

ヘッセンバーグ多様体と超平面配置

堀口 達也 (大阪大学大学院情報科学研究科、大阪市立大学数学研究所)

1. 序文

旗多様体 $\mathcal{Fl}(\mathbb{C}^n)$ は \mathbb{C}^n の線形部分空間の列 $V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \subsetneq V_n = \mathbb{C}^n$ 全体からなる空間である。ここで、各 V_i は i 次元線形部分空間を表す。

$X : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ を冪零な線形写像とし、 X で固定される旗 $V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \subsetneq V_n = \mathbb{C}^n$ (すなわち $XV_i \subset V_i$ ($i = 1, \dots, n$) を満たすもの) 全体のなす空間はスプリンガー多様体と呼ばれ、1970年代後半頃から対称群 \mathfrak{S}_n の幾何学的表現の実現としてスプリンガーにより導入された ([32, 33])。スプリンガーはこの多様体のコホモロジーの上に対称群 \mathfrak{S}_n の作用を構成し、それを最高次数のコホモロジー群の上に制限すると、 \mathfrak{S}_n の既約表現が現れるように構成した。対称群 \mathfrak{S}_n のすべての既約表現は幾何学的なこの構成で実現することができる。また、スプリンガー多様体のコホモロジー環の明示的な表示は [13, 34] で調べられており、[6, 19] では同変コホモロジー環を調べている。

ヘッセンバーグ多様体は1980年代後半頃に導入され ([14, 15])、スプリンガー多様体を一般化した概念である。 $X : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ を線形写像とし、 $h : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ を広義単調増加関数で $h(i) \geq i$ ($i = 1, \dots, n$) を満たすものとする。このとき、以下で定義される旗多様体の射影部分多様体

$$\text{Hess}(X, h) := \{V_\bullet \in \mathcal{Fl}(\mathbb{C}^n) \mid XV_i \subset V_{h(i)} \text{ for } i = 1, 2, \dots, n\}$$

をヘッセンバーグ多様体、 h をヘッセンバーグ関数と呼び、 $h = (h(1), h(2), \dots, h(n))$ で表す。ヘッセンバーグ多様体の幾何・トポロジーは [1, 2, 3, 11, 16, 20, 25, 26, 35] などで研究されており、様々な他分野と関連があることが知られてきている比較的新しい研究対象である。

本稿では、線形写像 $X : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ を、正則な冪零写像 N (ジョルダンブロックが1つだけの冪零な線形写像) または正則な半単純写像 S (対角化可能で固有値がすべて異なる線形写像) としたヘッセンバーグ多様体のトポロジーに関する研究 ([4, 5, 9]) を紹介する。 $\text{Hess}(N, h)$ は正則な冪零ヘッセンバーグ多様体、 $\text{Hess}(S, h)$ は正則な半単純ヘッセンバーグ多様体と呼ばれ、これらは特別な多様体を含んでいる。実際、ヘッセンバーグ関数を $h = (2, 3, 4, \dots, n, n)$ としたとき、 $\text{Hess}(N, h)$ は旗多様体の量子コホモロジーと関連するピーターソン多様体であり ([22, 27])、 $\text{Hess}(S, h)$ は Weyl chambers (A型) を扇とするトーリック多様体と一致する ([14])。

正則な冪零ヘッセンバーグ多様体 $\text{Hess}(N, h)$ のコホモロジー環の明示的な表示は Mbriika-Tymoczko ([23]) により予想されていたが、[4, 5] においてコホモロジー環 $H^*(\text{Hess}(N, h))$ の明示的な表示を与え (本稿の定理 2.7)、Mbriika-Tymoczko 予想が正しくないことも確認された。さらに、 $H^*(\text{Hess}(N, h))$ の明示的な表示を用いることにより、[5] において正則な冪零ヘッセンバーグ多様体 $\text{Hess}(N, h)$ と正則な半単純ヘッセンバーグ多様体 $\text{Hess}(S, h)$ のコホモロジー環の間に次のような環同型が成り

立つという興味深い結果が得られた (本稿の定理 2.13) :

$$(1.1) \quad H^*(\text{Hess}(N, h)) \cong H^*(\text{Hess}(S, h))^{\mathfrak{S}_n}$$

ここで、コホモロジー $H^*(\text{Hess}(S, h))$ 上の対称群 \mathfrak{S}_n 表現は Tymoczko により定義されたもの ([36]) で、 $H^*(\text{Hess}(S, h))^{\mathfrak{S}_n}$ は \mathfrak{S}_n 不変部分環を表す。

上記の結果 (1.1) はグラフ理論への応用がある。Shareshian-Wachs は $H^*(\text{Hess}(S, h))$ 上の Tymoczko による対称群 \mathfrak{S}_n 表現 ([36]) がグラフ理論と綺麗な対応があるという予想を立てた ([29, 30])。もう少し詳しく述べると、Tymoczko による \mathfrak{S}_n 表現 $H^*(\text{Hess}(S, h))$ はヘッセンバーグ関数 h から定まるグラフ G_h の彩色対称関数と一致するという驚くべき予想である。上記の結果 (1.1) は Shareshian-Wachs によるこの予想の一部 (自明表現の部分) が正しいことを物語っている。現在、Shareshian-Wachs 予想は Brosnan-Chow によりモノドロミーの視点から解決され ([12])、その後すぐに Guay-Paquet はホップ代数を用いて Shareshian-Wachs 予想の別証明を与えた ([17])。さらに、Shareshian-Wachs 予想の解決は面白い応用をもたらす。それはグラフ理論における Stanley-Stembridge 予想が $H^*(\text{Hess}(S, h))$ 上の対称群 \mathfrak{S}_n 作用のふるまいを深く調べることにより解決されるということである ([29, 30])。

