Braid群・写像類群のpositivityとトポロジー

伊藤　哲也　(大阪大学理学研究科数学専攻)*

1. Introdudction:Positivity

考える対象が『正・０・負』のように区分されるという状況は数学の多くの分野で頻繁に起こり[1]、この『正』(０・『負』)という性質は便利な応用を持つことが多い[2]。考えている対象が一口に『正』であるといっても、使われる状況によりその内容や定義・意味は大きく違う。例えば、整数の組 $P = (n, m) \in \mathbb{Z}^2$ について『P が正である』という際には

- $n > 0$ かつ $m > 0$ – "全てが正"
- $n > 0$、または、$n = 0$ かつ $m > 0$ – "主要項" が正（辞書式順序で正）
- ある定数 N 存在して $n^2 + m^2 > N$ – "十分に正"

といったように、自然でありかつ実際に使用されている定義は複数存在する。一般には『**が正』ということについて、意味のある定義は一つだけではなく、考えたい状況に応じていろいろな定義が考えられる。

曲面の写像類群や Braid 群については、多くの異なる "positivity" の概念が定義されている。三次元（接触）多様体のオープンブック分解や、closed braid の構成を介して、それらの positivity はトポロジー・幾何と密接に関連していることが知られている。ここでは曲面の写像類群・Braid 群に現れる "positivity" の概念を整理し、トポロジー・幾何と関連について述べていく。Positivity の概念とトポロジー・幾何の対応を具体的に関連付ける際には新しいアイディアや議論が必要となることも多い。ここでは主に

- "Positivity" を定義するにはどのようにすればよいか？
- 実際に定義された "Positivity" がどのようにトポロジー・幾何と関連するのか？

の二点をインフォーマルな形で述べるにどとめ、positivity を幾何と関連付ける具体的な議論についてはあまり触れないことにする[3]。紙面の都合上、ここで上げる話は positivity とトポロジーとの関連のごく一部であり、筆者の興味を反映して恣意的に選んだものである。特に、ここでは 3 次元との関連を中心に述べ、Lefshetz fibration といった 4 次元との関連については触れない。また、三次元の話に限っても、この稿で述べる事柄は現在知られていることのごくごく一部であり、はるかに多くの関連が知られていることを注意しておく。興味を持たれた方は、Etnyre,Van Horn-Morris のサーベイ [9] などを適宜参照してほしい。

2. 群の元の Positivity

群 G そのものについて『正・０・負』の概念を定義するにあたっては、群の Cayley graph を考えることで群を距離空間 (の quasi-ismometry 類) と対応させ、距離空間の曲率の考えを移入するという手法が知られている[4]。より一般に、群が適当な空間（$CAT(n)$-空間など）に良い

* 〒 560-0043　大阪府豊中市待兼山町 1 - 1
e-mail: tetito@math.sci.osaka-u.ac.jp
web: http://www.math.sci.osaka-u.ac.jp/~tetito/index_j.html

[1] 例えば曲率の正・０・負など。
[2] 例えば、もし二つの曲線（や一般に部分多様体）の交差がすべて正であったとすると、代数的交点数＝幾何的交点数となり、代数的な情報から幾何的なことがわかることになる。
[3] ここで述べる結果の中で、筆者によるものの多くのは川室圭子氏（Iowa 大学）との共同研究に基づいているが、研究手法である open book foliation[18] については触れない。また、この記事は筆者の個人的な見方を強く反映している。
[4] 例えば Gromov 双曲群など。

（離散的・等長的など）作用を持つときには、群作用を介して作用する空間の性質を群に移入することができる。このような考え方は幾何学的群論として盛んに研究されている。

ここでは、群 G の性質として『正・0・負』を定義するのではなく、G の各元の性質として G の元それぞれに『正・0・負』といった概念を定義することを考えよう。ただし、G の元には正でも負でも0でもない元が存在してもよいとする[5]。

2.1. 不変量による定義

安直に考えると、G の各元に『正・0・負』といった概念を定義するには G の元 g に対して実数あるいは整数に値をとる不変量 $\Theta(g)$ を考え、不変量の値 $\Theta(g)$ で g の『正・0・負』を定義すればいい。あるいは、『不変量 $\Theta(g)$ が十分に大きい』といった形で positivity を定義することもできる[6]。もちろんこの定義は不変量 Θ の性質を反映した概念になる[7]。

2.2. 群作用による定義

『群作用を利用して正・0・負といった性質を群に移入する』というアイディアを用いて、群 G の元に positivity を定義することを考えよう。『正・0・負』が自然に定義される位相空間の最も基本的なものが実直線 $\mathbb{R}$ であることから、群 G の $\mathbb{R}$ への作用を利用し次のように positivity を定めることは自然だろう。

Definition 1. 群 G が $\mathbb{R}$ に向きを保つ連続作用 $\Theta : G \to Homeo^+(\mathbb{R})$ を持つとする。$[\Theta(g)](0) > 0$ を満たすとき g が *positive* であると定める。

この定義は、基点として原点 $0 \in \mathbb{R}$ をとりその像の比較で positivity を定義した。原点0は代数的には特別な元（点）であるが、幾何的に見た場合、何か特別な事情がない限りは $\mathbb{R}$ における座標系 (0= 基点をどこにとるか) は自然には定まらない。そのためこの定義では0（基点）の取り方の任意性が現れる。

