

結び目の体積とアレキサンダー多項式

合田 洋 (東京農工大学)

1. 序論

アレキサンダー多項式 ([1]) は長年にわたって結び目理論における基本的かつ重要な結び目不変量として様々な観点から研究されてきた。1990年 Lin([12]) はザイフェルト曲面と結び目群の表現を用いてねじれアレキサンダー多項式を導入した。これはアレキサンダー多項式に基本群の情報をより精密に加えるものになっている。その後、和田 ([19]) によって群の有限表示のみから定義する方法が示された。北野 ([8]) と Kirk-Livingston([7]) によるライデマイスタートーションとしての解釈をへて、ねじれアレキサンダー多項式は現在様々な観点からの研究が進行中している対象である。

内部の各点における断面曲率が -1 の完備リーマン計量を許容する 3次元多様体は双曲多様体と呼ばれる。結び目の補空間が双曲多様体の構造をもつときその結び目を双曲結び目と呼ぶ。結び目は非自明でないトラス結び目でもサテライト結び目でもないとき双曲結び目であることが Thurston によって知られており、感覚的にはほとんどの結び目は双曲結び目である。双曲多様体が許容する双曲構造は一つであるという Mostow の剛体性定理から双曲結び目補空間の双曲体積は結び目の不変量になることがわかる。

結び目補空間の体積の評価については様々な研究がなされてきているが、ここでは特にねじれアレキサンダー多項式による漸近挙動に注目することにする。

2. アレキサンダー多項式

アレキサンダー多項式の定義の仕方はいくつかあるが、ここでは結び目補空間の基本群 (結び目群) 表示から Fox の自由微分と呼ばれるものを経て得る方法を紹介しよう。 K を 3次元球面 S^3 内の結び目とする。結び目群 $G(K) = \pi_1(E(K)) = \pi_1(S^3 - \text{Int}N(K))$ の Wirtinger 表示を 1 つ固定する：

$$P = \langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_{n-1} \rangle.$$

この表示に伴う自由群 F_n から $G(K)$ への全射準同型写像を $\phi: F_n \rightarrow G(K)$ で表す。この写像 ϕ を線形に拡張して得られる \mathbb{Z} 上の群環の間の環準同型写像を

$$\tilde{\phi}: \mathbb{Z}F_n \rightarrow \mathbb{Z}[G(K)]$$

とする。一方、 $G(K)$ の可換化準同型写像

$$\alpha: G(K) \rightarrow H_1(E(K); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} = \langle t \rangle$$

は (P が Wirtinger 表示であることから) $\alpha(x_1) = \dots = \alpha(x_n) = t$ で与えられる。 α を線形に拡張することにより、群環の間の準同型写像

$$\tilde{\alpha}: \mathbb{Z}[G(K)] \rightarrow \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$$

2010 *Mathematics Subject Classification*. Primary 57M27, Secondary 57M25.

Key words and phrases. twisted alexander polynomial, hyperbolic knot, volume.

This work was supported by JSPS KAKENHI Grant Numbers JP15K04868.

2

合田 洋 (東京農工大学)

が得られる. 合成写像 $\tilde{\alpha} \circ \tilde{\phi}$ を Φ で表すことにする. すなわち,

$$\Phi : \mathbb{Z}F_n \rightarrow \mathbb{Z}[t, t^{-1}].$$

Fox の自由微分

$$\frac{\partial}{\partial x_j} : \mathbb{Z}F_n \rightarrow \mathbb{Z}F_n$$

は以下で特徴付けられる:

- (1) \mathbb{Z} 上線形;
- (2) 任意の i, j に対して, $\frac{\partial}{\partial x_j} x_i = \delta_{ij}$;
- (3) 任意の $g, g' \in F_n$ に対して, $\frac{\partial}{\partial x_j} (gg') = \frac{\partial}{\partial x_j} g + g \frac{\partial}{\partial x_j} g'$.