ヘッセンバーグ多様体は一般の Lie 型の旗多様体の射影部分多様体として定義できるため、環同型 (1.1) は A 型以外の任意の Lie 型でも成り立つかどうかという問題が考えられる。[9] において、超平面配置を経由することでこの問題が解決された (本稿の系 4.7)。厳密には、一般の Lie 型における正則な冪零ヘッセンバーグ多様体のコホモロジー環もしくは正則な半単純ヘッセンバーグ多様体のコホモロジー環の Weyl 群による不変部分環が、超平面配置で盛んに研究されている対数的導分を用いて記述できるという結果が得られた (本稿の定理 4.5、定理 4.6)。

本稿ではまず A 型ヘッセンバーグ多様体のトポロジーに関する結果について 2 節で紹介する。その後、3 節で超平面配置に関するいくつかの言葉の説明をし、4 節で一般の Lie 型ヘッセンバーグ多様体と超平面配置に関する結果について紹介する。これらの研究は、阿部拓氏 (大阪市立大学数学研究所)、阿部拓郎氏 (九州大学)、原田芽ぐみ氏 (マクマスター大学 (カナダ))、柘田幹也氏 (大阪市立大学)、村井聡氏 (大阪大学)、佐藤敬志氏 (大阪市立大学数学研究所) との共同研究である。

2. A 型ヘッセンバーグ多様体

A 型旗多様体 $\mathcal{Fl}(\mathbb{C}^n)$ は以下の \mathbb{C}^n の線形部分空間の列全体からなる空間である :

$$V_\bullet := (V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \subsetneq V_n = \mathbb{C}^n)$$

ここで、各 V_i は i 次元線形部分空間である。 A 型ヘッセンバーグ多様体は旗多様体 $\mathcal{Fl}(\mathbb{C}^n)$ の射影部分多様体であり、線形写像とヘッセンバーグ関数の 2 つのデータから定まる。まずはヘッセンバーグ関数の定義から始める。

定義 2.1. $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$ とする。関数 $h : [n] \rightarrow [n]$ がヘッセンバーグ関数であるとは、以下の 2 つの条件を満たすときにいう。

$$(i) \quad h(1) \leq h(2) \leq \dots \leq h(n)$$

$$(ii) \quad h(j) \geq j \text{ for } j = 1, 2, \dots, n$$

ヘッセンバーグ関数 h は各値を並べたもの $h = (h(1), h(2), \dots, h(n))$ で表す。

例 2.2. $n = 5$ とする。 $h = (3, 3, 4, 5, 5)$ はヘッセンバーグ関数である。ヘッセンバーグ関数 h を視覚化するために、各 j 列目に $h(j)$ 個の箱を並べた箱の集まりを考える。例えば、ヘッセンバーグ関数 $h = (3, 3, 4, 5, 5)$ は以下の箱の集まりを表す。

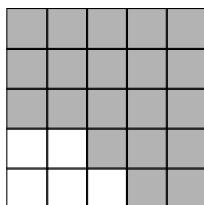


FIGURE 1. ヘッセンバーグ関数 $h = (3, 3, 4, 5, 5)$ に対応する箱の集まり

定義 2.3. 線形写像 $X : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ とヘッセンバーグ関数 $h : [n] \rightarrow [n]$ に対して、ヘッセンバーグ多様体 $\text{Hess}(X, h)$ は以下で定義される旗多様体 $\mathcal{Fl}(\mathbb{C}^n)$ の射影部分多様体である：

$$\text{Hess}(X, h) = \{V_\bullet \in \mathcal{Fl}(\mathbb{C}^n) \mid XV_i \subset V_{h(i)} \text{ for } i = 1, 2, \dots, n\}$$

X が零写像 O または $h = (n, n, \dots, n)$ のとき、ヘッセンバーグ多様体 $\text{Hess}(X, h)$ は全体の旗多様体 $\mathcal{Fl}(\mathbb{C}^n)$ に一致することが定義から分かる。また、任意の可逆行列 $g \in GL(n, \mathbb{C})$ に対して、

$$\text{Hess}(X, h) \cong \text{Hess}(gXg^{-1}, h); V_\bullet \mapsto gV_\bullet$$

であるので、 X をジョルダン標準形と仮定してもよい。

線形写像 X の性質に応じ、対応するヘッセンバーグ多様体 $\text{Hess}(X, h)$ もそのように呼ぶ。例えば、 X が冪零 (i.e. $\exists k, X^k = O$) のとき $\text{Hess}(X, h)$ を冪零ヘッセンバーグ多様体と呼ぶ。冪零ヘッセンバーグ多様体においてヘッセンバーグ関数を $h = (1, 2, \dots, n)$ と取ると対称群の表現と関連するスプリンガー多様体となる ([32, 33])。

X が正則な冪零写像 N と X が正則な半単純写像 S の2つの場合¹ におけるヘッセンバーグ多様体 $\text{Hess}(N, h)$ と $\text{Hess}(S, h)$ を考察していく。ここで、 X はジョルダン標準形と仮定してよいので、

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} c_1 & & & & \\ & c_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & c_n \end{pmatrix}$$

と取ってよい。ただし、 c_1, c_2, \dots, c_n は相異なる。

¹ X が半単純であるとは X が対角化可能のときを表し、 X が正則であるとは X のジョルダン標準形において各ジョルダンブロック J_i に属する対角成分を c_i としたときに c_i たちが相異なるときを表す。

注意 2.4. 以下ではヘッセンバーグ多様体のコホモロジー環²について考察していく。 $\text{Hess}(S, h)$ のコホモロジー環は S の固有値 c_1, c_2, \dots, c_n に依存しないので、 S の相異なる固有値の取り方は気にしなくてもよい。

2.1. 正則な冪零ヘッセンバーグ多様体 $\text{Hess}(N, h)$.

