Generic linear perturbations

一木　俊助　(横浜国立大学)*

1. 序

本節では, 先行研究や研究の動機及び概要について述べる. 以下, 特に断らない限り, 多様体及び写像は全て C^∞ 級とし, ℓ, m, n は正の整数を表すこととする. コンパクト多様体上のモース関数や埋め込み写像に代表される, 写像空間（位相はホイットニー C^∞ 位相）の中で少し摂動したとしても依然としてその本質的な性質は保たれる良い性質をもつ写像, すなわち安定写像は, 多様体を調べるという観点からも重要な対象であると言える. 安定写像に関する研究については, カタストロフ理論でも有名なルネ・トム (1923–2002) や, ジョン・マザー (1942–2017) によっても研究されており, 安定写像に関するマザーの一連の論文 [11]–[16] は本質的である. そこで, その重要な対象である安定写像は, はたして写像空間の中で稠密に存在しているのかという自然な疑問が沸き上がる. 実際にルネ・トムは, 「安定写像は写像空間の中で稠密に存在するのはいつか？」という問題を提出した. これは**構造安定性問題**とよばれている. この問題は, 1960 年代後半にマザーにより完全解決された. 以下の定理 1 のように, 安定写像の写像空間内における稠密性は, ソースとターゲットの次元対のみに依存し, その次元対も完全に知られている.

定理 1 ([16]). *N を n 次元コンパクト多様体, P を p 次元多様体とする. 写像空間 $C^\infty(N, P)$ の中で安定写像が稠密に存在するための必要十分条件は, 次元対 (n, p) が以下のいずれかを満たすことである.*

(1) $n < \frac{6}{7}p + \frac{8}{7}$ かつ $p - n \geq 4$

(2) $n < \frac{6}{7}p + \frac{9}{7}$ かつ $3 \geq p - n \geq 0$

(3) $p < 8$ かつ $p - n = -1$

(4) $p < 6$ かつ $p - n = -2$

(5) $p < 7$ かつ $p - n \leq -3$

(n, p)-平面の中で, 定理 1 の中の (1) から (5) のいずれかを満たす次元対 (n, p) の領域を**結構領域 (nice range)** とよび, 結構領域内の次元対 (n, p) を**結構次元対 (nice dimension)** とよぶ.

構造安定性問題は, 写像空間の位相（ホイットニー C^∞ 位相）によって定義された安定写像が, その写像空間の中に稠密に存在するかという問題であった. 構造安定性問題解決後のマザーの論文 [17] では, 今度は, コンパクト多様体からユークリッド空間への与えられた埋め込み写像に対してジェネリックに射影, すなわちジェネリックに線型写像を合成した合成写像が安定写像になるかという問題が扱われている.

本研究は科研費 (課題番号:16J06911) の助成を受けたものである.
2010 Mathematics Subject Classification: 57R35,57R42,57R45.
キーワード：generic linear perturbations, generic projections, transverse
* 日本学術振興会特別研究員 DC1
e-mail: ichiki-shunsuke-jb@ynu.jp

本講演の主目的は, そのジョン・マザーの論文 [17] の主定理の 1 つの拡張を与えることである. 詳しい主張の内容は第 3 節にて述べるが, 概要は以下である. N を n 次元多様体, $\pi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^\ell$ を線型写像, $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^\ell)$ を $\mathbb{R}^m$ から $\mathbb{R}^\ell$ への線型写像全体の空間とする. ここで, $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^\ell) = (\mathbb{R}^m)^\ell$ という自然な同一視が存在することに注意しておく. また, $\mathbb{R}^m$ 上の開集合 U 上で定義された写像 $F : U \to \mathbb{R}^\ell$ を任意に与える. さらに,

$$F_\pi = F + \pi$$

とおく. すなわち, 写像 $F_\pi : U \to \mathbb{R}^\ell$ は, 与えられた写像 $F : U \to \mathbb{R}^\ell$ の線型摂動である. [17] においては, 与えられた埋め込み $f : N \to \mathbb{R}^m$ とジェネリックな線型写像 $\pi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^\ell$ $(m > \ell)$ との合成写像が調べられている. 他方, 本講演では, 与えられた埋め込み $f : N \to U$ と写像 $F : U \to \mathbb{R}^\ell$ をジェネリックに線型摂動した写像との合成写像, すなわち $F_\pi \circ f : N \to \mathbb{R}^\ell$ について得られた結果を報告する.

