

結び目と3次元多様体

～ 幾何構造とファイバー構造を中心として ～

作間 誠 (広島大学)*

1. はじめに

種数 g の有向閉曲面を考えると、 $g = 0$ の時は球面、 $g = 1$ の時はトーラス $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ であり、それぞれ自然に球面構造とユークリッド構造を持つことは誰の目にも明らかである。双曲幾何の初歩を勉強すると、種数 $g \geq 2$ なら双曲構造を持つこともすぐに理解できる。そうすると一歩進めて、3次元多様体でも同じようなことが成り立つのではないかと考えるのは（今となつては）極めて自然なことであり、きっとそのような発想をした人も過去にいたのではないかと想像できる。例えば、ザイフェルト・ファイバー束の概念を導入し完全に分類したザイフェルトなら、そのようなことを考えていたとしても不思議ではない。また、1977年という（Thurstonがプリンストン大学で講義を開始した1978年直前の）絶妙のタイミングで御著書「非ユークリッド幾何の世界」をブルーバックスより出版された日本の結び目理論の創始者・寺阪英孝先生も、そのようなことを考えられたことがあるかも、と想像することがある。

Thurstonは3次元多様体のトポロジーと幾何の相性が格段に良いことに気づき、沢山の研究者を巻き込みながら、全く新しい視点から3次元トポロジーの研究を行い、結び目理論を含む低次元トポロジーの世界を一変させた。Thurstonが1982年に出版した記念碑的サーベイ論文[101]で提出した24の問題は、低次元トポロジー研究の指標となり、この分野を極めて豊穡なものとした。そして驚くべきことに、それらの問題のうちYes-Noで尋ねている問題は、一つの未解決問題（数論が絡む問題23）を除いて全て肯定的に解決され、Thurstonが思い描いていたビジョンに狂いがなかったことが証明された。（[16, 87, 98]を参照されたい。）

一方、ファイバー結び目の名が示すようにファイバー構造（曲面束の構造）は結び目理論研究者にとって非常に重要な概念であり、村杉邦夫先生により生み出された村杉和（Murasugi sum）は、結び目理論の研究において必要不可欠な道具となっている。（結び目理論全般については[54]を参照されたい。）また、Rileyによる双曲構造の発見とThurstonによるハーケン多様体の双曲化定理において、ファイバー結び目は特別な役割を果たしている。

本論説では、曲面束の構造と幾何構造との関係を中心に、現在までに明らかにされたことの解説を試みた。また最後の2つの節では、筆者が大切であると考えた課題を、独善的であることは承知の上で述べた。沢山のページ数を使わせていただいたのにもかかわらず、筆者の力不足のために舌足らずでしかも偏った論説になったことを、ご容赦下さい。

なお、蒲谷祐一氏、金英子氏、古宇田悠哉氏、和田昌昭氏には、拙い原稿に対して貴重なコメントをいただくと同時に沢山の修正点をご指摘いただきました。（残りの誤りは筆者の責任です。）心よりお礼申し上げます。

本研究は科研費（課題番号:15H03620）の助成を受けたものである。

* 〒739-8526 東広島市鏡山1丁目3番1号

e-mail: sakuma@math.sci.hiroshima-u.ac.jp

2. 双曲空間と双曲多様体

2.1. 双曲幾何

計量 $ds^2 = (dx_1^2 + \cdots + dx_n^2)/x_n^2$ を持つ上半空間 $\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_n > 0\}$ を双曲 n 次元空間と呼ぶ。 $\partial\mathbb{H}^n := (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}) \cup \{\infty\}$ を \mathbb{H}^n の無限遠境界と呼ぶ。和集合 $\bar{\mathbb{H}}^n := \mathbb{H}^n \cup \partial\mathbb{H}^n$ は自然な位相に関して n 次元球体と同相である。 \mathbb{H}^n の等長変換群 $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ は $\partial\mathbb{H}^n$ に直交する $n-1$ 次元球面に関する反転で生成される。 $n=2$ のとき、 \mathbb{H}^2 は複素上半平面 $\{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}$ と同一視され、向き保存等長変換群 $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$ は $\text{PSL}(2, \mathbb{R}) = \text{SL}(2, \mathbb{R})/\langle -E \rangle$ と同一視される。ここで $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ は一次分数変換 $z \mapsto (az+b)/(cz+d)$ として \mathbb{H}^2 に作用する。 $n=3$ のとき、 \mathbb{H}^3 は $\mathbb{C} \times \mathbb{R}_+$ と同一視され、 $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ は $\text{PSL}(2, \mathbb{C}) = \text{SL}(2, \mathbb{C})/\langle -E \rangle$ と同一視される。 $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ は一次分数変換としてリーマン球面 $\partial\mathbb{H}^3 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ に作用し、そのポアンカレ拡大として \mathbb{H}^3 に作用する。向き保存等長変換群 $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^n)$ の非自明元 γ は次の3種類に分類される。