このような任意性を除くために、次のように考える。まずは、g が正なら、g^{-1} は負となっていると期待するのが自然だろう。そうすると、単位元1は正でも負でもない（あるいは正かつ負の）元であるべきである。そうすると、単位元1は "0" に対応すると考えるのが自然である。これを踏まえて、単位元 $(=0)$ の作用との比較により次のように定義をする。

Definition 2. 群 G が $\mathbb{R}$ に向きを保つ連続作用 $\Theta : G \to Homeo^+(\mathbb{R})$ を持つとする。このとき、$[\Theta(g)](x) > [\Theta(1)](x) = x$ がすべての点 x で成り立つとき g が *positive* と定める。

このように定義した positive の概念はもちろん考えている群作用 Θ の性質を強く反映している。そのため、Θ が何か幾何的な由来を持つ作用であれば、トポロジー・幾何と何らかの関係があるということが期待できる[8]。

さて、上の定義では、$\mathbb{R}$ への作用を考えた。より一般に、$\mathbb{R}$ での『正・0・負』の概念は基点0を一つ固定するとそれぞれ $x < 0$, $x = 0$, $x > 0$ という不等号、つまり順序で記述される。従って、$\mathbb{R}$ のような位相空間でなくても、一般の半順序集合への作用を介して『正・0・負』の概念を定めることができる。

Definition 3. 群 G が（半）順序集合 $(O, \prec)$ に順序構造を保つ作用 $\Theta : G \to Aut(O, \prec)$ を持つとする。このとき

[5] これは別に奇妙なことではない。これから、群の元の中で何か良い性質を持つものを定義しようとしているのだから、『考えたい良い性質を全く持たない元』が存在することはむしろ自然である。

[6] このように、『**が十分に大きい』といった類の定義は、例外が起こる状況を除くときや、群 g の一般の元（"random" に選んだ元）を考える際に便利である。[17] では、『"random" な写像類群の元の FDTC は十分に大きい』ということを用いて、"random" な3次元多様体や結び目が双曲性といった感覚的に期待されうる性質を実際に持つことを示した。

[7] もちろん、問題は不変量 Θ をどのように構成するか？ということだが。単純なアーベル化の $G \to H_1(G;\mathbb{Z})$ ですら、便利な情報を持つことが多々ある！

[8] もちろん、問題は作用 Θ をどうやって構成するか、という点にかかってくるのだが。

- ある基点 $o \in O$ について、$[\Theta(g)](o) \succ o$ が成り立つとき g が（o で）*positive* と定める。
- $[\Theta(g)](x) \succ x$ がすべての点 x で成り立つとき g が *positive* と定める。

2.3. 生成系による定義

群の作用を構成すること、あるいはその作用を具体的に書き下すことは容易ではない。群の作用が幾何的な考察から得られたものであるときには、実際に与えられた元 g が positive かどうかを決定するのは容易でないことも多い[9]。また、群や作用させる空間によっては、作用がほとんどない/特別なものしかないといったことも起こる[10]。例えば、有限群の $\mathbb{R}$ への向きを保つような作用は自明なものしかない。

そこで、代数・組み合わせ的に positivity の概念を考えることを考えよう。群 G の生成元の集合 $\mathcal{S} = \{s_i\}$(無限でもよい) を一つ固定する。$\mathcal{S}$ は生成系なので、すべての $g \in G$ は $\mathcal{S}$ の元とその逆元 $\mathcal{S}^{-1} = \{s_i^{-1}\}$ たちの積でかける。

Definition 4. $g \in G$ が $\mathcal{S}$ の逆元を使わずに、$\mathcal{S}$ の元だけの積でかけるとき、g を *($\mathcal{S}$-word) positive* と定義する。

たとえば整数 $\mathbb{Z} = \{t$ で生成される無限巡回群$\}$ について、通常の『正の整数』といった概念は $\{t\}$-word positive であると理解することができる。

これは生成元 $\mathcal{S}$ の取り方によっては意味をなさない (例えば、$\mathcal{S} = \mathcal{S}^{-1}$ となっていればすべての元が positive となってしまう！)。しかし、もし生成元 $\mathcal{S}$ が何か幾何的あるいは代数的に意味を持ち、かつ $\mathcal{S}$ と $\mathcal{S}^{-1}$ の交差が小さければ、($\mathcal{S}$-word) positive な元は生成元 $\mathcal{S}$ の性質や幾何的な意味を強く反映していると考えられる。

3. 曲面の Braid 群や写像類群についての positivity

Section 2 で述べた手法で曲面の Braid 群や写像類群について様々な positivity の概念を導入していく。これらの定義はどれも自然なものであり、Section 4 で述べるように Open book・closed braid を通して（接触）3 次元多様体、(transverse)link の性質と密接に関連している。

3.1. 曲面の Braid 群や写像類群

F を一つの境界を持つ[11]向き付け可能コンパクト曲面とする。$P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ を有限個の F の内点の集合とし写像類群 $MCG(F, P)$ を

$$MCG(F, P) = \{\phi : F \to F \mid \phi(P) = P, \phi|_{\partial F} = id\}/isotopy$$