さて, Wirtinger 表示 P の関係子 r_1, \dots, r_{n-1} に Fox の自由微分を施し, さらに環準同型写像 Φ を合成することにより, $(n-1) \times n$ 行列

$$A = \left(\Phi \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j} \right) \right) \in M(n-1, n; \mathbb{Z}[t, t^{-1}])$$

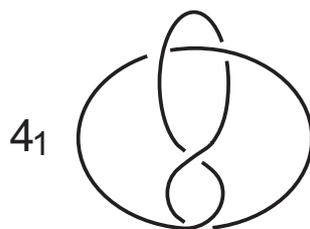
が得られる. 行列 A を結び目群 $G(K)$ の表示 P に対するアレキサンダー行列とよぶ.

つぎに行列 A の第 j 列を取り除いて得られる正方行列を A_j で表す. このとき結び目 K のアレキサンダー多項式を

$$\Delta_K(t) = \det A_j \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$$

によって定義する. どの列を取り除いても得られる多項式は $\pm t^s$ ($s \in \mathbb{Z}$) 倍を除いて群の表示によらず群 $G(K)$ の (結び目 K の) 不変量になることが知られている.

例 2.1. 次図の結び目は 8 の字結び目 (figure 8 knot) とよばれ結び目群 $G(K)$ は以下の表示をもつことが知られている (これは Wirtinger 表示である).



$$G(K) = \langle x, y \mid xy^{-1}x^{-1}yxy^{-1}yx^{-1}y^{-1} \rangle$$

この関係子 $r = xy^{-1}x^{-1}yxy^{-1}xyx^{-1}y^{-1}$ に Fox の自由微分を施すと (上述の (1)~(3) を使って) :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x} r &= \frac{\partial x}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial x} (y^{-1}x^{-1}yxy^{-1}xyx^{-1}y^{-1}) \\
 &= 1 + x \left(\frac{\partial y^{-1}}{\partial x} + y^{-1} \frac{\partial}{\partial x} (x^{-1}yxy^{-1}xyx^{-1}y^{-1}) \right) \\
 (2.1) \quad &= 1 + xy^{-1} \left(\frac{\partial x^{-1}}{\partial x} + x^{-1} \frac{\partial}{\partial x} (yxy^{-1}xyx^{-1}y^{-1}) \right) \\
 &= 1 - xy^{-1}x^{-1} + xy^{-1}x^{-1} \frac{\partial}{\partial x} (yxy^{-1}xyx^{-1}y^{-1}) = \dots = \\
 &= 1 - xy^{-1}x^{-1} + xy^{-1}x^{-1}y + xy^{-1}x^{-1}yxy^{-1} - xy^{-1}x^{-1}yxy^{-1}xyx^{-1}.
 \end{aligned}$$

同様にして,

$$\frac{\partial}{\partial y} r = -xy^{-1} + xy^{-1}x^{-1} - xy^{-1}x^{-1}yxy^{-1} + xy^{-1}x^{-1}yxy^{-1}x - xy^{-1}x^{-1}yxy^{-1}xyx^{-1}y^{-1}.$$

したがって, $\alpha(x) = \alpha(y) = t$ から

$$\begin{aligned}
 \Phi \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right) &= 1 - tt^{-1}t^{-1} + tt^{-1}t^{-1}t + tt^{-1}t^{-1}ttt^{-1} - tt^{-1}t^{-1}ttt^{-1}ttt^{-1} \\
 &= 1 - \frac{1}{t} + 1 + 1 - t = -\frac{1}{t} + 3 - t, \\
 \Phi \left(\frac{\partial r}{\partial y} \right) &= -1 + t^{-1} - 1 + t - 1 = \frac{1}{t} - 3 + t
 \end{aligned}$$

を得る. この例のアレキサンダー行列は $\begin{pmatrix} -\frac{1}{t} + 3 - t & \frac{1}{t} - 3 + t \end{pmatrix}$ の 1×2 行列になり 8 の字結び目のアレキサンダー多項式 $\Delta_K(t)$ は

$$\Delta_K(t) = \det \left(-\frac{1}{t} + 3 - t \right) = -\frac{1}{t} + 3 - t$$

となる ($\pm t^s (s \in \mathbb{Z})$ 倍を除いて決まる).