1. **双曲型変換** : γ は丁度1本の測地線 l を保存し、 l には一定距離 $d > 0$ の移動として作用する。また $\partial\mathbb{H}^n$ における l の2つの端点は、 γ の吸引的・反発的不動点となる。
2. **放物型変換** : γ は $\partial\mathbb{H}^n$ 上に唯1つの固定点 p を持つ。このとき、 γ は p を中心とするホ口球体 (すなわち、 p で $\partial\mathbb{H}^n$ と接するユークリッド距離に関する n 次元球体と \mathbb{H}^n の共通部分) を保存する。特に $p = \infty$ の場合、 γ は \mathbb{H}^n のユークリッド距離に関する不動点を持たない向き保存等長変換として作用する。
3. **楕円型変換** : γ は \mathbb{H}^n 内に固定点を持つ。

2.2. 双曲多様体

n 次元多様体 M 上の双曲構造とは、 M 上の定断面曲率 -1 の完備リーマン計量 (のイソトピー類) のことである。 M 上の双曲構造は、同相写像 $M \cong \mathbb{H}^n/\Gamma$ (但し、 Γ は楕円型変換を含まない $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ の離散部分群) として得られる。この同相写像が導く表現 $\rho : \pi_1(M) \rightarrow \Gamma < \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ を双曲構造のホロノミー表現と呼ぶ。 M 上の2つの双曲構造のホロノミー表現が $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ の内部準同型を法として一致するとき、その2つの双曲構造は同値であるという。 \mathbb{H}^n 内の点 x の軌道 Γx の $\bar{\mathbb{H}}^n$ における集積点集合 $\Lambda(\Gamma)$ は $\partial\mathbb{H}^n$ の最小 Γ 不変閉集合を形作り、 Γ の極限集合と呼ばれる。補集合 $\Omega(\Gamma) = \partial\mathbb{H}^n \setminus \Lambda(\Gamma)$ は Γ の不連続領域と呼ばれ、その上に Γ は真性不連続に作用する。商空間 $(\mathbb{H}^n \cup \Omega(\Gamma))/\Gamma$ を Γ が定めるクライン多様体と呼ぶ。 $\Omega(\Gamma)/\Gamma$ は $\Omega \subset \partial\mathbb{H}^n$ の共形構造を受け継いでおり、双曲多様体 \mathbb{H}^n/Γ の無限の彼方で貼り付いている。極限集合 $\Lambda(\Gamma)$ の $\bar{\mathbb{H}}^n$ における凸包と \mathbb{H}^n の共通部分を $\mathcal{C}(\Lambda(\Gamma))$ としたとき、 $C(\Gamma) := \mathcal{C}(\Lambda(\Gamma))/\Gamma \subset \mathbb{H}^n/\Gamma$ を双曲多様体 $M = \mathbb{H}^n/\Gamma$ の凸核と呼び、 $C(M)$ と表す。 M 内の閉測地線は、 Γ の双曲型元 γ の軸 l の像として得られ、 l の両端点は $\Lambda(\Gamma)$ に含まれるので、 $C(M)$ は M の全ての閉測地線を含む。凸核 $C(M)$ は M の凸部分空間で、 $C(M)$ から M への包含写像はホモトピー同値であり、しかもこの2つの性質を持つ部分空間で最小なものである。双曲多様体 M あるいはクライン群 Γ が幾何学的有限であるとは、凸核 $C(M)$ の近傍で有限体積であるものが存在するときをいう。

