A_∞ 代数の幾何学への応用のいくつかについて

梶浦宏成　(千葉大学 · 理学研究院)

A_∞ 代数はもともと H 空間の研究において導入されたものである．H 空間 X の積 $M_2 : X \times X \to X$ がホモトピー結合的であるとき，その連続写像を $M_3 : X \times X \times X \times I \to X$ と書き，$(X, \{M_i, K_i\}_{i=2,3})$，$K_2 :=$ 一点，$K_3 := I$（閉区間）を A_3 空間と呼ぶ．同様にして，$M_i : X^i \times K_i \to X$ が $i = 2, 3, \ldots, n$ に対して定まるとき $(X, \{M_i, K_i\}_{i=2,\ldots,n})$ を A_n **空間**と呼び，特にすべての $i = 2, 3, \ldots$ について M_i が定まるとき A_∞ **空間**という [19].

この構造を代数化したものが A_∞ 代数である．現在の整頓された言葉でいうと, A_∞ 代数とは $\{K_i\}_{i=2,3,\ldots}$ の鎖複体の成す次数付き微分（DG）オペラッドの表現のことであるということもできるが（[16] 参照），具体的には $(A, \{m_k\}_{k\geq 1})$ が体 K 上の A_∞ **代数**であるとは, A は K 上次数付きベクトル空間であり,

$$m_k : A^{\times k} \to A$$

は次数 $2-k$ の K 上多重線形写像であり, $\{m_k\}_{k\geq 1}$ が各 $n = 1, 2, ...$ に対して

$$0 = \sum_{k+l=n+1} \sum_{j=0}^{k-1} \pm\, m_k(a_1, \ldots, a_j, m_l(a_{j+1}, \ldots, a_{j+l}), a_{j+l+1}, \ldots, a_n)$$

が成り立つときをいう [20]. （符号 $\pm$ については省略する.）

これは次数付き微分代数（DG 代数）の一般化となっている． つまり高次の積 $m_3, m_4, \ldots$ が自明な A_∞ 代数は $d := m_1 : A \to A$ を微分，$m_2 : A \times A \to A$ を積とする DG 代数 (A, d, m_2) である．一般の A_∞ 代数 $(A, \{m_k\}_{k\geq 1})$ の場合にも (A, m_1) は余鎖複体

$$\cdots \xrightarrow{m_1} A^i \xrightarrow{m_1} A^{i+1} \xrightarrow{m_1} \cdots$$

を成し，d は積 m_2 に関してライプニッツ則を満たすが，m_2 は一般には結合的にはならず，そのずれが m_3 を含む式で定められている．この意味で A_∞ 代数は**ホモトピー結合的代数**とも呼ばれる．

上述のように， 空間 X に対して A_∞ 構造は，もともとは X やそのチェイン $C_*(X)$ 達の上の高次の積構造として導入された．例えば X に入る A_n 構造の最大の n は何か？ということを考えると空間 X 達を分類する道具となる．この方向性の研究ももちろん続けられているが，有理ホモトピー論の発展などを機にむしろコチェイン側に自然に入る A_∞ 構造について議論されることが多くなったように思われる．例えば可微分多様体 X に対し，微分形式の空間 $A := \Omega(X)$ は自然に $d : A \to A$ を外微分作用素，ド・ラーム複体 $(A := \Omega^*(X), d)$ は $m_2 := \wedge$ をウェッ

ジ積とする（可換）DG 代数の構造を持つ．本講演では，A_∞ 代数の幾何学へのこの方向性での応用に関して主に以下で述べる (a)，(c) について紹介したい．

A_∞ 代数を幾何学的対象の何かしらの不変量として扱いたい．このとき A_∞ 代数を分類する必要がある．A_∞ 代数の間の A_∞ 写像を自然に定義するにはバー構成が便利である．A_∞ 代数 $(A, \{m_k\}_{k\geq 1})$ に対し，A の懸垂 $A[1]$ のテンソル余代数 $(B(A) := T^c(A[1]), \triangle)$ を考えると A_∞ 構造 $\{m_k\}_{k\geq 1}$ を $B(A)$ 上の微分 $\mathfrak{m} : B(A) \to B(A)$，$\mathfrak{m}^2 = 0$ に格上げすることができ，$(B(A), \mathfrak{m}, \triangle)$ は次数付き微分余代数を成す．2 つの A_∞ 代数 $(A, \{m_k\}_{k\geq 1})$，$(A', \{m'_k\}_{k\geq 1})$ の間の A_∞ **写像** $\mathfrak{f}$ は，対応する次数付き余代数の間の写像として定義され，それは次数を保つ多重線形写像