そもそも x と y は群の中で別々の生成元であったのに写像 α によって同じ t にうつされる. 計算は簡単になるが, 結び目群に含まれているかなりの情報が落ちてしまうと思われる. ここを改良するのが次章で紹介するねじれアレキサンダー多項式である.

3. ねじれアレキサンダー多項式

記号は前章のを継続して使用する. 結び目群 $G(K)$ の表現 $\rho : G(K) \rightarrow \mathrm{SL}(m, \mathbb{C})$ を一つとる. この写像は自然に群環上の写像

$$\tilde{\rho} : \mathbb{Z}G(K) \rightarrow M(m; \mathbb{C})$$

を誘導し, さらに前章で導入した写像 $\tilde{\alpha}$ を合わせて

$$\tilde{\rho} \otimes \tilde{\alpha} : \mathbb{Z}G(K) \rightarrow M(m; \mathbb{C}[t, t^{-1}])$$

が定まる. これと前章 $\tilde{\phi}$ との合成を

$$\Phi = (\tilde{\rho} \otimes \tilde{\alpha}) \circ \tilde{\phi} : \mathbb{Z}F_n \rightarrow M(m; \mathbb{C}[t, t^{-1}])$$

4

合田 洋 (東京農工大学)

とおく. そして, $(n-1) \times n$ 行列 A_ρ をその (i, j) 成分が $m \times m$ 行列

$$\Phi\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\right) \in M((n-1)m \times nm; \mathbb{C}[t, t^{-1}])$$

であるような行列とする. この行列を表現 ρ に随伴するねじれアレキサンダー行列という.

正方行列にするために A_ρ から 1 つの生成元 x_k に対応する ‘1 列’ を削除して得られる $(n-1)m \times (n-1)m$ 行列を $A_{\rho,k}$ と表す. このとき結び目のねじれアレキサンダー不変量を

$$\Delta_{K,\rho}(t) = \frac{\det A_{\rho,k}}{\det \Phi(x_k - 1)}$$

で定義する. ただし $\det \Phi(x_k - 1) \neq 0$ とする.

和田は [19] にて次を示した.

定理 3.1 ([19]). $\pm t^s (s \in \mathbb{Z})$ 倍を除いて, $\Delta_{K,\rho}(t)$ は $G(K)$ と ρ の組に対する不変量となる.

例 3.2. K を 8 の字結び目とすると例 2.1 より

$$(3.1) \quad G(K) = \langle x, y \mid xy^{-1}x^{-1}yxy^{-1}xyx^{-1}y^{-1} \rangle$$

という表示をもった. この群について

$$(3.2) \quad \rho(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

とするとこの写像は表現になることが確かめられる. $\rho(x) = X, \rho(y) = Y, I$ を 2 次単位行列とすると

$$\Phi\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right) =$$

$$I - \frac{1}{t}XY^{-1}X^{-1} + XY^{-1}X^{-1}Y + XY^{-1}X^{-1}YXY^{-1} - tXY^{-1}X^{-1}YXY^{-1}XYX^{-1}$$

となる. これは (2.1) の小文字 x を大文字 X に小文字 y を大文字 Y に変換して t のべき乗をそれぞれ対応するようにつけたものであることに注意しよう. この行列計算を実行して

$$\Delta_{K,\rho}(t) = \frac{\det \Phi\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)}{\det \Phi(y - 1)} = \frac{1/t^2(t-1)^2(t^2 - 4t + 1)}{(t-1)^2} \doteq t^2 - 4t + 1$$

を得る.

これで写像 α を経由することによる情報欠落を補う感じにはなるが, 今度は得られる有理多項式が表現 ρ にも依存するため結び目の不変量とはいえず結び目の (非) 同値性については威力を発揮しづらい. また上記の例では結び目群の表現を与えたが, 一般に表現を見つけるのは大変である. 考えられる応用方法は (1) すべての表現について成り立つような性質を判断するか (2) 特別な表現に制限して考察するくらいであろうか,, 前者については結び目のファイバー性を判定することについてはうまくいったように思える. すなわち結び目群のどんな $SL(n, \mathbb{C})$ 表現に対してもファイバー結び目のねじれアレキサンダー多項式の最高次係数は ± 1 になるという定理を昔得た [6]. この定理のその後の展開については例えば [3, 15] を参照して下さい. またねじれアレキサンダー多項式に関する基本的な事柄については [10] を, 最近の研究については [4, 9] を参照してください.