により定まる。特に $P = \emptyset$ の時は単に $MCG(F)$ と書く。

また、曲面 F 上の n-組みひも群 $B_n(F)$ を

$$B_n(F) = \{\gamma : \{p_1, \ldots, p_n\} \times [0, 1] \to F \mid \gamma(p_i, t) \neq \gamma(p_j, t) \ \ (i \neq j)\}/homotopy$$

と定める。$B_n(F)$ の元 $[\gamma]$ は写像 $\overline{\gamma} : \{p_1, \ldots, p_n\} \times [0, 1] \to F \times [0, 1]$, $\overline{\gamma}(p_i, t) = (\gamma(p_i, t), t)$ の像と見ることで、$F \times [0, 1]$ 内に埋め込まれた互いに絡み合う n 本のひもとみることができる。

F の写像類群と組みひも群は次の Birman exact sequence [3] で関係づけられる。

$$1 \to B_n(F) \xrightarrow{p} MCG(F, P) \xrightarrow{f} MCG(F) \to 1$$

ここで $p : B_n(F) \to MCG(F, P)$ は point pushing map と呼ばれ、$B_n(F)$ の元を n 個の点 P の軌跡と見たその動きを F 全体の同相写像として拡張するという操作で得られ、f は forgetful map と呼ばれ、P の情報を忘れることで得られる。

[9] 例えば、3 次元多様体 M の taut 葉層構造から $\pi_1(M)$ の universal circle S^1(各 leaf の無限遠境界を統合した円周) への作用が得られることが知られている [5]。しかしこの作用を具体的に書き下すことは非常に難しい。
[10] このような現象は rigidity と呼ばれ盛んに研究されている。
[11] 簡単のために ∂F が連結な場合を述べる。一般の場合も適切に設定・修正すればほぼ同様の議論ができる。

3.2. 曲面上の基点つき curve についての順序と positivity

Section 2.2 のように $MCG(F,P)$ の適当な順序集合への作用を利用して positivity を定義する。写像類群の定義から、曲面 F への作用を利用して $\mathbb{R}$ や順序集合への作用を得ることを考えるのが自然である。ところが、曲面 F は2次元であり、順序のような構造は見えてこない。大まかに言って、$\mathbb{R}$ の例が示すように順序集合は一次元的な対象である。そこで、次のように二次元のものを一次元に潰すことで求める作用を構成する。

(A) 二次元の境界は一次元であることに着目して境界への作用を利用することを考える。
(B) 曲面を1次元× 1次元とみて、foliation のような一次元のもの族として分解して、その曲線族への作用を利用する。

3.2.1. 普遍被覆の無限遠境界への作用から得られる positivity

まず（A）のアプローチから説明しよう。写像類群自体は曲面の境界 ∂F に自明に作用しているので、∂F への作用を見ても意味がない。しかし、双曲構造を利用して、無限遠境界を考えることで次のような非自明な作用が得られる。

Definition 5. $F_P := F \setminus P$ に双曲構造を一つ与える。このとき、リフトを考えることで $MCG(F;P)$ は普遍被覆 $\widetilde{F_P}$ の無限遠点を付け加えた[12]境界 $\partial\widetilde{F_P} \cong S^1$ に非自明な作用を持つ。写像類群の作用は ∂F を固定していたため、この作用は固定点を持つ（∂F の逆像となっている境界の点は固定点である）。固定点を一つ取り除き、残りの無限遠境界を $\mathbb{R}$ と同一視することで、写像類群の $\mathbb{R}$ への作用 $\Theta : MCG(F,P) \to Homeo^+(\mathbb{R})$ が得られる。これを *Nielsen-Thurston* 作用と呼ぶ。

Nielsen-Thurston 作用から次のように positivity の概念が定義できる。

Definition 6 (Nielsen-Thurston 作用による positivity (= right-veering)[11])**.** $g \in MCG(S,P)$ が全ての $x \in \mathbb{R}$ に対して $[\Theta(g)](x) \geq [\Theta(1)](x) = x$ を満たすとき、g は *right-veering (Nielsen-Thurston* 作用について正*)* であると定義する。

また、Nielsen-Thurston 作用から次のように写像類群の不変量を構成することができる。境界に沿う Dehn twist $T_{\partial F}$ は $MCG(F,P)$ の中心の元であり、$\Theta(T_{\partial F})(x) = x+1$ となるように Nielsen-Thurston 作用を正規化できる。このことから、Nielsen-Thurston 作用の像は S^1 の同相のリフトのなす部分群 $\widetilde{Homeo}^+(S^1)$ に入ることがわかる。このような円周の作用のリフトとして得られる $\mathbb{R}$ の Homeo f について次の translation number と呼ばれる不変量が定義される。

$$\tau(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^n(x) - x}{n} \in \mathbb{R} \quad (x \in \mathbb{R}) \quad (\text{注 :}\tau(f)\text{ は }x\text{ の取り方によらずに一意に定まる})$$

Definition 7 (Fractional Dehn twist coefficient)**.** $\phi \in MCG(F;P)$ の *Fractional Dehn twist coefficient (FDTC)* を $c(\phi) = \tau(\Theta(\phi)) \in \mathbb{Q}$ により定める[13]。