すなわち, 本講演の主結果を一言で申し上げるならば, [17] における「ジェネリック射影（線型写像)」を「与えられた写像 F のジェネリックな線型摂動」にまで拡張した結果である. また, 時間の許す限り, 最近得られたその周辺の諸結果についてもご紹介させて頂く.

2. 準備

2.1. 基本的な概念の準備

この部分節の目的は, (多重) ジェットバンドル, 安定写像, 横断性等の, 特異点論における基礎的な概念の準備を行うことである. 詳しくは, [2] 等を参照して頂きたい.

N, P を多様体とし, $J^r(N,P)$ という記号で N から P への写像の各点における r-ジェット全体から構成されるジェットバンドルを表す. すると, 与えられた写像 $g : N \to P$ に対して, $j^r g : N \to J^r(N,P)$ $(q \mapsto j^r g(q))$ という写像が自然に定義できる.

$C^\infty(N,P)$ を N から P への写像全体から成るホイットニー C^∞ 位相の入った位相空間とする. また, 写像 $g : N \to P$ が写像 $h : N \to P$ に **$\mathcal{A}$-同値**であるとは, ソースの微分同相写像 $\Phi : N \to N$ とターゲットの微分同相写像 $\Psi : P \to P$ がそれぞれ存在して,

$$g = \Psi \circ h \circ \Phi^{-1}$$

が成り立つことである. そして, 写像 $g : N \to P$ が**安定写像**であるとは, g の $\mathcal{A}$-同値類が写像空間 $C^\infty(N,P)$ の中で開集合になっていることである.

さて, これから多重ジェットバンドルを定義する. 多様体 N の s 個の直積 N^s の部分集合として,

$$N^{(s)} = \{q = (q_1, \ldots, q_s) \in N^s \mid q_i \neq q_j (1 \leq i < j \leq s)\}$$

を定義すると, $N^{(s)}$ は N^s の開部分多様体となっている. また,

$${}_sJ^r(N,P) = \{(j^r g_1(q_1), \ldots, j^r g_s(q_s)) \in J^r(N,P)^s \mid q \in N^{(s)}\}$$

と定義すると, ${}_sJ^r(N,P)$ は $J^r(N,P)^s$ の開部分多様体となっており, これを多重ジェットバンドルとよぶことにする. ジェットバンドルと同様, 多重ジェットバンドルにおいても与えられた写像 $g : N \to P$ に対して, ${}_sj^r g : N^{(s)} \to {}_sJ^r(N,P)$ $((q_1, \ldots, q_s) \mapsto (j^r g(q_1), \ldots, j^r g(q_s)))$ という写像が自然に定義できる.

さて, 大域的特異点論の研究において重要な概念の 1 つである横断性の定義を行う.

定義 1. 多様体 N から多様体 P への写像 $g : N \to P$ が P の部分多様体 W に**横断的である**とは, 任意の点 $q \in N$ に対して, 以下のいずれかが成り立つことである.

(1) $g(q) \notin W$.

(2) $g(q) \in W$ かつ $dg_q(T_qN) + T_{g(q)}W = T_{g(q)}P$.

2.2. モジュラー部分多様体

この部分節の目的は, マザーの論文 [17] の中で定義されたモジュラー部分多様体という概念を定義することである. そのために, いくつか概念や記号を準備する.