今回の講演については (2) についての応用にあたる. 表現を次章で紹介するホロノミー表現に制限してねじれアレキサンダー不変量の性質を見つけることになる.

4. 双曲結び目について

本章の前半については [11, 18] を参考にさせていただきました. 詳細を知りたい方はそちらをご覧ください.

3次元双曲空間とは上半空間モデル \mathbb{H}^3 を4元数体の部分空間として

$$\mathbb{H}^3 = \{(x + yi) + tj \in \mathbb{C} + \mathbb{R}j \mid t > 0\}$$

に

$$ds^2 = \frac{1}{t^2}(dx^2 + dy^2 + dt^2)$$

で計量をいれることにより定める. ただし, $1, i, j$ は4元数体の基底の一部で $i = \sqrt{-1}$ であり, $\partial\mathbb{H}^3 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ とみなす. \mathbb{H}^3 の向きを保つ等長変換群は

$$\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc = 1 \right\} / \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

であることが知られている. ここで $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ の \mathbb{H}^3 への作用は1次分数変換

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} w = (aw + b)(cw + d)^{-1} \quad (w \in \mathbb{H}^3)$$

で与えられる. 右辺は4元数体の元として計算する. \mathbb{H}^3 の等長変換は等角写像であり, \mathbb{H}^3 への $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ への作用は推移的である. また, \mathbb{H}^3 への $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ の作用は1点の固定化群が $\mathrm{PSU}(2, \mathbb{C}) (\cong \mathrm{SO}(3))$ である. すなわち, $f \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ について, ある点 $p \in \mathbb{H}^3$ の行き先 $f(p)$ と接空間の写像 $T_p\mathbb{H}^3 \rightarrow T_{f(p)}\mathbb{H}^3$ が与えられると, f は一意に決まってしまう. つまり \mathbb{H}^3 の等長変換は1点の近傍の行き先を等長的に与えるとその写像を \mathbb{H}^3 全体に一意的に拡張することができる. さらに, $\partial\mathbb{H}^3$ の任意の異なる3点 p_1, p_2, p_3 を $\partial\mathbb{H}^3$ の任意の異なる3点 p'_1, p'_2, p'_3 に移す変換 $f \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ が一意に存在する.

3次元双曲多様体 M とは, M の各点の近傍が \mathbb{H}^3 の開集合と同相な局所座標をもち, 2つの近傍が重なっているところの座標変換が $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ の元でかけるものことである. 単連結な3次元双曲多様体 M' に対して, M' から \mathbb{H}^3 への展開写像が以下のように定められる. まず M' の基点の近傍の局所座標を1つ与える. M' の任意の点 p に対して基点から p に行く道を取り, この道に沿って局所座標の列をとってその展開写像による像を順に定めることにより展開写像による p の像を定めることができる. (これは道の取り方によらない.) 3次元双曲多様体 M に対するホロノミー表現とは, M の基本群の元 γ に対して M の普遍被覆空間 \tilde{M} への持ち上げ $\tilde{\gamma}$ を考え, 展開写像によるその像の始点の近傍を終点の近傍にうつす元を $\rho(\gamma)$ と定める写像 $\rho: \pi_1(M) \rightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ をいう. 完備な3次元双曲多様体 M についてそのホロノミー表現 ρ の像 $\rho(\pi_1(M))$ を Γ とおくと, Γ は自然に \mathbb{H}^3 に作用し M と \mathbb{H}^3/Γ は同型になる. よって, 完備な3次元多様体の分類は $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ のある種の離散部分群の分類に帰着され, そこに M の幾何学的情報が詰まっていると考えることができる. Thurston によってホロノミー表現は $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ 表現に持ち上がることが知られており, さらにこの持ち上げは M の spin structure に1対1で対応することが [2] で証明されている. すなわち M の spin structure を η で表すと3次元多様体 M と η の組 (M, η) に対して次の写像が得られることになる:

$$\mathrm{Hol}_{(M, \eta)}: \pi_1(M, \eta) \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}).$$