不変量 FDTC を用いた、次のような positivity を考える。

Definition 8 (FDTC の positivity)**.** $\phi \in MCG(F;P)$ の *FDTC* が $c(\phi) > N$ を満たすとき、ϕ を *FDTC N-positive* と呼ぶ。（次 *Section* では主に *FDTC* 1*-positive* を主に扱う。）

定義より FDTC 0-positive であれば right-veering である[14]。Right-veering、FDTC といった概念は [11] でここで上げたものと少し違う (写像類群の Nielsen-Thurston 分類を用いるなど) 方

[12] つまり、普遍被覆 $\widetilde{F_P} \subset \mathbb{H}^2$ とみて、無限遠境界 $\partial\mathbb{H}^2$ の元を付け加えてコンパクト化したものということ。
[13] この定義だと $c(\phi) \in \mathbb{R}$ が実際には有理数になることはすぐにはわからないが、Nielsen-Thurston 分類を用いた元の定義 [11] との同値性 [19, 25] から、FDTC は有理数であること（より強く、その分母が有界であること）がわかる。
[14] 実際、right-veering と FDTC 0-positive は『ほぼ』同値な概念であり、irreducible な写像類群についてはこの二つは同値である [11]。

法で定義された。ここで上げたものは[19]による定式化である。Nielsen-Thurston作用の構成はFの双曲構造の取り方などいくつかの任意性があるが、ここで定義したpositiveityやFDTCといったものはそれらのとり方によらずにwell-definedである。

3.3. Curve族への作用から得られるpositivity

次に(B)の考えに基づくpositivityについて説明する。境界上に基点$*$を固定する。$*$の近傍は$*$から延びる直線族(foliation)として分解でき、そのような直線全体のなす空間は半円$\cong \mathbb{R}$とみなせる。この半円$\cong \mathbb{R}$への作用を考えることで順序を定義しよう、というのが基本的な考えである。

ただし、写像類群はisotopyで割っているのでwell-definedな作用を得るためには考える直線族もisotopyで割る必要があり、次のように定義する。$Ray(*,\partial)$を基点$*$を始点とし、∂F上に終点を持つ[15] Fのoriented simple arc全体のisotopy類とする。

Definition 9 (Right-veering ordering $\prec_{\mathsf{right}}$)**.** $[\gamma],[\gamma'] \in Ray(*,\partial)$を表す*arc* γとγ'を幾何的交点数が最小となるように置く。このとき始点$*$の近傍でγ'がγの右側にあるとき、$\gamma \prec_{\mathsf{right}} \gamma'$と定義する*(*図 *3.3 (1))*。

$\prec_{\mathsf{right}}$により、$Ray(*,\partial)$は全順序集合となり、写像類群は$Ray(*,\partial)$に順序$\prec_{\mathsf{right}}$を保つように作用する。この作用を利用して写像類群の元についてのpositivityを次のように定めることができる。

Definition 10 ($\prec_{\mathsf{right}}$によるpositivity (= right-veering))**.** $\phi \in MCG(S,P)$が全ての$[\gamma] \in Ray(*,\partial)$について$[\gamma] \preceq_{\mathsf{right}} \phi([\gamma])$となるとき、$\phi$を*right-veering(*$\prec_{\mathsf{right}}$について正*)*と定義する[16]。

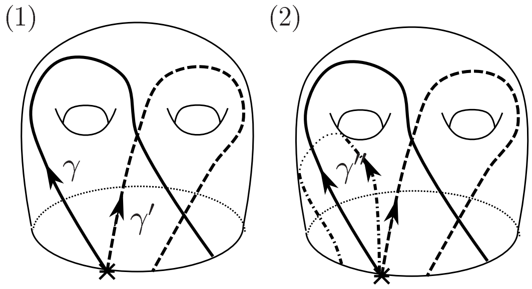

図 1: (1) $\gamma \prec_{\mathsf{right}} \gamma'$: 基点$*$の近傍で$\gamma'$は$\gamma$の右側を動く。(2) $\gamma \ll_{\mathsf{right}} \gamma'$: $\gamma \prec_{\mathsf{right}} \gamma'' \prec_{\mathsf{right}} \gamma'$であり、$\gamma \cap \gamma'' = \gamma'' \cap \gamma = \{*\}$となるようなarc$\gamma''$が取れる。

双曲曲面の測地線は互いに最小交点を実現することを思い出そう。arcの代表元として測地線を考え、普遍被覆への持ち上げを考えることで、$\prec_{\mathsf{right}}$はNilesen-Thurston作用での大小関係をarcの位置に翻訳したもであることがわかり、特に次が成り立つ。

Proposition 1. 定義*6*と定義*10*の二つの*right-veering*という概念は同値である。

順序$\prec_{\mathsf{right}}$は曲線たちの比較において単に始点$*$近傍での位置関係で定義したが、順序$\prec_{\mathsf{right}}$にさらに幾何的な制約を加えた次の順序$\ll_{\mathsf{right}}$を考える。

Definition 11 (Strong right-veering ordering $\ll_{\mathsf{right}}$)**.** $[\gamma],[\gamma'] \in Ray(*,\partial)$について

$$\gamma = \gamma_0 \prec_{\mathsf{right}} \gamma_1 \prec_{\mathsf{right}} \cdots \prec_{\mathsf{right}} \gamma_n = \gamma', \quad \gamma_i \cap \gamma_{i+1} \cap (Interior\ of\ S) = \emptyset$$