定義 2. 以下の (1) – (4) すべてを満たすとき, π は集合 $\{1, \ldots, s\}$ の**分割**であるという.

(1) ${}^{\exists}A_1, \ldots, A_m \subset \{1, \ldots, s\}$ such that $\pi = \{A_1, \ldots, A_m\}$.

(2) $\bigcup_{i=1}^{m} A_i = \{1, \ldots, s\}$.

(3) ${}^{\forall}i \ (1 \leq i \leq m)$, $A_i \neq \emptyset$.

(4) ${}^{\forall}i, j \ (i \neq j)$, $A_i \cap A_j = \emptyset$.

π を集合 $\{1, \ldots, s\}$ の分割とし, $\pi = \{A_1, \ldots, A_m\}$ と表されているとする. マザーの定義に従い, P^{π} を以下のように定義する.

$$P^{\pi} = \{(y_1, \ldots, y_s) \in P^s \mid y_i = y_j \iff {}^{\exists}k \text{ such that } i, j \in A_k\}.$$

多重ジェットバンドル ${}_sJ^r(N, P)$ の部分集合 W が**不変である**とは,

$${}_sj^r g(q) \in W \Rightarrow {}_sj^r(H \circ g \circ h^{-1})(h(q)) \in W$$

を満たすことである. ここで, 写像 $H : P \to P$ 及び写像 $h : N \to N$ は任意の微分同相写像である.

以下, $q = (q_1, \ldots, q_s) \in N^{(s)}$, $g : N \to P$, $q' = (g(q_1), \ldots, g(q_s))$, $z = {}_sj^r g(q) \in {}_sJ^r(N, P)$ として固定する. $J^r(N, P)_{q_i}$ を点 $q_i \in N$ 上の $J^r(N, P)$ のファイバーとする. 同様に, ${}_sJ^r(N, P)_q$ (resp., ${}_sJ^r(N, P)_{q,q'}$) を点 q (resp., 点 (q, q')) 上の ${}_sJ^r(N, P)$ のファイバーとする.

また, $J^r(N, \mathbb{R})_{q_i}$ の部分集合で, 点 $q_i \in N$ において消えるような関数芽の r-ジェット全体の集合を $\mathfrak{m}_{q_i}$ と書くことにする. すなわち,

$$\mathfrak{m}_{q_i} = \{j^r h_i(q_i) \in J^r(N, \mathbb{R})_{q_i} \mid h_i : (N, q_i) \to (\mathbb{R}, 0)\}$$

. である.

そして, $J^r(N, \mathbb{R})_{q_i}$ たち及び $\mathfrak{m}_{q_i}$ たちの s 個の直和をそれぞれマザーに従い以下のようにおく.

$$J^r(N)_q = \bigoplus_{i=1}^{s} J^r(N, \mathbb{R})_{q_i}.$$

$$\mathfrak{m}_q = \bigoplus_{i=1}^{s} \mathfrak{m}_{q_i}.$$

ちなみに, $J^r(N)_q$ は実多元環, そして $\mathfrak{m}_q \subset J^r(N)_q$ はそのイデアルとなっている.

TP を P の接バンドルとし, $g^*TP = \bigcup_{x \in N} T_{g(x)}P$ と定義する. g^*TP から写像 g のソースの多様体 N への自然な射影を $\pi_g : g^*TP \to N$ $(\pi_g(v_{g(x)}) = x)$ とおく. また, $id_{(N,q_i)} : (N, q_i) \to (N, q_i)$ を恒等写像芽とする. ここで,

$$J^r(g^*TP)_{q_i} = \{j^r\xi(q_i) \in J^r(N, g^*TP) \mid \xi : (N, q_i) \to g^*TP, \pi_g \circ \xi = id_{(N,q_i)}\}$$