3次元多様体の一部分が2次元トーラスと半直線の直積と同型になっているとき, この部分をカスプと呼ぶ. カスプをもつ3次元多様体はコンパクトでない多様体であり, ここからカスプの近傍を切り取るとトーラスを境界とするコンパクト3次元多様体を得られる. 有限体積の完備な3次元双曲多様体は閉3次元多様体かカスプ付き3次元多様体で

あることが知られており、特に3次元球面 S^3 内の結び目 K (絡み目 L) の補空間 $S^3 - K$ ($S^3 - L$) にカスプ付き双曲3次元多様体の構造が入るとき K を双曲結び目 (L を双曲絡み目) と呼ぶ。結び目は非自明でないトーラス結び目でもサテライト結び目でもないとき双曲結び目であることが知られており、1章序論にも書いたが感覚的にはほとんどの結び目は双曲結び目である。

結び目の場合、その Wirtinger 表示の生成元のホロノミー表現による像を $A_1, \dots, A_n (\in \text{PSL}(2, \mathbb{C}))$ としたとき、それらの $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ への持ち上げは A_1, \dots, A_n もしくは $-A_1, \dots, -A_n$ なので (Corollary 2.3 in [14]), 以下の章にてその情報が必要な場合は、 $a \in \pi_1(M)$ に対しそのホロノミー表現が $\rho(a_i) = A_i (\in \text{PSL}(2, \mathbb{C}))$ のときその持ち上げを $\rho^\pm(a_i) = \pm A_i (\in \text{SL}(2, \mathbb{C}))$ (複合同順) と表すことにする。

5. $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ の $\text{SL}(n, \mathbb{C})$ 既約表現

$\text{SL}(2, \mathbb{C})$ のベクトル空間 \mathbb{C}^2 への標準的な作用を考えよう。対称積 $\text{Sym}^{n-1}(\mathbb{C}^2)$ と $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ によって誘導された作用の組は $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ の n 次元既約表現を与えることが知られている。 V_n を \mathbb{C}^2 上次数 $n-1$ の同次多項式のベクトル空間としよう。すなわち V_n を

$$V_n = \text{span}_{\mathbb{C}} \langle x^{n-1}, x^{n-2}y, \dots, xy^{n-2}, y^{n-1} \rangle$$

とする。このとき対称積 $\text{Sym}^{n-1}(\mathbb{C}^2)$ は V_n と同一視することができ、 $p \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を同次多項式とするととき $A (\in \text{SL}(2, \mathbb{C}))$ の作用は

$$A \cdot p \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = p \left(A^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)$$

で表される。この $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ の作用で与えられる表現を (V_n, σ_n) と書くことにしよう。 $(\sigma_n$ は $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ から $\text{GL}(V_n)$ への準同型写像。) この表現は $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ の既約 $\text{SL}(n, \mathbb{C})$ 表現になることが知られておりまた $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ の全ての n 次元既約表現は (V_n, σ_n) と同値になることが知られている。第4章で得た $\text{Hol}_{(M, \eta)}$ と σ_n を合成することで表現：

$$\rho_n : \pi_1(M) \rightarrow \text{SL}(n, \mathbb{C})$$

を得る。

例 5.1. 例3.2の(3.2)で与えた写像は8の字結び目のホロノミー表現であることが知られている。文字の重複を避けるため群表示(3.1)の x を a , y を b と置き直して

$$\rho(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

とし、これらを $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ の元と思うと、 $p(\rho(a)^{-1}) = p \begin{pmatrix} x-y \\ y \end{pmatrix}$, $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$, $(x-y)y = xy - y^2$, $y^2 = y^2$ なので、これらの係数を拾って

$$\rho_3(a) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$$

を得る. 表現 (3.2) の $\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$ を u とおいて同様の計算をすると

$$\rho_3(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u & 1 & 0 \\ u^2 & 2u & 1 \end{pmatrix}^T, \quad \rho_4(a) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T, \quad \rho_4(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ u & 1 & 0 & 0 \\ u^2 & 2u & 1 & 0 \\ u^3 & 3u^2 & 3u & 1 \end{pmatrix}^T$$

を得る. ここで $(\cdot)^T$ は転置行列を意味する.