以下では主に M が向き付けられた多様体上の双曲構造を取り扱う。この場合は、 $\Gamma < \text{Isom}^+(\mathbb{H}^n)$ であり、同相写像 $M \cong \mathbb{H}^n/\Gamma$ は向き保存であることを要請する。 $n = 2, 3$ に応じて、 $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^n)$ の離散部分群をフックス群、クライン群と呼ぶ。

2.3. 双曲曲面とタイヒミュラー空間

種数 g の有向曲面 Σ_g から n 個の点を除いて得られる曲面を $\Sigma_{g,n}$ で表す。任意の有限面積有向双曲曲面は、オイラー標数が $\chi(\Sigma_{g,n}) = 2 - 2g - n < 0$ を満たす $\Sigma_{g,n}$ に同相である。更に、それぞれの穴はカスプ $\{z \in \mathbb{H}^2 \mid \Im(z) \geq c\}/(z \sim z+1)$ ($c > 0$ は定数) と等長的な近傍を持つ。

最も簡単な $(g, n) = (0, 3)$ の場合、 $\Sigma_{0,3}$ 上の双曲構造は理想測地三角形 (即ち、 $\partial\mathbb{H}^2$ でのみ交わる 3 本の測地線で囲まれる領域) 2 つのコピーをその境界で貼り合わせて得られる。理想測地三角形のかわりに、 $\partial\mathbb{H}^2$ でも共通部分を持たない 3 本の測地線により囲まれる開いた 3 角形領域の 2 つのコピーをその境界で貼り合わせると、球面から互いに交わらない 3 つの円板を除いて得られる開多様体に同相な無限面積双曲曲面 $P = \mathbb{H}^2/\Gamma$ を得る。このとき極限集合 $\Lambda(\Gamma)$ はカントール集合、クライン多様体は P に 3 つの円周を付け加えて得られるコンパクト曲面、凸核 $P_0 := C(P)$ は 3 本の単純閉測地線で囲まれる P のコンパクト部分曲面である。ここで P_0 は球面から互いに交わらない 3 つの円板の内部を除いて得られるパンツに同相である。双曲的パンツ P_0 の等長型は境界の長さが作る 3 つの実数の組で決まり、しかもこの 3 つ組は \mathbb{R}_+^3 の任意の値を取り得ることがわかる。もし境界の長さが 0 に退化して、カスプを形成する場合を込めると、そのような双曲曲面全体は $\mathbb{R}_{\geq 0}^3$ でパラメータ付け出来る。

一般の曲面 $\Sigma = \Sigma_{g,n}$ の双曲構造を記述するには、 Σ を $3g - 3 + n$ 本の本質的単純閉曲線 (Σ 内の円板または穴あき円板を切り取らない単純閉曲線) で切り開いて $|\chi(\Sigma)|$ 個のパンツに分解すればよい。 Σ の双曲構造が与えられると、これらの単純閉曲線は互いに交わらない単純閉測地線にイソトピックであり、それらは双曲曲面を $|\chi(\Sigma)|$ 個の双曲的パンツに分解する。各双曲的パンツの等長型は $3g - 3 + n$ 本の単純閉測地線の長さで決まる。またこれらの単純閉測地線それぞれにおいて、双曲的パンツの貼り合わせの自由度が \mathbb{R} 分だけある。従って、 Σ の双曲構造は $\mathbb{R}_+^{3g-3+n} \times \mathbb{R}^{3g-3+n}$ に値を持つパラメータにより完全に記述できる。しかも、逆に任意のパラメータを実現する Σ の双曲構造が存在することも、前文節より明らかである。以上により、 Σ 上の双曲構造全体が作るタイヒミュラー空間 $\text{Teich}(\Sigma)$ は次のように記述される。

定理 2.1 (フェンチェル・ニールセン座標)

$$\text{Teich}(\Sigma_{g,n}) \cong \mathbb{R}_+^{3g-3+n} \times \mathbb{R}^{3g-3+n} \cong \mathbb{R}^{6g-6+2n}$$