$h = (2, 3, 4, \dots, n, n)$ とする正則な冪零ヘッセンバーグ多様体 $\text{Hess}(N, h)$ はピーターソン多様体と呼ばれ、旗多様体の量子コホモロジーと関連していることが知られている ([22, 27])。旗多様体 $\mathcal{Fl}(\mathbb{C}^n)$ は $h = (n, n, \dots, n)$ とする $\text{Hess}(N, h)$ と思えたから、正則な冪零ヘッセンバーグ多様体はピーターソン多様体 Pet と旗多様体 $\mathcal{Fl}(\mathbb{C}^n)$ を離散的につなぐものと思える。まず、正則な冪零ヘッセンバーグ多様体 $\text{Hess}(N, h)$ の幾何学的性質について述べる：

定理 2.5 (Insko-Yong [20], Kostant [22], Sommers-Tymoczko [31], Tymoczko [35]). $\text{Hess}(N, h)$ を正則な冪零ヘッセンバーグ多様体とする。このとき、次が成立。

- (1) $\text{Hess}(N, h)$ は一般に特異点をもつ。
- (2) $\text{Hess}(N, h)$ の複素次元は $\sum_{j=1}^n (h(j) - j)$ である。
- (3) $\text{Hess}(N, h)$ は複素セル分割³をもつ。特に、 $\text{Hess}(N, h)$ の奇数次コホモロジーは消えている。

注意 2.6. 定理 2.5 (2) における $\text{Hess}(N, h)$ の複素次元 $\sum_{j=1}^n (h(j) - j)$ は、ヘッセンバーグ関数 h を箱の集まりと思えば、対角線より真に左下に位置する箱の個数を表す。例えば、ヘッセンバーグ関数 $h = (3, 3, 4, 5, 5)$ とする正則な冪零ヘッセンバーグ多様体の複素次元は5である。

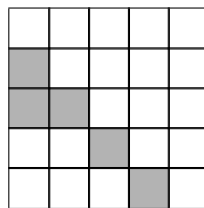


FIGURE 2. $h = (3, 3, 4, 5, 5)$ とする $\text{Hess}(N, h)$ の複素次元でカウントされる箱の集まり

次に、正則な冪零ヘッセンバーグ多様体 $\text{Hess}(N, h)$ のコホモロジー環について紹介する。旗多様体 $\mathcal{Fl}(\mathbb{C}^n)$ のコホモロジー環は

$$(2.1) \quad H^*(\mathcal{Fl}(\mathbb{C}^n)) \cong \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n] / (e_i(x_1, \dots, x_n) \mid 1 \leq i \leq n)$$

²本稿ではコホモロジーは実数係数の特異コホモロジーを表す。
³ここでのセル分割は代数トポロジーでよく使われる意味の胞体分割とは異なるが、それに似た概念である complex affine paving を表す。

で与えられることが知られている⁴。ここで、 x_i の次数は 2 で、 $e_i(x_1, \dots, x_n)$ は次数 i の基本対称式を表す。正則な冪零ヘッセンバーグ多様体 $\text{Hess}(N, h)$ のコホモロジー環については、以下の結果が得られた。

定理 2.7 (Abe-Harada-H-Masuda [4, 5]). $\text{Hess}(N, h)$ を正則な冪零ヘッセンバーグ多様体とする。このとき、包含写像 $\text{Hess}(N, h) \subset \mathcal{F}\ell(\mathbb{C}^n)$ が導く制限写像 $H^*(\mathcal{F}\ell(\mathbb{C}^n)) \rightarrow H^*(\text{Hess}(N, h))$ は全射であり、次の環同型が成立：

$$(2.2) \quad H^*(\text{Hess}(N, h)) \cong \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n] / \left(\sum_{k=1}^j \left(\prod_{\ell=j+1}^{h(j)} (x_k - x_\ell) \right) x_k \mid 1 \leq i \leq n \right)$$

ここで、 $h(j) = j$ のとき $\prod_{\ell=j+1}^{h(j)} (x_k - x_\ell) = 1$ とする。また、(2.2) に現れる x_i は (2.1) に現れる x_i の制限写像 $H^*(\mathcal{F}\ell(\mathbb{C}^n)) \rightarrow H^*(\text{Hess}(N, h))$ による像である。

注意 2.8. ピーターソン多様体のコホモロジー環の明示的な表示は [16] により与えられており、表示 (2.2) は [16] の表示を含んでいる。

特に、この表示 (2.2) から可換環論の一般論を用いることで次が得られる。

系 2.9 (Abe-Harada-H-Masuda [5]). 正則な冪零ヘッセンバーグ多様体 $\text{Hess}(N, h)$ のコホモロジー環はポアンカレ双対代数である。すなわち、 $m := \dim_{\mathbb{C}} \text{Hess}(N, h)$ とすると、ペアリング

$$H^{2k}(\text{Hess}(N, h)) \times H^{2m-2k}(\text{Hess}(N, h)) \rightarrow H^{2m}(\text{Hess}(N, h)) \cong \mathbb{R}$$

は非退化である ($0 \leq \forall k \leq m$)。ここで、最初の写像はカップ積をとる写像を表す。

2.2. 正則な半単純ヘッセンバーグ多様体 $\text{Hess}(S, h)$.