6. 主結果とその証明の概略

K を双曲結び目, ρ_n を K のホロノミー表現から第 4, 5 章の方法で得られる $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ 表現とし,

$$(6.1) \quad \mathcal{A}_{K,2k}(t) = \frac{\Delta_{K,\rho_{2k}}(t)}{\Delta_{K,\rho_2}(t)}, \quad \mathcal{A}_{K,2k+1}(t) = \frac{\Delta_{K,\rho_{2k+1}}(t)}{\Delta_{K,\rho_3}(t)}$$

とおく. このとき次を得る.

定理 6.1 ([5]).

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log |\mathcal{A}_{K,2k}(1)|}{(2k)^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log |\mathcal{A}_{K,2k+1}(1)|}{(2k+1)^2} = \frac{\mathrm{Vol}(K)}{4\pi}.$$

上記 (6.1) において主要部を割って補正しているがこれは (特に偶数次表現において) 本質的でない. 補正をかけないで書くと:

- $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log |\Delta_{K,2k}(1)|}{(2k)^2} = \frac{\mathrm{Vol}(K)}{4\pi},$
- $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \left(\log \left(\lim_{t \rightarrow 1} \left| \frac{\Delta_{K,2k+1}(t)}{t-1} \right| \right) \right) = \frac{\mathrm{Vol}(K)}{4\pi}$

となる. 全てねじれアレキサンダー多項式の変数 t に 1 を代入しているが, -1 を代入しても同じ結果が得られることも最近判明した.

次章で計算例をあげるが, 最初はこのような組み合わせ的な計算で体積が求められるとは何となく信じられなかった. それが実現出来ているのは Müller の結果: ユニモジュラー表現に関して解析的トーシオンと組み合わせ的トーシオンが等価なものである ([16]) と解析的トーシオンによる体積の抽出 ([17]) のおかげであろう. これら 2 つを合わせると閉じた完備双曲多様体の体積が組み合わせ的トーシオン, すなわちライデマイスタートーションで記述できたことになる.

Müller のこれらの結果と Thurston による hyperbolic Dehn surgery Theorem を応用することで, トーラスカスプを持つ双曲三次元多様体に対する体積公式が Menal-Ferrer と Porti ([14]) によって得られているので, あとはライデマイスタートーションとねじれアレキサンダー多項式を結びつけば我々の結果が得られることになる.

M を向きづけられた完備双曲 3 次元多様体 M で, 簡単のためここではトーラスカスプを一つだけ持つものとする. すなわち $\partial \overline{M} = T^2$ となる M を考える.

命題 6.2 ([13]). (1) n が偶数 $\Rightarrow \dim_{\mathbb{C}} H_i(M, \rho_n) = 0$ for any i ;
 (2) n が奇数 $\Rightarrow \dim_{\mathbb{C}} H_0(M, \rho_n) = 0, \dim_{\mathbb{C}} H_i(M, \rho_n) = 1$ for $i = 1, 2$.

命題 6.3 ([14]). n は奇数とする. このとき非自明なサイクル $\theta \in H_1(T^2, \mathbb{Z})$ と $\rho_n(G)$ によって不変な非自明なベクトル $v \in V_n$ を選び

- (1) $H_1(M, \rho_n)$ の基底を $[v \otimes \theta]$ で;

8

合田 洋 (東京農工大学)

(2) $H_2(M, \rho_n)$ の基底を $[v \otimes T^2]$ で与えることができる.

上記記法のもと,

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{2k+1}(M) &= \frac{\text{Tor}(M; \rho_{2k+1}; \theta)}{\text{Tor}(M; \rho_3; \theta)}, \\ \mathcal{T}_{2k}(M) &= \frac{\text{Tor}(M; \rho_{2k})}{\text{Tor}(M; \rho_2)}\end{aligned}$$

とおく. ここで Tor はライデマイスタートーションを意味する.

定理 6.4 ([14]).

