37] 松本幸夫,「4次元のトポロジー」数学セミナー増刊, 1979, 日本評論社.

[38] Y. Matsumoto, *On 4-manifolds fibered by tori*, Proc. Japan Acad. **58A** (1982), 298–301.

[39] Y. Matsumoto, *Diffeomorphism types of elliptic surfaces*, Topology, **25** (1986), 549–563.

[40] Y. Matsumoto, *On the topological structure of the Fermat surface of degree* 5, Kodai Math. J., **17** (1994), 560–570.

[41] Y. Matsumoto, *Lefschetz fibrations of genus two – A topological approach –*, Proceedings The 37th Taniguchi Symposium on Topology and Teichmüller spaces (ed. by S. Kojima et al.) 1996, 123–148.

[42] 松本幸夫，基本予想をめぐって，「２０世紀の数学」（笠原乾吉，杉浦光夫編）所収，日本評論社，1998, 229–238.

[43] T. Matumoto, *Variétés simpliciales d'homologie et variétés topologiques métrisables*, thèse, Univ. de Paris-Sud, Orsey, 1976.

[44] T. Matumoto, Triangulation of manifolds, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics. **32** Part 2 (1978), 1–6.

[45] 松本堯生，微分トポロジーの誕生と発展，–50 年代から 70 年代初頭までといくつかの未解決問題について–，数学，**69** (2017), 91–98.

[46] J. W. Milnor, *On simply connected 4-manifolds*, Symposium internacional de Topologia Algebraica, Universidad Nacional Autonoma de Mexico, (1958), 122–128.

[47] J. W. Milnor, *Topology from the differentiable viewpoint*, Univ. Press of Virginia, 1965.

[48] J. W. ミルナー（蟹江幸博 [訳]），微分トポロジー講義,「シュプリンガー数学クラッシクス」1998.

[49] E. Moise, *Affine structures on 3-manifolds*, Ann. Math. **56** (1952), 96–114.

[50] B. Moishezon, *Complex surfaces and connected sums of complex projective planes*, L.N.M. **603**, Springer-Verlag 1977.

[51] J. M. Montesinos, *Heegaard diagrams for closed 4-manifolds*, Geometric Topology (ed. by J. Cantrell), Academic Press, 1979.

[52] J. M. Montesinos, *On twins in the four-sphere I*, Quart. J. Math. Oxford, **34** (1983), 171–199.

[53] T. Nagase and A. Shima, *On surface braids of index four with at most two crosings*, Fund. Math. **188** (2005), 167–193.

[54] T. Nagase and A. Shima, *Properties of minimal charts and their applications I*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo, **14** (2007), 69–97.

[55] T. Okuda and S. Takamura, *to appear*. Cf. 奥田喬之，Degenerations of propeller surfaces and sequence of splittings, 研究集会「Branched Coverings, Degenerations, and Related Topics 2017」於　東北学院大学工学部多賀城キャンパスにおける講演（2017 年 3 月 9 日）.

[56] A. A. Ranicki (ed.), *The Hauptvermutung Book*, K-Monographs in Math. **1**, 1996. Kluwer Academic Publishers.

[57] V. A. Rochlin, *New results in the theory of four dimensional manifolds*, Doklady Akad. Nauk. SSSR, **84** (1952), 221–224. (ロシア語．なお，フランス語訳が [21] にあり.)

[58] T. Shioda, *Algebraic cycles on certain K3 surfaces in characteristic p*, in "Manifolds in Tokyo 1973" (ed. A. Hattori), Univ. of Tokyo Press, (1975), 357–364.

[59] L. C. Siebenmann, *Disruption of low-dimensional handlebody theory by Rohlin's theorem*, in "Topology of Manifolds"(ed. J. C. Cantrell and C. H. Edwards, Jr.),1970, Markham Publ. Company. 57–76.

[60] L. C. Siebenmann, *Are nontriangulable manifolds triangulable?*, in "Topology of Manifolds"([59] が出ているのと同じ本），77–84.

[61] B. Siebert and G. Tian, *On hyperelliptic $C^\infty$-Lefschetz fibrations of four manifolds*, Commun. Contemp. Math. **1** (1999), 255–280.

[62] D. Sullivan, *Triangulating Homotopy Equivalences*, Thesis, Princeton University, 1966.

[63] D. Sullivan, *Triangulating and Smoothing Homotopy Equivalences and Homeomorphisms. Geometric Topology Seminar Notes*, 1967. [56] 所収.

[64] S. Takamura, *Towards the classification of atoms of degenerations, I, Splitting criteria via configurations of singular fibers*, J. Math. Soc. Japan, **56** (2004), 115–145., *III, Splitting deformations of degenerations of complex curves*, L.N.M. **1886**, Springer-Verlag (2006).

[65] 田村一郎，微分位相幾何学，岩波書店，1992.

[66] M. Ue, *On the diffeomorphism types of elliptic surfaces with multiple fibers*, Invent. Math. **84** (1986), 633–643.

[67] Vu Thi Thu Ha, *Symplectic locally holomorphic fibrations*, 東京大学数理科学研究科　博士論文 (2000).

[68] C. T. C. Wall, *On simply-connected 4-manifolds*, J. London Math. Soc., **39** (1964), 141–149.

[69] C. T. C. Wall, *Differential Topology*, Cambridge studies in advance mathematics, Cambridge Univ. Press, 2016.