とおく. (上記の写像芽 $\xi : (N, q_i) \to g^*TP$ は, 点 $q_i \in N$ のまわりで定義された写像芽 g に沿ったベクトル場である.) そして, $J^r(g^*TP)_{q_i}$ たちの s 個の直和を

$$J^r(g^*TP)_q = \bigoplus_{i=1}^{s} J^r(g^*TP)_{q_i}$$

とおく. ここで, $J^r(g^*TP)_q$ は $J^r(N)_q$-加群となっている. また, $\mathfrak{m}_q J^r(g^*TP)_q$ を $\mathfrak{m}_q$ の元と $J^r(g^*TP)_q$ の元の積の有限和から成る集合とする. 具体的に表示すると以下のように書けることが分かる.

$$\mathfrak{m}_q J^r(g^*TP)_q = J^r(g^*TP)_q \cap \{{}_sj^r\xi(q) \in {}_sJ^r(N, TP)_q \mid \xi(q_1) = \cdots = \xi(q_s) = 0\}.$$

このとき, $\mathbb{R}$ ベクトル空間として以下の同一視 $(*)$ が存在することに注意する. 実際に, この同一視はモジュラー部分多様体の定義において登場する.

$$T({}_sJ^r(N, P)_{q,q'})_z = \mathfrak{m}_q J^r(g^*TP)_q. \qquad (*)$$

この同一視 $(*)$ により, 左辺 $T({}_sJ^r(N, P)_{q,q'})_z$ の部分ベクトル空間を, 右辺 $\mathfrak{m}_q J^r(g^*TP)_q$ の部分ベクトル空間として扱うことができる.

このことを詳細に説明すると, 以下のようになる. W を多重ジェットバンドル ${}_sJ^r(N, P)$ の部分多様体とする. そして, W の任意の元

$$z = {}_sj^r g(q) \in W \ (q = (q_1, \ldots, q_s) \in N^{(s)}, \ g : N \to P)$$

をとる. 簡略化のため $q' = (g(q_1), \ldots, g(q_s))$ とおく. (q, q') 上における W のファイバーを $W_{q,q'}$ とおく . このとき, 多様体 $W_{q,q'}$ の点 z における接空間 $T(W_{q,q'})_z$ は, 当然 $T({}_sJ^r(N, P)_{q,q'})_z$ の部分ベクトル空間となっているが, 同一視 $(*)$ により, $T(W_{q,q'})_z$ は $\mathfrak{m}_q J^r(g^*TP)_q$ の部分ベクトル空間と同一視でき, この部分ベクトル空間を記号 $E(g, q, W)$ と表記する.

それでは, モジュラー部分多様体の定義を与える.

定義 3 ([17])**.** 多重ジェットバンドル ${}_sJ^r(N, P)$ の部分多様体 W は, 以下の (α) と (β) の両方を満たすとき, **モジュラー**である (あるいは**モジュラー部分多様体**である) とよばれる.

(α) W は不変な部分多様体であり, ある分割 π が存在し, $\Pi(W) \subset P^\pi$ である. ここで, 写像 $\Pi : {}_sJ^r(N, P) \to P^s$ は, $\Pi({}_sj^r g(q)) = (g(q_1), \ldots, g(q_s))$ で定義される自然な射影である.

(β) ${}_sj^r g(q) \in W$ を満たすような任意の点 $q \in N^{(s)}$ 及び, 任意の写像 $g : N \to P$ に対し, $E(g, q, W)$ は $J^r(N)_q$-部分加群である.

モジュラー部分多様体の例としては, 例えば, マザーの定義した contact classes ($\mathcal{K}^r$-軌道) が挙げられる.

3. 主結果

第1節に記載のとおり, $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^\ell)$ とは, $\mathbb{R}^m$ から $\mathbb{R}^\ell$ への線型写像全体から成る集合であり, $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^\ell) = (\mathbb{R}^m)^\ell$ という自然な同一視が存在することに注意しておく.

本講演にてご紹介する主結果は定理4である. その前に, マザーの論文[17]の主定理及びその有用な応用をご紹介する.