まず、正則な半単純ヘッセンバーグ多様体 $\text{Hess}(S, h)$ の幾何学的性質について述べる：

定理 2.10 (De Mari-Procesi-Shayman [14]). $\text{Hess}(S, h)$ を正則な半単純ヘッセンバーグ多様体とする。このとき、次が成立。

- (1) $\text{Hess}(S, h)$ は非特異である。
- (2) $\text{Hess}(S, h)$ の複素次元は $\sum_{j=1}^n (h(j) - j)$ である。
- (3) $\text{Hess}(S, h)$ は複素セル分割 (complex affine paving) をもつ。特に、 $\text{Hess}(S, h)$ の奇数次コホモロジーは消えている。
- (4) ヘッセンバーグ関数 $h = (2, 3, 4, \dots, n, n)$ とする $\text{Hess}(S, h)$ は、 A_{n-1} 型 Weyl chambers を扇とするトーリック多様体である。

注意 2.11. 定理 2.5 (2) と定理 2.10 (2) より、任意のヘッセンバーグ関数 h に対して、 $\text{Hess}(N, h)$ と $\text{Hess}(S, h)$ の複素次元は同じである：

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Hess}(N, h) = \dim_{\mathbb{C}} \text{Hess}(S, h)$$

⁴表示 (2.1) は整数係数でも成立。

注意 2.12. 定理 2.10 (4) より、正則な半単純ヘッセンバーグ多様体 $\text{Hess}(S, h)$ は A_{n-1} 型 Weyl cambers を扇とするトーリック多様体と旗多様体を離散的につなぐものと思える。

次に、正則な半単純ヘッセンバーグ多様体 $\text{Hess}(S, h)$ のコホモロジー環における現在の状況について述べる。正則な冪零ヘッセンバーグ多様体 $\text{Hess}(N, h)$ のときと違って、 $\text{Hess}(S, h)$ のコホモロジー環の表示を与えることは易しくはない。その理由は、包含写像 $\text{Hess}(S, h) \subset \mathcal{F}\ell(\mathbb{C}^n)$ から導かれる制限写像 $H^*(\mathcal{F}\ell(\mathbb{C}^n)) \rightarrow H^*(\text{Hess}(S, h))$ は一般に全射ではないというところから来る。すなわち、 $H^*(\text{Hess}(S, h))$ の \mathbb{R} -代数としての生成元を見つけなければならないのである ($H^*(\text{Hess}(S, h))$ の生成元として $H^*(\mathcal{F}\ell(\mathbb{C}^n))$ から来ないものがある!)。最近の結果として、ヘッセンバーグ関数 h が $h = (h(1), n, \dots, n)$ という特別な場合について $H^*(\text{Hess}(S, h))$ の生成元を見つけ、さらにコホモロジー環 $H^*(\text{Hess}(S, h))$ の明示的な表示も得られた ([7])。現在、一般のヘッセンバーグ関数 h については $H^*(\text{Hess}(S, h))$ の生成元すら得られていない状況である⁵。

一方、Tymoczko は GKM 理論を用いて、コホモロジー $H^*(\text{Hess}(S, h))$ の上に対称群 \mathfrak{S}_n の作用を構成した ([36])。この \mathfrak{S}_n 作用はヘッセンバーグ関数 h から定まるグラフ G_h の彩色対称関数と一致する! という驚くべき対応がある ([29, 30, 12, 17])。さらに、このグラフ理論との架け橋により、グラフ理論における Stanley-Stembridge 予想が $H^*(\text{Hess}(S, h))$ 上の対称群 \mathfrak{S}_n 作用のふるまいを深く調べることにより解決されることが知られている。一方で、この \mathfrak{S}_n 作用に関する $H^*(\text{Hess}(S, h))$ の不変部分環が、正則な冪零ヘッセンバーグ多様体のコホモロジー環 $H^*(\text{Hess}(N, h))$ と一致する! という興味深い結果が得られた。これらの結果について次の 2.3 節で紹介する。

2.3. $\text{Hess}(N, h)$ と $\text{Hess}(S, h)$ の関係.