$$f_k : (A[1])^{\times k} \to A'[1], \qquad k \geq 1$$

によって構成されることとなり，特に $f_1 : A[1] \to A'[1]$ は複体の間の鎖写像 $f_1 : (A[1], m_1) \to (A'[1], m'_1)$ となっている．

f_1 が同型のとき，$\mathfrak{f}$ は A_∞ **同型写像**と呼ぶ．このとき実際逆写像 $\mathfrak{f}^{-1}$ が存在する．しかし，A_∞ 代数を A_∞ 同型写像で分類するのは一般にあまりよい考えではない．f_1 が複体の間の擬同型写像であるとき, $\mathfrak{f}$ は A_∞ **擬同型写像**であるという．２つの A_∞ 代数の間に擬同型写像が存在するということは実際同値関係を定め, A_∞ 代数を A_∞ 擬同型で分類するのが実際にほどよいものとなる．この観点からみても重要な事実として Kadeishvili による**極小模型定理** [6] がある．

定理 1 A_∞ 代数 $(A, \{m_k\}_{k\geq 1})$ に対し，$m'_1 = 0$ となる A_∞ 代数 $(A', \{m'_k\}_{k\geq 1})$ と A_∞ 擬同型写像 $\mathfrak{f} : (A', \{m'_k\}_{k\geq 1}) \to (A, \{m_k\}_{k\geq 1})$ が存在する．

このとき $(A', \{m'_k\}_{k\geq 1})$ をもともとの A_∞ 代数 $(A, \{m_k\}_{k\geq 1})$ の**極小模型**という．複体 $(A[1], m_1)$ と $(A'[1], m'_1 = 0)$ は擬同型であるので A' はベクトル空間として $H^*(A, m_1)$ と同型である．つまり $(A', \{m'_k\}_{k\geq 1})$ は $(A, \{m_k\}_{k\geq 1})$ と A_∞ 擬同型な A_∞ 代数のうち，ベクトル空間として一番小さくなっているものである．

一方，A_∞ 代数の単位元が適切に定義でき, 単位元をもつ A_∞ 代数はある DG 代数と A_∞ 擬同型となることも知られている．

この意味で，A_∞ 擬同型な A_∞ 代数のうち，DG 代数であるものは構造は簡明だが「大きく」，極小模型が「一番小さい」ものであるといえる．DG 代数の構造は様々な状況で自然に表れる．DG 代数を分類することを考えるためには DG 写像を考えるわけだが，DG 写像は f_1 のみから成る A_∞ 写像であるという意味で，一般の A_∞ 写像に比べてとても少ない．さらに困ったことに，DG 擬同型写像は同値関係を定めない（対称律を満さない）．よって，DG 代数の圏において，逆向きの DG 擬同型写像を形式的に加え，それによって局所化するようなことをしたいわけであるがそうして得られる圏において 2 つの DG 代数が同型であることは結局のところそれらが A_∞ 擬同型であることと同じになることが知られている [21],[17].

つまり DG 代数の分類する際にも，DG 代数を A_∞ 代数とみなしてその A_∞ 擬同型類を分類すればよいということになる．特に，この問題は，極小模型定理より，極小 A_∞ 代数の分類問題に帰着される．極小 A_∞ 代数の間の A_∞ 擬同型写像は A_∞ 同型写像であるので，極小 A_∞ 代数の A_∞ 同型類を分類すればよい．

我々は通常幾何学的対象に対する DG 構造あるいは A_∞ 構造としてコホモロジーは有限次元となるものを議論したい．このとき，極小 A_∞ 代数の間の A_∞ 同型写像は次数付き有限次元ベクトル空間の間の非線形座標変換のようなものであり，分類するのに手頃なものとなる．特に