定理 2 ([17])**.** 写像 f を n 次元多様体 N から $\mathbb{R}^m$ への埋め込みとする. W を ${}_sJ^r(N, \mathbb{R}^\ell)$ のモジュラー部分多様体とする. また, $m > \ell$ とする. このとき, $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^\ell)$ の測度0の部分集合 Σ が存在し, 任意の $\pi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^\ell) - \Sigma$ に対して, ${}_sj^r(\pi \circ f) : N^{(s)} \to {}_sJ^r(N, \mathbb{R}^\ell)$ は W に横断的である.

定理2の応用として以下の定理はよく知られている.

定理 3 ([17])**.** 写像 f を n 次元コンパクト多様体 N から $\mathbb{R}^m$ への埋め込みとする. また, (n, ℓ) を結構次元対 (*nice dimension*), $m > \ell$ とする. このとき, $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^\ell)$ の測度0の部分集合 Σ が存在し, 任意の $\pi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^\ell) - \Sigma$ に対して, $\pi \circ f : N \to \mathbb{R}^\ell$ は安定写像である.

本講演における主定理は以下である.

定理 4 ([3])**.** 写像 f を n 次元多様体 N から $\mathbb{R}^m$ の開集合 U への埋め込みとする. また, $F : U \to \mathbb{R}^\ell$ を任意の写像とする. W を ${}_sJ^r(N, \mathbb{R}^\ell)$ のモジュラー部分多様体とする. このとき, $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^\ell)$ の測度0の部分集合 Σ が存在し, 任意の $\pi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^\ell) - \Sigma$ に対して, ${}_sj^r(F_\pi \circ f) : N^{(s)} \to {}_sJ^r(N, \mathbb{R}^\ell)$ は W に横断的である.

定理2から定理3を導くマザーの証明と全く同様の方法によって, 定理4から系1が従う.

系 1 ([3])**.** 写像 f を n 次元コンパクト多様体 N から $\mathbb{R}^m$ の開集合 U への埋め込みとする. また, $F : U \to \mathbb{R}^\ell$ を任意の写像とする. また, (n, ℓ) を結構次元対 (*nice dimension*) とする. このとき, $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^\ell)$ の測度0の部分集合 Σ が存在し, 任意の $\pi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^\ell) - \Sigma$ に対して, $F_\pi \circ f : N \to \mathbb{R}^\ell$ は安定写像である.

3.1. Remark

1. $F = 0$ かつ $U = \mathbb{R}^m$ かつ $m > \ell$ の場合, 定理4は定理2に, 系1は定理3に一致する.

2. 定理3において, $m \leq \ell$ の場合は, 埋め込み $f : N \to \mathbb{R}^m$ に対して, ジェネリックに線型写像 π を合成した $\pi \circ f : N \to \mathbb{R}^\ell$ は再び埋め込みとなることは明らかである. 埋め込みは安定写像であることから, $m \leq \ell$ の場合は, 主張は自明となる. 一方, 系1の場合は, $m \leq \ell$ の場合においても主張は自明ではないことに注意しておく.

3. 定理4において, 与えられた写像 F の定義域を $\mathbb{R}^m$ ではなく $\mathbb{R}^m$ の開集合 U と一般化しているが, その理由は以下である. 例えば, 写像 $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(x \mapsto |x|)$ は原点においては微分できないため, 定理4を適応することはできない. しかし, $U = \mathbb{R} - \{0\}$ として, $F|_U$ を考えれば,適応できる. すなわち適応可能な写像の範囲を広くするためである.