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log |\mathcal{T}_{2k+1}(M)|}{(2k+1)^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log |\mathcal{T}_{2k}(M)|}{(2k)^2} = \frac{\text{Vol}(M)}{4\pi}.$$

命題 6.2 の (1) にあるように, n が偶数の場合は対応するねじれホモロジーが消える. このような場合対応するチェイン複体は acyclic と呼ばれライデマイスタートーションの議論が行いやすい. このときは北野 ([8]) によってねじれアレキサンダー多項式の変数に 1 を代入したものがライデマイスタートーションになることが知られている. すなわち,

$$\text{Tor}(M; \rho_{2k}) = \Delta_{K, \rho_{2k}}(1)$$

となることから定理 6.4 を経て主定理の偶数次表現の場合の結果が得られる.

SL(2, \mathbb{C}) 表現の adjoint 作用についての考察は本稿における ρ_3 の考察と本質的に同値である. 次の命題は SL(2, \mathbb{C}) 表現の adjoint 作用について山口 ([20, 21]) によって得られた定理を一般化して得られる. 命題 6.3 で得られている基底の θ をロンギチュード λ に制限しうまく扱うことからこの帰結が得られる.

命題 6.5 ([5]). λ を結び目 K のロンギチュードとすると,

$$|\text{Tor}(M; \rho_{2k+1}; \lambda)| = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{|\Delta_{K, \rho_{2k+1}}(t)|}{t-1}$$

が成立する.

この命題より定理の主張の奇数次表現の場合の結果が従う.

7. 計算例

ここでは 8 の字結び目 K の計算例をあげることにする. 8 の字結び目の補空間の双曲体積は 2.0298832... であることが知られている.

例 5.1 の表現の持ち上げ $\rho^+(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\rho^+(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} & 1 \end{pmatrix}$ を用いて例 3.2 の計算を進めると

$$\Delta_{K, \rho_2^+}(t) = \frac{1}{t^2}(t^2 - 4t + 1), \Delta_{K, \rho_3^+}(t) = -\frac{1}{t^3}(t-1)(t^2 - 5t + 1), \Delta_{K, \rho_4^+}(t) = \frac{1}{t^4}(t^2 - 4t + 1)^2$$

を得る. 同様にして

$$\Delta_{K, \rho_5^+}(t) = -\frac{1}{t^5}(t-1)(t^4 - 9t^3 + 44t^2 - 9t + 1)$$

を得るので、対応する $\mathcal{A}_{K,n}$ を $\mathcal{A}_{K,n}^+$ と書くことにすると

$$\frac{4\pi \log |\mathcal{A}_{K,4}^+(t)|}{4^2} = \frac{\pi \log |t^2 - 4t + 1|}{4} \xrightarrow{t=1} \frac{\pi \log 2}{4} \approx 0.544397 \dots,$$

$$\frac{4\pi \log |\mathcal{A}_{K,5}^+(t)|}{5^2} = \frac{\pi \log \left| \frac{t^4 - 9t^3 + 44t^2 - 9t + 1}{t^2 - 5t + 1} \right|}{5^2} \xrightarrow{t=1} \frac{4\pi \log \frac{28}{3}}{5^2} \approx 1.12273 \dots$$

となる。以下にコンピュータを用いた計算結果をあげておく。 $\mathcal{A}_{K,n}^-$ はホロノミー表現の持ち上げ：

$$\rho^-(a) = - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho^-(b) = - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

に対応しており、特に n が奇数のときは $\mathcal{A}_{K,n}^+(t) = \mathcal{A}_{K,n}^-(t)$ となることが知られている。なお計算には Wolfram Mathematica と MathWorks Matlab を使い、研究室の高橋徹也さんに計算を手伝って頂いた。私の研究室のコンピュータで計算すると 33 次で 4~5 時間かかった。

$n(\text{even})$	$\frac{4\pi \log \mathcal{A}_{K,n}^+(1) }{n^2}$	$\frac{4\pi \log \mathcal{A}_{K,n}^-(1) }{n^2}$	$n(\text{odd})$	$\frac{4\pi \log \mathcal{A}_{K,n}(1) }{n^2}$
4	0.54439...	1.40724...	5	1.12273...
8	1.66441...	1.84668...	9	1.76436...
12	1.86678...	1.94781...	13	1.90158...
16	1.93822...	1.98381...	17	1.95494...
20	1.97121...	2.00039...	21	1.98076...
24	1.98914...	2.00940...	25	1.99522...
28	1.99994...	2.01483...	29	2.00412...
32	2.00696...	2.01836...	33	2.00999...