[15] この定義では、終点は∂Fにあるものとしたが、条件を緩めて終点が$\partial F \cup P$にあるようなoriented simple arcを考えることも多い。このようにした場合、定義されるpositivityに微妙な違いが現れるが、幾何への応用上は同様に扱えることが[21]で示されている。
[16] こちらの定義が[11]での元の定義である。

となるような$\gamma_1,\ldots,\gamma_n$が存在するとき$\gamma \ll_{\mathsf{right}} \gamma'$と定義する (図 *3.3(2)*)。

$P=\emptyset$のとき$\prec_{\mathsf{right}}$と$\ll_{\mathsf{right}}$は同じ順序であるが、$P\neq\emptyset$のときは$\prec_{\mathsf{right}}$と$\ll_{\mathsf{right}}$は異なる。特に$P\neq\emptyset$のときは$\ll_{\mathsf{right}}$は全順序ではない。『$\ll_{\mathsf{right}}$について negative でない』ということで次のように right-veering よりも弱い概念として positivity を定義する。

Definition 12 (Quasi right-veering ordering $\ll_{\mathsf{right}}$)**.** $\phi \in MCG(S,P)$が全ての$[\gamma]\in Ray(*,\partial)$について$\phi[\gamma] \ll_{\mathsf{right}} [\gamma]$とならない時、$\phi$を *quasi right-veering* と呼ぶ。

3.4. 特殊な生成限から得られる positivity

最後に生成元を利用した positivity の概念を定義する。よく知られているように、写像類群は単純閉曲線に沿った Dehn twist たちで生成される。Dehn twist は最も基本的な写像類群の元であることから、次のような positivity の概念を考えることは自然だろう。

Definition 13. $\phi \in MCG(S)$が *positive Dehn twist* の積でかけるとき *Dehn-positive* と定義する。

Braid 群B_nはn個の$P=\{p_1,\ldots,p_n\}$つき円盤の写像類群$MCG(D^2,P)$と同一視され、標準的な生成元σ_iはp_iとp_{i+1}を結ぶ線分についての half Dehn twist に対応した。このように、Braid 群においては、異なる二点を結ぶ embedded arc に沿った half Dehn twist が写像類群における simple closed curve に沿った Dehn twist に対応する。また、σ_iを組みひもとしてみると、σ_iはi番目と$i+1$番目のひもをつなぐ埋め込まれた、正のねじれバンドの境界として実現されていた。このような特定の性質を持つ生成元を考えることで次のような Braid 群の元についての positivity を得る [30]。

Definition 14.

- $\beta \in B_n$がσ_iの共役の積として分解されるとき（βは異なる二つのPの点を結ぶ *embedded arc* に沿った *positive half twist* の積として分解できるとき）βを *quasipositive* と呼ぶ。
- $\beta \in B_n$が$\sigma_{i,j}=(\sigma_i\cdots\sigma_{j-2})\sigma_{j-1}(\sigma_i\cdots\sigma_{j-2})^{-1}$ $(1\leq i<j\leq n)$の積として（埋め込まれた正のねじれバンドの境界の積として）分解されるときβを *strongly quasipositive* と呼ぶ。

曲面の Braid 群$B_n(F)$についても quasipositive, strongly quasipositive の概念がこれらの定義の拡張として定義されている [22, 14]。

4. Positivity と topology/geometry

4.1. $MCG(S)$の positivity と（接触）3 次元多様体の関連

境界付き曲面Sと$MCG(S)$の元ϕの組(S,ϕ)を (abstract) open book と呼び、ϕを open book のモノドロミーと呼ぶ。

Open book (S,ϕ)について、ϕの mapping torus $S\times[0,1]/(x,1)\sim(\phi(x),0)$の境界$\partial S\times S^1$を$\{point\}\times S^1$が円盤を張るように solid torus を張り合わせることで向きのついた閉 3 次元多様体$M_{(S,\phi)}$が得られる。各 “ページ”$S_t := S\times\{t\}\subset M_{(S,\phi)}$の接空間$TS_t$から得られる平面場を摂動することで$M_{(S,\phi)}$の接触構造$\xi_{(S,\phi)}$が定まる (Thurston-Winkelkemper 構成 [31])。$(M,\xi)=(M_{(S,\phi)},\xi_{(S,\phi)})$となるとき$(S,\phi)$を$(M,\xi)$のオープンブック分解と呼ぶ。

オープンブック分解により、接触三次元多様体全体は Open book 全体を stabilziation という操作で割った集合と同一視されることが知られている（Giroux 対応 [13]）。これにより、『（接触）三次元多様体の性質と写像類群の性質との対応を調べる』という問題が生まれる。下に述べるように、まさに positivity が（接触）三次元多様体の性質を反映しているのである。