正則な冪零ヘッセンバーグ多様体 $\text{Hess}(N, h)$ と正則な半単純ヘッセンバーグ多様体 $\text{Hess}(S, h)$ の性質についてまとめる ($\text{Hess}(N, h)$ と超平面配置の関係については最後の 4 節で述べる。)

	$\text{Hess}(N, h)$	$\text{Hess}(S, h)$
$h = (2, 3, 4, \dots, n, n)$	Pet	$X_{A_{n-1}}$
$h = (n, n, \dots, n)$	$\mathcal{F}\ell(\mathbb{C}^n)$	$\mathcal{F}\ell(\mathbb{C}^n)$
特異性	(一般に) 特異	非特異
複素次元	$\sum_{j=1}^n (h(j) - j)$	$\sum_{j=1}^n (h(j) - j)$
複素セル分割 (complex affine paving)	もつ	もつ
コホモロジー環	PDA	PDA
旗多様体のコホモロジー環からの制限写像	全射	(一般に) 全射でない
他分野との関連	超平面配置	グラフ理論

- Pet : ピーターソン多様体
- $X_{A_{n-1}}$: A_{n-1} 型 Weyl cambers を扇とするトーリック多様体

⁵ $h = (2, 3, 4, \dots, n, n)$ のとき $\text{Hess}(S, h)$ は非特異な射影的トーリック多様体なので、コホモロジー環 $H^*(\text{Hess}(S, h))$ の明示的な表示は具体的に書ける。

- $\mathcal{F}l(\mathbb{C}^n)$: 旗多様体
- PDA: ポアンカレ双対代数

$h = (2, 3, 4, \dots, n, n)$ とする正則な半単純ヘッセンバーグ多様体 $\text{Hess}(S, h)$ は A_{n-1} 型 Weyl chambers を扇とするトーリック多様体 $X_{A_{n-1}}$ であった。この扇の上に対称群 \mathfrak{S}_n の作用が自然にあるので、トーリック多様体 $X_{A_{n-1}}$ 上に \mathfrak{S}_n 作用が誘導され、コホモロジー $H^*(X_{A_{n-1}})$ 上の \mathfrak{S}_n 表現を得る⁶。Klyachko はコホモロジー環 $H^*(X_{A_{n-1}})$ の \mathfrak{S}_n 不変部分環 $H^*(X_{A_{n-1}})^{\mathfrak{S}_n}$ の明示的な表示を与えた ([21])。その表示はちょうど [18] で与えられたピーターソン多様体のコホモロジー環 $H^*(Pet)$ の明示的な表示とちょうど一致しているので、環同型

$$H^*(Pet) \cong H^*(X_{A_{n-1}})^{\mathfrak{S}_n}$$

が得られる。この環同型は一般のヘッセンバーグ関数 h に対しても正しいのかというのが自然な問題である。次の定理はこの問題の解答を与えている。

定理 2.13 (Abe-Harada-H-Masuda [5]). 任意のヘッセンバーグ関数 h に対して、次の環同型が成立。

$$(2.3) \quad H^*(\text{Hess}(N, h)) \cong H^*(\text{Hess}(S, h))^{\mathfrak{S}_n}$$

ここで、コホモロジー環 $H^*(\text{Hess}(S, h))$ 上の対称群 \mathfrak{S}_n 作用は Tymoczko により構成されたもの ([36]) で、右辺は $H^*(\text{Hess}(S, h))$ の \mathfrak{S}_n 不変部分環を表す。

注意 2.14. $h = (n, n, \dots, n)$ とする $\text{Hess}(S, h)$ は旗多様体 $\mathcal{F}l(\mathbb{C}^n)$ であり、このとき $H^*(\mathcal{F}l(\mathbb{C}^n))$ 上の \mathfrak{S}_n 作用は自明である。定理 2.13 における環同型 (2.3) は $H^*(\mathcal{F}l(\mathbb{C}^n))$ からの制限写像と可換図式をなすものである：

$$\begin{array}{ccc} H^*(\mathcal{F}l(\mathbb{C}^n)) & \xlongequal{\quad} & H^*(\mathcal{F}l(\mathbb{C}^n))^{\mathfrak{S}_n} \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^*(\text{Hess}(N, h)) & \xrightarrow{\cong} & H^*(\text{Hess}(S, h))^{\mathfrak{S}_n} \end{array}$$

ヘッセンバーグ多様体は任意の Lie 型の旗多様体の射影部分多様体として定義できる (4 節)。では、 A 型におけるこの結果 (定理 2.13) は一般の Lie 型でも正しいかどうか自然と気になる問題である。今回、超平面配置と関連付けることで一般の Lie 型でも正しいという結論を得ることができた。3 節では超平面配置について紹介し、4 節では今回得られた主定理について紹介する。

3. 超平面配置

V を \mathbb{R} 上 n 次元ベクトル空間とする。 \mathcal{A} が V 中の有限個の超平面からなるとき、 \mathcal{A} を V 中にある超平面配置であるという。

R を V の双対空間 V^* の対称代数 $\text{Sym}(V^*)$ とする。 V の元は V^* 上の線形関数で、 R 上の導分に拡張する：

$$v(fg) = v(f)g + fv(g) \quad v \in V, f, g \in R$$

⁶一般のヘッセンバーグ関数 h に対して、Tymoczko は $H^*(\text{Hess}(S, h))$ 上に \mathfrak{S}_n 表現を構成した ([36]) が、 $h = (2, 3, 4, \dots, n, n)$ のときは $X_{A_{n-1}}$ に対応する扇の上に対称群 \mathfrak{S}_n 作用から誘導されるこの \mathfrak{S}_n 表現と一致する。

R 上の導分全体からなる R 加群を

$$\mathrm{Der}(R) := R \otimes V$$

で定義する。特に、 x_1, \dots, x_n を V^* の基底とすると、 $\mathrm{Der}(R) := \bigoplus_{i=1}^n R(\partial/\partial x_i)$ と表せる。

定義 3.1. 超平面配置 \mathcal{A} に対して、 \mathcal{A} の対数的導分の R 加群 $D(\mathcal{A})$ を

$$D(\mathcal{A}) := \{\theta \in \mathrm{Der}(R) \mid \theta(\alpha_H) \in R\alpha_H, \forall H \in \mathcal{A}\}$$