古典的一意化定理により、 $\text{Teich}(\Sigma)$ は Σ 上の共形構造全体が作る空間でもあることを注意する。

Σ の双曲構造は上で述べた自由度を持つが、その面積はガウス・ボンネの定理により、 $2\pi|\chi(\Sigma)|$ であり、そのため有限面積双曲曲面の面積全体が作る \mathbb{R}_+ の部分集合 V_2 は $2\pi\mathbb{N}$ に一致することを注意する。もっと一般に、自然数 $n \geq 2$ に対して、有限体積双曲 n 次元多様体の体積全体が作る \mathbb{R}_+ の部分集合を V_n とすると、 $n = 3$ の場合を除けば、 V_n は離散的であり、順序集合としての同型 $V_n \cong \mathbb{N}$ が成立する。

2.4. 有限体積双曲 3 次元多様体

有限面積双曲曲面がコンパクト部分多様体とカスプの和集合であったのと同様に、有限体積有向双曲 3 次元多様体はコンパクト部分多様体 M_0 とトーラスカスプの和集合になる。ここで、トーラスカスプとは、ホロ球 $H := \{(z, t) \in \mathbb{H}^3 \mid t \geq c\}$ ($c > 0$ は定数) を ($\infty \in \partial\mathbb{H}^3$ を固定する) 放物型変換が生成する階数 2 の自由アーベル群で割って得られる部分多様体のことであり、位相的には $T^2 \times [0, \infty)$ と同相である。従って、有限体積有向双曲 3 次元多様体は境界が空であるかあるいは有限個のトーラスから成るコンパクト多様体の内部と同相である。2 次元の場合は、双曲構造は連続変形を許したが、3 次元以上の有限体積双曲多様体に対しては、次の Mostow-Prasad 剛性定理により、基本群の代数構造により双曲構造が完全に決定され、従って双曲構造は一意的である。

定理 2.2 (Mostow-Prasad 剛性定理) $n \geq 3$ とし、 $M = \mathbb{H}^n/\Gamma$, $M' = \mathbb{H}^n/\Gamma'$ を有限体積双曲 n 次元多様体とする。このとき、基本群の間の同型写像 $\phi: \Gamma \rightarrow \Gamma'$ が存在すれば、それは等長写像 $f: M \rightarrow M'$ により実現される。

従って、有限体積双曲 3 次元多様体に関しては、体積、閉測地線の長さ、カスプの形、等長変換群、などの双曲不変量が位相不変量になっており、結び目および 3 次元多様体の位相的研究で重要な役割を果たす。Mostow-Prasad 剛性定理により、完備性を保ったまま有限体積 3 次元多様体の双曲構造を変形することはできない。しかしながら、カスプ付き 3 次元双曲多様体 M は、完備でない双曲多様体に連続変形でき、その完備化は一般にはハウスドルフですらないが、特別な場合には再び双曲多様体になり、位相的には M のデーン充填、即ち、ソリッドトーラス $D^2 \times S^1$ の M_0 への貼り合わせにより得られる。しかも、 M の“ほとんど全ての”デーン充填は、上記の方法により双曲構造を持つ (デーン充填定理)。更に M のデーン充填により得られる双曲多様体の体積は M の体積より小さいが、その体積全体がつくる集合は M の体積を集積点とする。実際、有限体積双曲 3 次元多様体の体積全体の集合 V_3 は、順序集合として次の整列集合と同型である (Jorgensen-Thurston 理論)。

$$\omega^\omega = \{1, 2, 3, \dots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \dots, 2\omega, 2\omega + 1, \dots, 3\omega, \dots, \omega^2, \omega^2 + 1, \dots, \omega^3, \dots\}$$

ここで、1 は最小体積の閉双曲多様体に対応し、 ω はカスプを 1 つだけ持つ双曲多様体の内で最小体積を持つものに対応する。尚、同じ体積を持つ双曲 3 次元多様体は有限個しか存在しない。最小体積あるいは小さな体積を持つ双曲 3 次元多様体や、指定された数のカスプを持つ双曲 3 次元多様体のうちで最小体積あるいは小さな体積を持つものを決定するという興味深い問題については、様々なことがわかってきている ([39] および参考文献参照)。しかしながら、Thurston の問題 23 「Show that the volumes of hyperbolic 3-manifolds are not all rationally related.」はまだ未解決である。すなわち、体積比が有理数にならない双曲多様体対の存在は、まだ証明されていない。