4. 主結果の応用例

i, j を正の整数, $p_i = (p_{i1}, p_{i2}, \ldots, p_{im})$ $(1 \le i \le \ell)$ を $\mathbb{R}^m$ 上の点, $A = (a_{ij})_{1\le i\le \ell, 1\le j\le m}$ を, どの成分も 0 でない $\ell \times m$ の行列とする. このとき, 以下で定義される特殊な二次写像 $G_{(p,A)} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^\ell$ を**一般化された距離二乗写像** ([5], [8], [9], [10]) とよぶ.

$$G_{(p,A)}(x) = \left(\sum_{j=1}^m a_{1j}(x_j - p_{1j})^2, \sum_{j=1}^m a_{2j}(x_j - p_{2j})^2, \ldots, \sum_{j=1}^m a_{\ell j}(x_j - p_{\ell j})^2 \right).$$

ここで, $p = (p_1, p_2, \ldots, p_\ell) \in (\mathbb{R}^m)^\ell$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ である. また, 行列 A の全ての成分が 1 である場合, **距離二乗写像** ([6]) とよぶ. すなわち, 距離二乗写像とは距離二乗関数を写像化したものである. また, 行列 A が, $a_{i1} = -1$ かつ $a_{ij} = 1$ $(j \neq 1)$ のとき, **ローレンツ距離二乗写像** ([7]) とよぶ. すなわち, ローレンツ距離二乗写像とはローレンツ距離二乗関数を写像化したものである.

したがって, 一般化された距離二乗写像とは距離二乗写像, ローレンツ距離二乗写像を包括する概念である.

元々の距離二乗写像の研究の動機は以下である. 古来より幾何学において, 高さ関数と距離二乗関数は, 曲線や曲面等を調べるための有用な概念であった ([1]). 高さ関数を成分とする写像は射影に他ならず, [17] においても埋め込みと射影との合成が調べられている等, 高さ関数を写像化した概念であった射影はよく調べられていると言える. 他方, 距離二乗関数を並べてできる写像, すなわち距離二乗写像に関する幾何学的研究は見当たらず, 第一段階として, その写像自身の性質の研究が必要であった (その性質については [6] を参照して頂きたい). そして, 今後の研究課題の 1 つとして, 高さ関数, 距離二乗関数と同様, 距離二乗写像の微分幾何学への応用が大きな課題である. それが実現できれば, 関数を並べて写像化する利点を見出すことにもつながるであろう.

さて, 話を戻し, 本講演の主定理である定理 4 を, 一般化された距離二乗写像に適応して得られる結果をご紹介する.

命題 1 ([3])**.** *写像 f を n 次元多様体 N から $\mathbb{R}^m$ への埋め込みとする. W を ${}_sJ^r(N, \mathbb{R}^\ell)$ のモジュラー部分多様体とする. 行列 A を, どの成分も 0 でない $\ell \times m$ の行列とする. このとき, $(\mathbb{R}^m)^\ell$ の測度 0 の部分集合 Σ が存在し, 任意の $p \in (\mathbb{R}^m)^\ell - \Sigma$ に対して, ${}_sj^r(G_{(p,A)} \circ f) : N^{(s)} \to {}_sJ^r(N, \mathbb{R}^\ell)$ は W に横断的である.*

系 2 ([3])**.** *写像 f を n 次元コンパクト多様体 N から $\mathbb{R}^m$ への埋め込みとする. また, (n, ℓ) を結構次元対 (nice dimension) とする. 行列 A を, どの成分も 0 でない $\ell \times m$ の行列とする. このとき, $(\mathbb{R}^m)^\ell$ の測度 0 の部分集合 Σ が存在し, 任意の $p \in (\mathbb{R}^m)^\ell - \Sigma$ に対して, $G_{(p,A)} \circ f : N \to \mathbb{R}^\ell$ は安定写像である.*

5. その他の関連結果

今回の主定理（第 3 節, 定理 4）では, 多様体 N から $\mathbb{R}^m$ の開集合 U への与えられた写像 $f : N \to U$ が埋め込みの場合であったが, 本節では, 「埋め込み」を「はめ込み」にまで条件を落とした場合の諸結果についてご紹介する. 本節の内容は, 2017 年春に首都大学東京で行われた日本数学会における講演内容も一部含まれているが, 時間の関係上紹介できなかった内容も含めて記載した.