で定義する。ここで、 $\alpha_H \in V^*$ は $H \in \mathcal{A}$ を定義する線形形式とする。

例 3.2. \mathbb{R}^n の超平面 $H_{i,j} (1 \leq i < j \leq n)$ を

$$H_{i,j} := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i - x_j = 0\}$$

で定義し、超平面配置

$$\mathcal{A} := \{H_{i,j} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$$

を考える。このとき、 $R = \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ 加群 $\mathrm{Der}(R) := \bigoplus_{i=1}^n R(\partial/\partial x_i)$ の元

$$\theta_k := x_1^k \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2^k \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + x_n^k \frac{\partial}{\partial x_n} \quad (k \geq 0)$$

は $D(\mathcal{A})$ の元である。

$\theta \in \mathrm{Der}(R)$ が次数 d の斉次元であるとは、 $\theta = \sum_{k=1}^{\ell} f_k \otimes v_k$ ($f_k \in R, v_k \in V$) と書いたときに、零でないすべての f_k の次数が d であるときにいう。

定義 3.3. 超平面配置 \mathcal{A} が自由でその指数が (d_1, \dots, d_n) であるとは、 $D(\mathcal{A})$ が自由 R 加群であり、 $\deg \theta_i = d_i$ ($i = 1, \dots, n$) であるような斉次基底 $\theta_1, \dots, \theta_n$ をもつときにいう。

定理 3.4 (Saito's criterion, Saito [28] ([24] も参照)). \mathcal{A} を超平面配置とする。 $\theta_1, \dots, \theta_n \in D(\mathcal{A})$ を斉次元とする。このとき、次の 2 つは同値：

- (1) $\theta_1, \dots, \theta_n$ が $D(\mathcal{A})$ の R 基底をなす。
- (2) $\theta_1, \dots, \theta_n$ が R 上線形独立で、 $\sum_{i=1}^n \deg(\theta_i) = |\mathcal{A}|$ である。

例 3.5. 例 3.2 において、定理 3.4 より $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}$ は $D(\mathcal{A})$ の R 基底をなすので、 \mathcal{A} は自由配置でその指数は $(0, 1, \dots, n-1)$ である。今、 $Q := x_1^2 + \dots + x_n^2$ とおき、 $R = \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ のイデアル \mathfrak{a} を

$$\mathfrak{a} := \{\theta(Q) \mid \theta \in D(\mathcal{A})\}$$

で定義する。 $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}$ は $D(\mathcal{A})$ の R 基底をなすことから、 $\mathfrak{a} = (p_1, \dots, p_n)$ であることが分かる。ここで p_k は冪和 $p_k := x_1^k + \dots + x_n^k$ を表す。(2.1) より、環同型

$$H^*(\mathcal{F}l(\mathbb{C}^n)) \cong R/\mathfrak{a}$$

を得る。

次の 4 節では、例 3.5 における考察をヘッセンバーク多様体に拡張する。その結果として、 A 型ヘッセンバーク多様体で述べた結果が他の Lie 型にも拡張できるという結果が得られる。

4. 一般の LIE 型のヘッセンバーグ多様体とイデアル配置

G を階数 n の \mathbb{C} 上の半単純線形代数群とし、そのボレル部分群 B を 1 つ固定する。このとき、次のデータが定まる：

- T : 極大コンパクトトーラス
- W : ワイル群
- $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$: $T \subset B \subset G$ の Lie 環
- Φ : ルート全体の集合
- Φ^+ : 正ルート全体の集合
- Δ : 単純ルート全体 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ の集合
- \mathfrak{g}_α : ルート α に付随するルート空間

2 つのルート $\alpha, \beta \in \Phi$ に対して、「 $\alpha \preceq \beta \iff \beta - \alpha \in \sum_{i=1}^n \mathbb{Z}_{\geq 0} \alpha_i$ 」により、 Φ 上に半順序を定める。

定義 4.1. $I \subset \Phi^+$ が下方イデアルであるとは、以下の条件

$$\alpha \in \Phi^+, \beta \in I, \alpha \preceq \beta \Rightarrow \alpha \in I$$

をみたすときにいう。換言すると、 I の元で自分より小さいものは全て I に入るということである。

下方イデアル $I \subset \Phi^+$ に対して、 $H(I) = \mathfrak{b} \oplus (\bigoplus_{\alpha \in I} \mathfrak{g}_{-\alpha})$ をヘッセンバーグ空間⁷と呼ぶ。

定義 4.2. $X \in \mathfrak{g}$, $I \subset \Phi^+$ を下方イデアルとする。このとき、ヘッセンバーグ多様体 $\text{Hess}(X, I)$ を以下の旗多様体 G/B の射影部分多様体で定義する：

$$\text{Hess}(X, I) = \{gB \in G/B \mid \text{Ad}(g^{-1})(X) \in H(I)\}$$

定義 4.3. $I \subset \Phi^+$ を下方イデアルとする。 \mathfrak{t} の中の超平面配置

$$\mathcal{A}_I := \{\ker \alpha \mid \alpha \in I\}$$

をイデアル配置と呼ぶ。 $(I = \Phi^+)$ のときは **Weyl 配置** と呼ばれる。）

正ルート $\alpha \in \Phi^+$ を $\alpha = \sum_{i=1}^n c_i \alpha_i$ と単純ルートの線形結合で書いたとき、 α の高さ $\text{ht}(\alpha)$ を $\sum_{i=1}^n c_i$ で定義する。 $m := \max\{\text{ht}(\alpha) \mid \alpha \in I\}$ とする。 $i_j := |\{\alpha \in I \mid \text{ht}(\alpha) = j\}|$ とし、 I の高さ分布を正整数の列 (i_1, i_2, \dots, i_m) で定義する。 I の高さ分布の双対配置 $\mathcal{DP}(I)$ を

$$\mathcal{DP}(I) := ((0)^{n-i_1}, (1)^{i_1-i_2}, \dots, (m-1)^{i_{m-1}-i_m}, (m)^{i_m})$$