$MCG(S)$の positivity と（接触）3 次元多様体の関連について（そのごく一部）を次の図でまとめる。

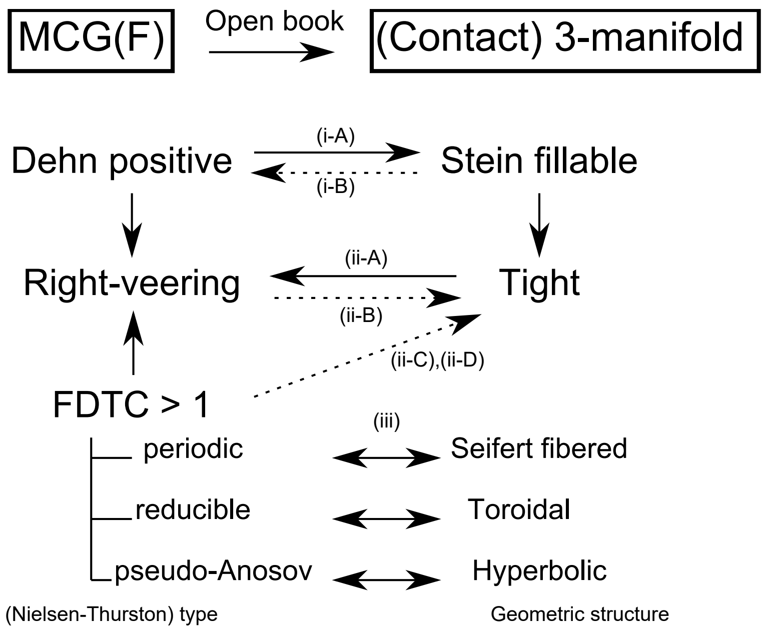

図 2: $MCG(S)$ の positivity とトポロジー: 通常の矢印は implication を表し、点線での矢印は適当な仮定の下での implication を表す。

(i) 接触多様体 (M,ξ) が Stein 多様体 X の境界となるとき、(M,ξ) を Stein fillable と呼ぶ。

(i-A) ϕ が Dehn-positive ならば $(M_{(S,\phi)}, \xi_{(S,\phi)})$ が Stein fillable である [7, 13]。

(i-B) (M,ξ) が Stein fillable であるならば、(M,ξ) のオープンブック分解 (S,ϕ) で ϕ が Dehn-positive なものが存在する [7, 13, 24]。さらに、S が planar[17]なすべてのオープンブック分解 (S,ϕ) のモノドロミー ϕ は Dehn-positive である [33]。

(ii) (M,ξ) が overtwisted disk と呼ばれるある円盤を含まないとき tight と呼び、含むとき overtwisted と呼ぶ。Overtwisted な接触構造の分類は平面場の分類に帰着され [6]、与えられた接触構造が tight が否か判別することが重要になる。

(ii-A) (M,ξ) が tight であれば全ての open book 分解 (S,ϕ) のモノドロミー ϕ は right-veering である [11]。

(ii-B) 逆に、(M,ξ) の全ての [18]open book 分解 (S,ϕ) について ϕ が right-veering であれば M は tight である [11]。

(ii-C) S が planar[19]で ϕ の FDTC>1 のとき $(M_{(S,\phi)}, \xi_{(S,\phi)})$ は tight である [20]。

(ii-D) ∂S が連結、ϕ が pseudo-Anosov かつ FDTC>1 のとき、やはり $(M_{(S,\phi)}, \xi_{(S,\phi)})$ は tight である [12]。

(iii) ϕ の FDTC>1 であるという仮定[20]の下で、$M_{(S,\phi)}$ の幾何構造と ϕ の Nielsen-Thurston 分類が一体一に対応する [19]。

[17] S が non-planar のときには Stein fillable な接触多様体のオープンブック分解 (S,ϕ) で ϕ が Dehn-positive でない例が知られている。

[18] 特定の一つの open book のモノドロミーが right-veering であるからといって、(M,ξ) が tight であるとは一般には言えない。

[19] [32] において、planar の仮定がなくても成り立つということがアナウンスされているが、証明はまだ出版されていない。

[20] 境界が多数あるときは $FDTC > 4$ ともう少し強い仮定が必要になる。

4.2. $B_n(F), MCG(S,P)$ **の positivity と (transverse) link の関連**

Braid $\beta \in B_n(S)$ を $S \times [0,1]$ 内の n 本のひもとみて、その $S \times [0,1] \to M_{(S,\phi)}$ での像を考えることで、$(M_{(S,\phi)}, \xi_{(S,\phi)})$ 内の transverse link (接触構造に正に横断的に交わるような絡み目) $\widehat{\beta}$ を closed braid (β の (S,ϕ) での closure) と呼ぶ。

全ての transverse link は適当な braid β を用いて $\widehat{\beta}$ の形にかける [26, 27]。Birman exact sequence を用いて $B_n(F)$ の元 β 及び $\phi \in MCG(S)$ の元をともに $MCG(F,P)$ の元とみてその合成を考えることで[21]、open book と接触三次元多様体との Giroux 対応と同様に、接触三次元多様体 $(M_{(S,\phi)}, \xi_{(S,\phi)})$ 内の transverse link L を $MCG(S,P)$ の適当な元 $f \in MCG(S,P)$ と対応させて表示することができる。