2.5. 双曲 3 次元多様体の変形理論

前節で述べたように有限体積 3 次元多様体の双曲構造は (完備性を保った) 変形を許さないが、一般の場合は連続変形が可能である。以下で、最も基本的な 3 次元多様体 $\Sigma \times \mathbb{R}$ ($\Sigma = \Sigma_{g,n}$) の場合を解説する。有限面積双曲曲面 $\Sigma \cong \mathbb{H}^2/\Gamma$ の基本群である フックス群 $\Gamma < \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ を $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ の部分群とみなすと、勿論クライン群である。

このとき \mathbb{H}^3/Γ は全測地的部分曲面 $\Sigma = \mathbb{H}^2/\Gamma$ を含み, $\Sigma \times \mathbb{R}$ に計量 $(\cosh^2 t)ds^2 + dt^2$ を入れたリーマン多様体と同一視できる。ここで, ds^2 は Σ の計量, t は \mathbb{R} のパラメータである。極限集合 $\Lambda(\Gamma)$ は $\hat{\mathbb{C}} = \partial\mathbb{H}^3$ 内の真円 $\hat{\mathbb{R}}$ であり, 不連続領域 $\Omega(\Gamma)$ は2つの成分 $\Omega_{\pm}(\Gamma) := \{z \in \mathbb{C} \mid \pm \Im(z) > 0\}$ から成る。従ってクライン多様体 $(\mathbb{H}^3 \cup \Omega(\Gamma))/\Gamma$ は Σ と閉区間 $[-\infty, \infty] = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ の直積と同相であり, 2枚のリーマン面 \mathbb{C}_{\pm}/Γ が双曲3次元多様体 $\mathbb{H}^3/\Gamma \cong \Sigma \times \mathbb{R}$ の無限の彼方で貼り付いている。

勿論 Γ はフックス群として変形可能であるが, 真に3次元的な変形も可能である。例えば, $\Sigma \cong \mathbb{H}^2/\Gamma$ の単純閉測地線 α を選び, それに沿って Σ を $\Sigma \times \mathbb{R} \cong \mathbb{H}^3/\Gamma$ 内で少しだけ折り曲げることを考える。 α の \mathbb{H}^2 における逆像は互いに交わらない \mathbb{H}^2 の無限個の測地線から成るので, この操作は \mathbb{H}^3 において \mathbb{H}^2 をその無限個の測地線に沿って一斉に少しだけ同じ角度だけ折り曲げることに対応する。折り曲げ角が十分小さければ, この操作 (による共役を取る) により, 新しいクライン群 Γ' が得られ, その極限集合 $\Lambda(\Gamma')$ は位相的には円であり続けるが, そのハウスドルフ次元は1より真に大きくなる。

このようにフックス群の変形で得られ, 極限集合が $\hat{\mathbb{C}}$ 内の円であるような群 Γ' を擬フックス群と呼ぶ。擬フックス群 Γ' の不連続領域は2つの開円板 $\Omega_{\pm}(\Gamma')$ から成り, Γ' のクライン多様体はフックス群の場合と同じく $\Sigma \times [-\infty, \infty]$ と同相であり, また凸核は (フックス群でないなら) $\Sigma \times [-1, 1]$ に同相であり, 従って Γ' は幾何学的有限である。凸核の2つの境界成分のそれぞれは, 「双曲曲面をある測地的ラミネーション (2.6参照) に沿って折り曲げた形」をしている。この双曲構造 \mathbb{H}^3/Γ' は, 無限の彼方にある2枚のリーマン面 $\Omega_{\pm}(\Gamma')/\Gamma' = \Sigma \times \{\pm\infty\}$ により完全にコントロールされる。

正確な意味を述べるために, 曲面 $\Sigma = \Sigma_{g,n}$ に対して, 基本群 $\pi_1(\Sigma)$ の型保存 $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ 表現の共役類全体の空間を $\mathcal{R}(\Sigma)$ とする。ここで表現が型保存であるとは, 穴のまわりを一周するループで代表される基本群の元の像は放物型変換となることである。 $\mathcal{R}(\Sigma)$ の部分空間で $\pi_1(\Sigma)$ の擬フックス表現 (すなわち, 忠実, 離散, 型保存表現で, その像が擬フックス群になっているもの) 全体が作る部分空間を $\mathcal{QF}(\Sigma)$ で表し, 擬フックス空間と呼ぶ。このとき, 次の定理が成り立つ ([47]参照)。