$\mathbb{R}^n$ の原点を $\mathbb{R}^\ell$ の原点に写す写像芽の 1-ジェット空間 $J^1(n, \ell)$ の部分集合 X が **$\mathcal{A}^1$-不変**であるとは, $j^1g(0) \in X$ なる $g : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^\ell, 0)$ に対し, 任意の微分同相写像芽

$H:(\mathbb{R}^\ell,0)\to(\mathbb{R}^\ell,0)$, $h:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^n,0)$ を合成したとしても, $j^1(H\circ g\circ h^{-1})(0)\in X$ となることである. 任意の $\mathcal{A}^1$-不変な $J^1(n,\ell)$ の部分多様体 X に対し, X をファイバーとする $J^1(N,\mathbb{R}^\ell)$ のサブファイバーバンドルを $X(N,\mathbb{R}^\ell)$ という記号で表すことにする. このとき, はめ込み $f:N\to U$ に対して, 以下が成り立つ.

尚, これまでの節と同様に, $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^\ell)$ とは, $\mathbb{R}^m$ から $\mathbb{R}^\ell$ への線型写像全体から成る集合であり, $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^\ell)=(\mathbb{R}^m)^\ell$ という自然な同一視が存在することに注意しておく.

定理 5 ([4])**.** 写像 f を n 次元多様体 N から $\mathbb{R}^m$ の開集合 U へのはめ込みとする. また, $F:U\to\mathbb{R}^\ell$ を任意の写像, X を $\mathcal{A}^1$-不変な $J^1(n,\ell)$ の任意の部分多様体としてそれぞれ与える. このとき, $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^\ell)$ の測度 0 の部分集合 Σ が存在し, 任意の $\pi\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^\ell)-\Sigma$ に対して, $j^1(F_\pi\circ f):N\to J^1(N,\mathbb{R}^\ell)$ は $X(N,\mathbb{R}^\ell)$ に横断的である.

定理5のいくつかの応用例として, 例えば以下の諸結果が得られる. まずは, 定理5における合成写像 $F_\pi\circ f$ のターゲットの次元が1の場合の結果を説明する. 写像 $g:N\to\mathbb{R}$ の特異点が非退化なとき, その特異点を**モース特異点**という.

系 3 ([4])**.** 写像 f を n 次元多様体 N から $\mathbb{R}^m$ の開集合 U へのはめ込みとする. そして, $F:U\to\mathbb{R}$ を任意の写像として与える. このとき, $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R})$ の測度 0 の部分集合 Σ が存在し, 任意の $\pi\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R})-\Sigma$ に対して, $F_\pi\circ f:N\to\mathbb{R}$ の特異点はモース特異点のみである.

ターゲットの次元を高くした場合については, 同じく定理5より, 以下の系4及び系5が得られる.

写像 $g:N\to\mathbb{R}^{2n-1}$ $(n=\dim N, n\geq 2)$ の特異点 q が**ホイットニーの傘特異点**であるとは, ソースの微分同相写像芽 $h:(N,q)\to(\mathbb{R}^n,0)$ とターゲットの微分同相写像芽 $H:(\mathbb{R}^{2n-1},g(q))\to(\mathbb{R}^{2n-1},0)$ が存在し,

$$H\circ g\circ h^{-1}(x_1,\ldots,x_n)=(x_1^2,x_1x_2,\ldots,x_1x_n,x_2,\ldots,x_n)$$

を満たすことである. ここで, $(x_1,\ldots,x_n)$ は, 原点のまわりの局所座標である.