$B_n(F), MCG(S,P)$ の positivity と (transverse) link の関連について下にまとめる。

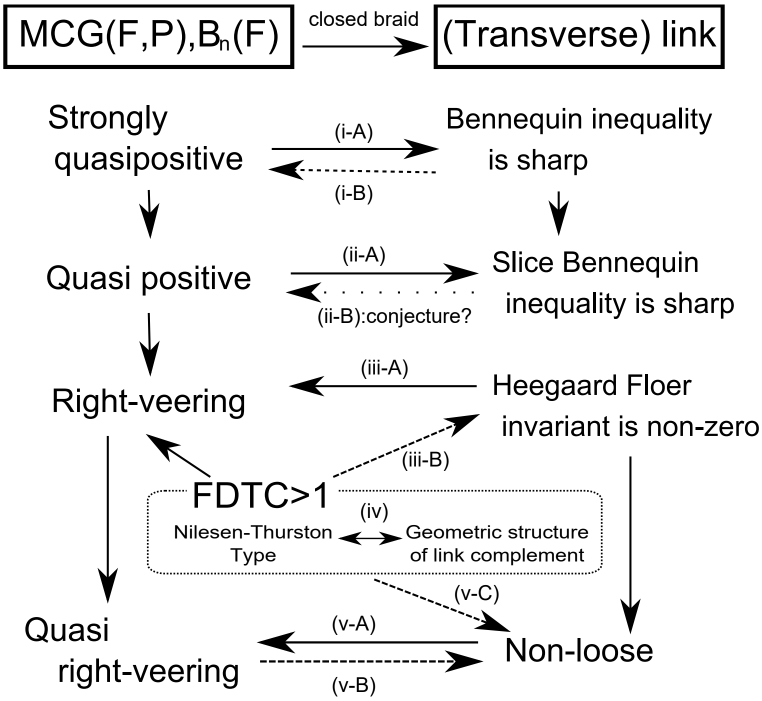

図 3: $MCG(S,P)$ あるいは $B_n(F)$ の positivity とトポロジー

(i),(ii) では簡単のため古典的な braid 群と標準的な接触 S^3 内の transverse knot について述べる[22]。(iii),(iv) では一般の open book 内の closed braid を考える。

(i) 標準的な接触構造の入った S^3 内の transverse knot K について不等式

$$sl(K) \leq 2g(K) - 1 \qquad \text{(Bennequin 不等式 [2, 8])}$$

が成り立つ。ここで、$g(K)$ は K の種数であり、$sl(K)$ は self-linking number と呼ばれる transverse knot の不変量である。K が closed n-braid $\widehat{\beta}$ で与えられているときには self-linking number は β の exponent sum $e(\beta)$ と Braidβ のひもの本数 n を用いて

$$sl(\widehat{\beta}) = -n + e(\beta) \qquad \text{(Bennequin 公式 [2])}$$

で与えられる。

[21] 詳細は [19] 参照。ここでは細部にはあまり深入りしない

[22] 適当な仮定を追加するなどすることで、一般の open book 内の closed braid についても議論ができ、一部の結果は一般の場合に拡張されている。

(i-A) Bennequin 不等式及び Beenquin 公式より β が strongly quasipositive であれば Bennequin 不等式は等式となる。

(i-B) (i-A) の逆も正しいだろうと予想されている。[15, 10] では fibered knot について逆の成立が示されている。[22] では $FDTC > 1$ という仮定の下で、逆の成立を示した[23]。

(ii) 標準的な接触構造の入った S^3 内の transverse knot K について、より強く次の不等式が知られている。

$$sl(K) \leq 2g_4(K) - 1 \qquad \text{(Slice Bennequin 不等式 [30])}$$

ここで、$g_4(K)$ は K の slice 種数である。

(ii-A) Quasipositive braid については $\gamma\sigma_i\gamma^{-1}$ を ribbon singularity を持つねじれた band として immersed Seifert 曲面を構成することで（ribbon singularity は B^4 に押し込むと解消できるので）Slice Bennequin 不等式は等式となる。また、quasipositive braid の closure となる link は $\mathbb{C}^2$ 内の complex curve と unit ball の intersection として現れる link であることが知られている [4, 29]

(ii-B) (ii-A) の逆も正しいだろうと予想されている（と思う）。

(iii) (M, ξ) 内の Transverse knot について $-M$ の Heegaard Floer homology に値をとる不変量 $\theta(K)$ が定義されている [1, 23]。

(iii-A) $\theta(K) \neq 0$ ならば K を表すすべての braid は right-veering である [1]。

(iii-B) (標準的な接触構造を持つ S^3 の場合) 逆に $K = \widehat{\beta}$ となる braidβ の FDTC> 1 ならば $\theta(K) \neq 0$ である [28]。

(iv) FDTC> 1[24]のとき β の Nielsen-Thruston 分類と $\widehat{\beta}$ の補空間の幾何構造が一対一に対応する [16, 19]。

(v) Transverse knot K の補空間が overtwisted disk を含むとき K を loose と呼び、そうでないとき non-loose と呼ぶ。

(v-A) K が non-loose であれば、K を表すすべての braid は quasi right-veering である [21]。

(v-B) 逆に、K を表すすべての braid は quasi right-veering ならば、K は non-loose である [21]。（従って、quasi right-veering はちょうど open book での right-veering の概念に対応する）。

(v-C) S が planar であり、かつ FDTC> 1 であれば closed braid $\widehat{\beta}$ は non-loose である [21]。

参考文献

[1] J. Baldwin, S. Vela-Vick and V. Vértesi, *On the equivalence of Legendrian and transverse invariants in knot Floer homology,* Geom. Topol. **17** (2013), 925–974.