で定義する。ここで、 $(a)^b$ は非負整数 a がちょうど b 回現れることを意味する。

定理 4.4 ([8]). イデアル配置 \mathcal{A}_I は自由でその指数は I の高さ分布の双対配置 $\mathcal{DP}(I)$ と一致する。

⁷ A 型の場合、このヘッセンバーグ空間はヘッセンバーグ関数（箱の集まりと同一視したもの）に対応している。

$R := \text{Sym } \mathfrak{t}^*$ とする。 Q を W -不変な非退化な二次形式とし、

$$\mathfrak{a}(I) := \{\theta(Q) \mid \theta \in D(\mathcal{A}_I)\}$$

により R のイデアルを定義する。

主定理の内容

ルート α に対して、 α に付随する旗多様体 G/B 上の直線束の第一チャーン類を対応させることで、環準同型写像

$$(4.1) \quad \varphi : R := \text{Sym } \mathfrak{t}^* \rightarrow H^*(G/B)$$

を得る。 Borel はこの写像が全射であることと $\text{Ker } \varphi = (R_+^W)$ であることを証明した ([10])。ここで、 (R_+^W) は定数項が 0 である W -不変な R の元で生成されるイデアルである。一方、 Weyl 配置 \mathcal{A}_{Φ^+} から得られるイデアル $\mathfrak{a}(\Phi^+)$ は (R_+^W) と一致することが知られている ([9, Theorem 3.9] 参照)。

今、この結果をヘッセンバーグ多様体に拡張する。 $N \in \mathfrak{g}$ を正則な冪零元、 $S \in \mathfrak{g}$ を正則な半単純元とする。正則な冪零ヘッセンバーグ多様体 $\text{Hess}(N, I)$ から旗多様体 G/B への包含写像が導く制限写像 $H^*(G/B) \rightarrow H^*(\text{Hess}(N, I))$ と (4.1) との合成写像：

$$(4.2) \quad \varphi_I : R := \text{Sym } \mathfrak{t}^* \rightarrow H^*(G/B) \rightarrow H^*(\text{Hess}(N, I))$$

を考える。

定理 4.5 (Abe-H-Masuda-Murai-Sato [9]). (4.2) の写像 φ_I は全射であり、その核は $\mathfrak{a}(I)$ と一致する。特に、環同型

$$(4.3) \quad H^*(\text{Hess}(N, I)) \cong R/\mathfrak{a}(I)$$

を得る。

A 型のときの [36] による正則な半単純ヘッセンバーグ多様体 $\text{Hess}(S, h)$ のコホモロジー $H^*(\text{Hess}(S, h))$ の上の対称群の作用の構成と同様にして、一般の Lie 型でも $H^*(\text{Hess}(S, I))$ の上にワイル群 W の作用が構成される。 $I = \Phi^+$ のとき、 $\text{Hess}(S, I)$ は全体の旗多様体 G/B と一致し、そのときの $H^*(G/B)$ 上の W 作用は自明である。制限写像 $H^*(G/B) \rightarrow H^*(\text{Hess}(S, I))$ が W 同変であることから、環準同型写像 $H^*(G/B) \rightarrow H^*(\text{Hess}(S, I))^W$ を得る。この写像と (4.1) との合成写像：

$$(4.4) \quad \psi_I : R := \text{Sym } \mathfrak{t}^* \rightarrow H^*(G/B) \rightarrow H^*(\text{Hess}(S, I))^W$$

を考える。

定理 4.6 (Abe-H-Masuda-Murai-Sato [9]). (4.4) の写像 ψ_I は全射であり、その核は $\mathfrak{a}(I)$ と一致する。特に、環同型