(a) 1-連結型 DG 代数

(b) 順序付き A_∞ 圏

などは，その極小模型の A_∞ 構造 m_n は十分 n が大きいと自明となり，A_∞ 同型写像の f_n も有限の n までについて考えればよいことになり，分類しやすいクラスであることがわかる．(a) の場合については特に，1-連結可換 DG 代数の分類をすることは有理ホモトピー論を分類することになる．DG 代数の可換性より，対応する A_∞ 代数としては可換性を持つ C^∞ 代数に制限して考えることとなる [7]．例えば [5] では $S^{i_1} \vee \cdots \vee S^{i_k}$，$1 < i_1 < \cdots < i_k$ と同じコホモロジー環を持つ空間の有理ホモトピー型について，$i_k \leq 7$ の場合までについて分類されている．(b) の順序付き A_∞ 圏は，後に触れるホモロジー的ミラー対称性の研究において Seidel によって導入されたものである（[18] をみよ）．

一般に DG 圏，あるいは A_∞ 圏 $\mathcal{C}$ から三角圏 $Tr(\mathcal{C})$ を構成する方法があり（$\mathcal{C}$ が DG 圏の場合が Bondal-Kapranov [1]，その拡張として $\mathcal{C}$ が A_∞ 圏の場合が [13]），実際代数的三角圏と呼ばれる主要な三角圏は $Tr(\mathcal{C})$ として実現される．このとき 2 つの A_∞ 圏 $\mathcal{C}$，$\mathcal{C}'$ が A_∞ 同値であれば $Tr(\mathcal{C})$ と $Tr(\mathcal{C}')$ は三角圏同値となることから，極小 A_∞ 圏の分類を代数的三角圏の分類のために応用することができる（例えば [10]）．

A_∞ 代数の枠組の，分類問題以外の有用性としては，A_∞ 写像が ” 非線形 ” 的なものであるため，一見全く異なってみえる DG あるいは A_∞ 構造の間の対応をみることができることがある．その典型例として

(c) ホモロジー的ミラー対称性

がある．ホモロジー的ミラー対称性 [13] とはミラー対称性予想の圏論的定式化として Kontsevich によって提案されたものであり，シンプレクティック多様体 M 上の深谷圏 $Fuk(M)$ と M とミラー双対な複素多様体 $\hat{M}$ 上の連接層の成す導来圏 $D^b(coh(\hat{M}))$ の間の等価性である．深谷圏 $Fuk(M)$ は A_∞ 圏であるため（[2]），三角圏の同値性として

$$Tr(Fuk(M)) \simeq D^b(coh(\hat{M}))$$

が成り立つというのがホモロジー的ミラー対称性予想の定式化である．正確にはこれはミラー対 $M, \hat{M}$ がカラビ・ヤウ多様体の場合の定式化であるが，M あるいは $\hat{M}$ がより一般のケーラー多様体の場合についても定式化が拡張されている．通常導来圏 $D^b(coh(\hat{M}))$ 側は自然な DG 構造を持ち，これがある DG 圏 $\mathcal{C}'$ によって $D^b(coh(\hat{M})) \simeq Tr(\mathcal{C}')$ となることが期待できる．よって，よい DG 圏 $\mathcal{C}'$ と，必要ならば $Tr(Fuk(M)) \simeq Tr(\mathcal{C})$ となる A_∞ 充満部分圏 $\mathcal{C}$ をとって A_∞ 同値 $\mathcal{C} \simeq \mathcal{C}'$ を示すことができればホモロジー的ミラー対称性が示されることになる．Kontsevich-Soibelman [15] ではこの方向性でホモロジー的ミラー対称性を示す方法が提案されていて，特にその A_∞ 同値 $\mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ は $\mathcal{C}$ が **DG** 圏 $\mathcal{C}'$ の極小模型，あるいは極小に近い（射の空間が）小さい A_∞ 圏であるようにして得られることが期待されている．この方法が完全に実行できるようなミラー対の例は今のところ少ないが，少なくともミラー対 $(M, \hat{M})$ が 2 次元トーラスの場合にはできる [9].