[2] D. Bennequin, *Entrelacements et équations de Pfaff,* Astérisque, 107–108, (1983) 87-161.

[3] J. Birman, *Braids, Links, and Mapping Class Groups,* Annals of Math. Studies **82**, Princeton Univ. Press (1974).

[4] M. Boileau, S. Orevkov, *Quasi-positivité d' une courbe analytique dans une boule* pseudo-convexe, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **332** (2001) 825–830.

[5] D. Calegari and N. Dunfield, *Laminations and groups of homeomorphisms of the circle*, Invent. Math. **152** (2003), 149–204.

[6] Y. Eliashberg, *Classification of overtwisted contact structures on 3-manifolds,* Invent. Math. **98** (1989), 623-637.

[23] より一般に、[22] では FDTC$> k+1$ の仮定の下で Bennequin 不等式の右辺と左辺の差が k 以下になるような braid の特徴付けを与えた。

[24] S の boundary が連結でないときは FDTC> 4 の仮定が必要。

[7] Y. Eliashberg *Topological characterization of Stein manifolds of dimension > 2,* Internat. J. Math. **1** (1990) 29–46.

[8] Y. Eliashberg, *Contact 3-manifolds twenty years since J. Martinet's work,* Ann. Inst. Fourier (Grenoble). **42** (1992), 165-192.

[9] J. Etnyre and J. Van Horn-Morris, *Monoids in the mapping class group*, Geom. Topol. Monographs **19** (2015) 319–365.

[10] J. Etnyre and J. Van Horn-Morris, *Fibered transverse knots and the Bennequin bound,* Int. Math. Res. Not. IMRN 2011, 1483–1509.

[11] K. Honda, W. Kazez and G. Matić, *Right-veering diffeomorphisms of compact surfaces with boundary,* Invent. math. **169**, (2007), 427-449.

[12] K. Honda, W. Kazez, and G. Matić, *Right-veering diffeomorphisms of compact surfaces with boundary II,* Geom. Topol. **12** (2008), 2057-2094.

[13] E. Giroux, *Géométrie de contact: de la dimension trois vres les dimensions supérieures,* Proceedings of the International Congress of Mathematics, (Beijing, 2002), 405-414.

[14] K. Hayden, *Quasipositive links and Stein surfaces*, arXiv:1703.10150v1.

[15] M. Hedden, *Notions of positivity and the Ozsváth-Szabó concordance invariant,* J. Knot Theory Ramifications **19** (2010), 617–629.

[16] T. Ito, *Braid ordering and the geometry of closed braids,* Geom. Topol. **15** (2011), 473–498.

[17] T. Ito, *On a structure of random open books and closed braids,* Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 91 (2015), 160–162.

[18] T. Ito and K. Kawamuro, *Open book foliations,* Geom. Topol. **18**, (2014) 1581-1634.

[19] T. Ito and K. Kawamuro, *Essential open book foliation and fractional Dehn twist coefficient*, Geom. Dedicata, **187** (2017) 17–67.

[20] T. Ito and K. Kawamuro, *Overtwisted discs in planar open books*, Internat. J. Math. **26**, 1550027 (2015) 29pages.

[21] T. Ito and K. Kawamuro, *Quasi right-veering braids and non-loose links,* arXiv:1601.07084

[22] T. Ito and K. Kawamuro, *The defect of Bennequin-Eliashberg inequality and Bennequin surfaces,* arXiv:1703.09322

[23] P. Lisca, P. Ozsváth, A. Stipsicz and Z. Szabó, *Heegaard Floer invariants of Legendrian knots in contact three-manifolds,* J. Eur. Math. Soc. **11** (2009), 1307–1363.

[24] A. Loi and R. Piergallini, *Compact Stein surface with boundary as branched covers of B^4*, Invent. Math. **143** (2001) 325–348.

[25] A. Malyutin, *Twist number of (closed) braids*, St. Petersburg Math. J. **16** (2005), 791–813.

[26] Y. Mitsumatsu and A. Mori *On Bennequin's Isotopy Lemma,* an appendix to *Convergence of contact structures to foliations.* Foliations 2005, 365-371, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2006.

[27] E. Pavelescu, *Braiding knots in contact 3-manifolds.* Pacific J. Math. **253** (2011),no. 2, 475-487.

[28] O. Plamenevskaya, *Transverse invariants and right-veering*, arXiv. 1509.01732.

[29] L. Rudolph, *Algebraic functions and closed braids*, Topology **22** (1983) 191–202.

[30] L. Rudolph, *Quasipositivity as an obstruction to sliceness,* Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **29** (1993), 51–59.

[31] W. Thurston, H. Winkelnkemper, *On the existence of contact forms.* Proc. Amer. Math. Soc. **52** (1975), 345-347.

[32] A. Wand, *Detecting tightness via open book decompositions,* Interactions between low-dimensional topology and mapping class groups, 291–317, Geom. Topol. Monogr., **19**, Geom. Topol. Publ., Coventry, 2015

[33] C. Wendl, *Strongly filalble contact 3-manifolds and J-holomorphic foliations.* Duke. Math. J. **151** (2010), 337–384.