$$(4.5) \quad H^*(\text{Hess}(S, I))^W \cong R/\mathfrak{a}(I)$$

を得る。

(4.3) と (4.5) より、次の系を得る。

系 4.7 (Abe-H-Masuda-Murai-Sato [9]). 次の環同型が成立：

$$H^*(\text{Hess}(N, I)) \cong H^*(\text{Hess}(S, I))^W$$

REFERENCES

- [1] H. Abe, Young diagrams and intersection numbers for toric manifolds associated with Weyl chambers. *Electron. J. Combin.* **22** (2015), Paper 2.4, 24 pp.
- [2] H. Abe and P. Crooks, Hessenberg varieties for the minimal nilpotent orbit, arXiv:1510.02436.
- [3] H. Abe, L. DeDue, F. Galetto, and M. Harada, Geometry of Hessenberg varieties with applications to Newton-Okounkov bodies, arXiv:1612.08831.
- [4] H. Abe, M. Harada, T. Horiguchi, and M. Masuda, The equivariant cohomology rings of regular nilpotent Hessenberg varieties in Lie type A : Research Announcement, *Morfismos* **18** (2014), No. 2, pp. 51–65.
- [5] H. Abe, M. Harada, T. Horiguchi, and M. Masuda, The cohomology rings of regular nilpotent Hessenberg varieties in Lie type A , arXiv:1512.09072.
- [6] H. Abe and T. Horiguchi, The torus equivariant cohomology rings of Springer varieties, *Topology Appl.* **208** (2016), 143–159.
- [7] H. Abe, T. Horiguchi, and M. Masuda, The cohomology rings of regular semisimple Hessenberg varieties for $h = (h(1), n, \dots, n)$, arXiv:1704.00934.
- [8] T. Abe, M. Barakat, M. Cuntz, T. Hoge, and H. Terao, The freeness of ideal subarrangements of Weyl arrangements, *J. European Math. Soc.* **18** (2016), 1339–1348.
- [9] T. Abe, T. Horiguchi, M. Masuda, S. Murai, and T. Sato, Hessenberg varieties and hyperplane arrangements, arXiv:1611.00269.
- [10] A. Borel, Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts, *Ann. of Math. (2)* **57** (1953), 115–207.
- [11] M. Brion and J. Carrell, The equivariant cohomology ring of regular varieties, *Michigan Math. J.* **52** (2004), no. 1, 189–203.
- [12] P. Brosnan and T. Chow, Unit interval orders and the dot action on the cohomology of regular semisimple Hessenberg varieties, arXiv:1511.00773.
- [13] C. De Concini and C. Procesi, Symmetric functions, conjugacy classes and the flag variety, *Invent. Math.* **64** (1981), no. 2, 203–219.
- [14] F. De Mari, C. Procesi, and M. A. Shayman, Hessenberg varieties, *Trans. Amer. Math. Soc.* **332** (1992), no. 2, 529–534.
- [15] F. De Mari and M. Shayman, Generalized Eulerian numbers and the topology of the Hessenberg variety of a matrix, *Acta Appl. Math.* **12** (1988), no. 3, 213–235.
- [16] Y. Fukukawa, M. Harada and M. Masuda, *The equivariant cohomology rings of Peterson varieties*, *J. Math. Soc. Japan* **67** (2015), no. 3, 1147–1159.
- [17] M. Guay-Paquet, A second proof of the ShareshianWachs conjecture, by way of a new Hopf algebra, arXiv:1601.05498.
- [18] M. Harada, T. Horiguchi, and M. Masuda, The equivariant cohomology rings of Peterson varieties in all Lie types, *Canad. Math. Bull.* **58** (2015), no. 1, 80–90.
- [19] T. Horiguchi, The S^1 -equivariant cohomology rings of $(n - k, k)$ Springer varieties, *Osaka J. Math.* **52** (2015), no. 4, 1051–1063.
- [20] E. Insko and A. Yong, Patch ideals and Peterson varieties, *Transform. Groups* **17** (2012), no. 4, 1011–1036.
- [21] A. Klyachko, Orbits of a maximal torus on a flag space, *Functional Anal. Appl.* **19** (1985), no. 2, 65–66.
- [22] B. Kostant, Flag Manifold Quantum Cohomology, the Toda Lattice, and the Representation with Highest Weight ρ , *Selecta Math. (N.S.)* **2** (1996), no. 1, 43–91.
- [23] A. Mbirika and J. Tymoczko, Generalizing Tanisaki’s ideal via ideals of truncated symmetric functions, *J. Alg. Comb.* **37**: 167–199, 2013.
- [24] P. Orlik and H. Terao, *Arrangements of hyperplanes*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **300**, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [25] M. Precup, Affine pavings of Hessenberg varieties for semisimple groups, *Selecta Math. (N.S.)* **19** (2013), no. 4, 903–922.

- [26] M. Precup, The connectedness of Hessenberg varieties, *J. Algebra* **437** (2015), 34–43.
- [27] K. Rietsch, Totally positive Toeplitz matrices and quantum cohomology of partial flag varieties, *J. Amer. Math. Soc.* **16**, 2003, 363–392.
- [28] K. Saito, Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector fields, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.* **27** (1980), 265–291.
- [29] J. Shareshian and M. L. Wachs, Chromatic quasisymmetric functions and Hessenberg varieties, *Configuration spaces, CRM Series, Ed. Norm., Pisa*, **14** (2012), 433–460.
- [30] J. Shareshian and M. L. Wachs, Chromatic quasisymmetric functions, *Adv. Math.* **295** (2016), 497–551.
- [31] E. Sommers and J. Tymoczko, Exponents of B -stable ideals, *Trans. Amer. Math. Soc.* **358** (2006), no. 8, 3493–3509.
- [32] T. A. Springer, Trigonometric sums, Green functions of finite groups and representations of Weyl groups, *Invent. Math.* **36** (1976), 173–207.
- [33] T. A. Springer, A construction of representations of Weyl groups, *Invent. Math.* **44** (1978) 279–293.
- [34] T. Tanisaki, Defining ideals of the closures of the conjugacy classes and representations of the Weyl groups, *Tôhoku Math. J.* **34** (1982), no. 4, 575–585.
- [35] J. Tymoczko, Linear conditions imposed on flag varieties, *Amer. J. Math.* **128** (2006), no. 6, 1587–1604.
- [36] J. Tymoczko, Permutation actions on equivariant cohomology of flag varieties, *Contemp. Math.* **460** (2008), 365–384.