一般に A_∞ 代数，C_∞ 代数などはホモトピー代数と呼ばれるが，他に DG リー代数の一般化である L_∞ 代数（ホモトピーリー代数）というものもある．つまり積は反可換で，ホモトピー結合的であるかわりにホモトピーヤコビ律を満たす．Kontsevich は変形量子化問題を，2 つの DG リー代数の間の対応をつける問題として定式化し，実際にそれらの間の L_∞ 擬同型写像を構成することによって解決した [14].（[3, 11] などに解説がある.）

このように幾何学においてホモトピー代数が自然に現れる原因は，実はこれらのホモトピー代数が種数 0 の境界付き点付きリーマン面のモジュライ空間のコンパクト化のなすオペラッド上の表現として得られるものであることが関係している（[12] 参照）．このようなわけで，ホモトピー代数は素粒子理論において，弦の場の理論を構成するための枠組みとしても応用されている.（[8] の参考文献など；最近のものとして例えば [4].）

参考文献

[1] A. I. Bondal and M. M. Kapranov. Enhanced triangulated categories. *Math. USSR-Sb.*, 70:93–107, 1991.

[2] K. Fukaya. Morse homotopy, A^∞-category, and Floer homologies. In *Proceedings of GARC Workshop on Geometry and Topology '93 (Seoul, 1993).*

[3] 深谷賢治．シンプレクティック幾何学．岩波書店，1999.

[4] K. Goto and H. Matsunaga. A_∞/L_∞ structure and alternative action for WZW-like superstring field theory. *Journal of High Energy Physics* 2017.1: 22, 2017.

[5] 城之内健太．C_∞ 代数による有理ホモトピー型の分類. 千葉大学大学院理学研究科修士論文，平成 28 年 2 月.

[6] T Kadeishvili. The algebraic structure in the homology of an $A(\infty)$-algebra. *Soobshch. Akad. Nauk Gruzin. SSR (Russian)*, 108:249–252, 1982.

[7] T. Kadeishvili. Cohomology C_∞-algebra and rational homotopy type. arXiv preprint arXiv:0811.1655 (2008).

[8] H. Kajiura. Noncommutative homotpy algebras associated with open strings. *Reviews in Math. Phys.*, 19(1):1–99, 2007.

[9] H. Kajiura. Homological perturbation theory and homological mirror symmetry. In *Higher Structures in Geometry and Physics*, Progress in Math., pages 279–292. Birkhäuser, 2009.

[10] H. Kajiura. On A_∞-enhancements for triangulated categories. *Journal of Pure and Applied Algebra* 217.8:1476-1503, 2013.

[11] 前田吉昭, 梶浦宏成 （高村亮 記）． 変形量子化入門． 東京大学数理科学セミナリーノート 20，2002．

[12] H. Kajiura and J. Stasheff. Homotopy algebra of open-closed strings. *Geometry & Topology Monographs* 13:229-259, 2008.

[13] M. Kontsevich, "Homological algebra of mirror symmetry," Proceedings of the International Congress of Mathematicians, (Zürich, 1994), 120–139, Birkhäuser, Basel, 1995.

[14] M. Kontsevich. Deformation quantization of Poisson manifolds. *Lett. Math. Phys.*, 66(3):157–216, 2003.

[15] M. Kontsevich and Y. Soibelman. Homological mirror symmetry and torus fibrations. In *Symplectic geometry and mirror symmetry (Seoul, 2000)*, pages 203–263. World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 2001. math.SG/0011041.

[16] M. Markl, S. Shnider and J. Stasheff, *Operads in algebra, topology and physics*, Mathematical Surveys and Monographs, 96. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.

[17] H. J. Munkholm. DGA algebras as a Quillen model category relations to shm maps. *Journal of Pure and Applied Algebra* 13.3:221-232, 1978.

[18] P. Seidel, *Fukaya categories and Picard-Lefschetz theory*, *Zurich Lectures in Advanced Mathematics*, European Mathematical Society (EMS), Zurich, 2008.

[19] J. Stasheff. Homotopy associativity of H-spaces, I. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 108:293–312, 1963.

[20] J. Stasheff. Homotopy associativity of H-spaces, II. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 108:313–327, 1963.

[21] J. Stasheff and S. Halperin. Differential algebra in its own rite. *Proc. Adv. Study Inst. Alg. Top.* , Vol. 3. 1970.