REFERENCES

- Alexander, J.W., Topological invariants of knots and links. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 30 (1928), no. 2, 275–306.
- Culler, M., Lifting representations to covering groups, *Adv. in Math.*, 59 (1986), 64–70. arXiv:0906.1500v4.
- Dunfield, N.M., Friedl, S., Jackson, N., Twisted Alexander Polynomials of Hyperbolic knots. *Exp. Math.*, 21 (2012), no. 4, 329–352.
- Friedl, S., Vidussi, S., A survey of twisted Alexander polynomials, *The Mathematics of Knots: Theory and Application (Contributions in Mathematical and Computational Sciences)*, (2010), 45–94.
- Goda, H., Twisted Alexander invariants and Hyperbolic volume, preprint, arXiv:1604.07490.
- Goda, H., Kitano, T., and Morifuji, T., Reidemeister torsion, twisted Alexander polynomial and fibered knots, *Comment. Math. Helv.* 80 (2005), no.1, 51–61.
- Kirk, P. and Livingston, C., Twisted Alexander invariants, Reidemeister torsion, and Casson-Gordon invariants. *Topology*, 38 (1999), no. 3, 635–661.
- Kitano, T., Twisted Alexander polynomial and Reidemeister torsion. *Pacific J. Math.*, 174 (1996), no. 2, 431–442.
- 北野晃朗, ねじれ Alexander 多項式の 20 年—Alexander 多項式の精密化とその応用— *数学*, 65 (2013), 360–384.
- 北野晃朗, 合田洋, 森藤孝之, ねじれ Alexander 不変量, *数学メモアール* 第 5 巻, 日本数学会, 2006.
- 小島定吉, 3 次元の幾何学, *講座数学の考え方*, 朝倉書店, 2002.
- Lin, X.S., Representations of knot groups and twisted Alexander polynomials. *Acta Math. Sin.* 17 (2001), no. 3, 361–380.
- Menal-Ferrer, P. and Porti, J., Twisted cohomology for hyperbolic three manifolds. *Osaka J. Math.*, 49 (2012), 741–769.

10

合田 洋 (東京農工大学)

14. Menal-Ferrer, P. and Porti, J., Higher-dimensional Reidemeister torsion invariants for cusped hyperbolic 3-manifolds. *J. Topol.*, 7 (2014), no. 1, 69–119.
15. Morifuji, T., Representations of knot groups into $SL(2, \mathbb{C})$ and twisted Alexander polynomials, Handbook of Group Actions (Vol. I), Advanced Lectures in Mathematics 31 (2015) 527–576.
16. Müller, W., Analytic torsion and R-torsion for unimodular representations. *J. Amer. Math. Soc.*, 6 (1993), no. 3, 721–753.
17. Müller, W., The asymptotics of the Ray-Singer analytic torsion of hyperbolic 3-manifolds, Metric and differential geometry, 317–352, Progr. Math., 297, Birkhäuser/Springer, Basel, 2012.
18. 大槻知忠, 結び目の不変量, 共立講座数学の輝き 4, 共立出版, 2015.
19. Wada, M., Twisted Alexander polynomial for finitely presentable groups. *Topology*, 33 (1994), no. 2, 241–256.
20. Yamaguchi, Y., On the non-acyclic Reidemeister torsion for knots, Dissertation at the University of Tokyo, 2007.
21. Yamaguchi, Y., A relationship between the non-acyclic Reidemeister torsion and a zero of the acyclic Reidemeister torsion. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 58 (2008), no. 1, 337–362.

184-8588 東京都小金井市中町 2-24-16 東京農工大学

E-mail address: goda@cc.tuat.ac.jp