系 4 ([4])**.** 写像 f を n 次元多様体 N から $\mathbb{R}^m$ の開集合 U へのはめ込みとする. (ただし, $n\geq 2$) そして, $F:U\to\mathbb{R}^{2n-1}$ を任意の写像として与える. このとき, $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^{2n-1})$ の測度 0 の部分集合 Σ が存在し, 任意の $\pi\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^{2n-1})-\Sigma$ に対して, $F_\pi\circ f:N\to\mathbb{R}^{2n-1}$ の特異点はホイットニーの傘特異点のみである.

系 5 ([4])**.** 次元対 (n,ℓ) は, $2n\leq\ell$ を満たすとする. 写像 f を n 次元多様体 N から $\mathbb{R}^m$ の開集合 U へのはめ込みとする. そして, $F:U\to\mathbb{R}^\ell$ を任意の写像として与える. このとき, $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^\ell)$ の測度 0 の部分集合 Σ が存在し, 任意の $\pi\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^\ell)-\Sigma$ に対して, $F_\pi\circ f:N\to\mathbb{R}^\ell$ は, はめ込みになる.

参考文献

[1] J. W. Bruce and P. J. Giblin, *Curves and Singularities (second edition)*, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

[2] M. Golubitsky and V. Guillemin, *Stable mappings and their singularities*, Graduate Texts in Mathematics **14**, Springer, New York, 1973.

[3] S. Ichiki, *Generic linear perturbations*, arXiv:1607.03220v2.

[4] S. Ichiki, *Composing generic linearly perturbed mappings and immersions/injections*, arXiv:1612.01100.

[5] S. Ichiki, *Geometric interpretation of generalized distance-squared mappings of* $\mathbb{R}^2$ *into* $\mathbb{R}^\ell$ $(\ell \geq 3)$, arXiv:1701.07938.

[6] S. Ichiki and T. Nishimura, *Distance-squared mappings*, Topology Appl., **160** (2013), 1005–1016.

[7] S. Ichiki and T. Nishimura, *Recognizable classification of Lorentzian distance-squared mappings*, J. Geom. Phys., **81** (2014), 62–71.

[8] S. Ichiki and T. Nishimura, *Generalized distance-squared mappings of* $\mathbb{R}^{n+1}$ *into* $\mathbb{R}^{2n+1}$, Contemporary Mathematics, Amer. Math. Soc., Providence RI, **675** (2016), 121-132.

[9] S. Ichiki, T. Nishimura, *Preservation of immersed or injective properties by composing generic generalized distance-squared mappings*, accepted for publication in Proceedings of BRAZIL-MEXICO-2015 Singularity meetings at Salvador, to be published in a volume of Springer Proceedings in Mathematics and Statistics.

[10] S. Ichiki, T. Nishimura, R. Oset Sinha and M. A. S. Ruas, *Generalized distance-squared mappings of the plane into the plane*, Adv. Geom., **16** (2016), 189–198.

[11] J. N. Mather, *Stability of* C^∞ *mappings* I: *The division theorem*, Ann. of Math., (2) **87** (1968), 89–104.

[12] J. N. Mather, *Stability of* C^∞ *mapping* II: *Infinitesimal stability implies stability*, Ann. of Math., (2) **89** (1969), 254–291.

[13] J. N. Mather, *Stability of* C^∞ *mappings* III: *Finitely determined map-germs*, Pub. Math. I.H.E.S., **35** (1968), 279–308.

[14] J. N. Mather, *Stability of* C^∞ *mappings* IV: *Classification of stable map-germs by* $\mathbb{R}$-*algebras*, Pub. Math. I.H.E.S., **37** (1969), 223–248.

[15] J. N. Mather, *Stability of* C^∞ *mappings* V: *Transversality*, Adv. in Math., **4** (1970), 301–336.

[16] J. N. Mather, *Stability of* C^∞ *mappings* VI: *The nice dimensions*, Proc. Liverpool singularities symposium I Lecture Notes in Math., **192** (1971), 207–253.

[17] J. N. Mather, *Generic projections*, Ann. of Math., (2), **98** (1973), 226–245.