定理 2.3 (Bersの同時一意化定理) 上述の対応は全単射で, 下記の同相写像を導く。

$$\mathcal{QF} : \text{Teich}(\Sigma) \times \text{Teich}(\Sigma) \cong \mathcal{QF}(\Sigma)$$

忠実離散表現全体が作る $\mathcal{R}(\Sigma)$ の部分空間を $\mathcal{DF}(\Sigma)$ で表す。 $\mathcal{DF}(\Sigma)$ は閉集合であり, そのため $\overline{\mathcal{QF}}(\Sigma) \subset \mathcal{DF}(\Sigma)$ となる。Minskyを始めとする沢山の研究者の汗の結晶として, Thurston が [101] で提案したクライン群の変形と分類に関する一連の問題 (Problems 5,6, 9-12) が完全に解決され, 特に $\mathcal{DF}(\Sigma)$ に関しては次のことが証明された ([64, 65, 73, 98]参照)。

定理 2.4 (1)(Density Conjecture) $\pi_1(\Sigma)$ の任意の型保存離散忠実表現は擬フックス表現の極限として得られる。すなわち, $\overline{\mathcal{QF}}(\Sigma) = \mathcal{DF}(\Sigma)$ である。

(2)(Ending Lamination Conjecture) $\mathcal{DF}(\Sigma)$ の元は, 「エンド不変量」により完全に分類できる。

(3)(Tameness Conjecture) 任意の $\rho \in \mathcal{DF}(\Sigma)$ に対して, その像として得られるクライン群 Γ から得られる双曲多様体 \mathbb{H}^3/Γ は $\Sigma \times \mathbb{R}$ に同相である。

(4)(**Ahlfors Measure Conjecture**) 任意のクライン群の極限集合はリーマン球面 $\hat{\mathbb{C}}$ に一致するか, あるいはルベーク測度 0 である。

定理 2.4(2) は, 双曲多様体がそのエンド (コンパクト集合の補集合が作る部分集合族の逆極限) における漸近挙動から定まるエンド不変量により, 完全に決定されることを主張しており, 3次元 Mostow-Prasad 剛性定理の究極の一般化といえる。

2.6. タイヒミュラー空間の Thurston コンパクト化とエンド不変量

エンド不変量を説明するために, まずはタイヒミュラー空間の Thurston コンパクト化を説明する。曲面 $\Sigma = \Sigma_{g,n}$ 内の本質的単純閉曲線のイソトピー類全体が作る集合を \mathcal{S} とする。 Σ 上の双曲構造 $X \in \text{Teich}(\Sigma)$ を固定すると, 任意の $\alpha \in \mathcal{S}$ は単純閉測地線にイソトピックとなる。その長さを考えることにより, 長さ関数 $l_X : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}_+$ が定まる。双曲構造 X は, l_X のある有限部分集合 $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}$ への制限により特徴付けられる, 即ち, 長さ関数は埋め込み $\text{Teich}(\Sigma) \hookrightarrow \mathbb{R}^{\mathcal{S}_0}$ を定める。更に閉曲線の長さそのものでなく, 長さの比により双曲構造が定まることが知られており, 無限次元射影空間への埋め込み $\text{Teich}(\Sigma) \hookrightarrow P(\mathbb{R}^{\mathcal{S}})$ を得る。この像の閉包をとると, $\text{Teich}(\Sigma)$ を内部とする $6g-6+2n$ 次元球体を得る。これが $\text{Teich}(\Sigma)$ の Thurston コンパクト化である。ここでコンパクト化で付け加わる $6g-7+2n$ 次元球面は, Thurston 境界と呼ばれ, 射影的測度付きラミネーション空間 $\text{PML}(\Sigma)$ と同一視できる。このことを見るために各 $\alpha \in \mathcal{S}$ に位相的交点数関数 $\text{Int}(\alpha, \cdot) : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を考えることにより, 埋め込み $\mathcal{S} \hookrightarrow P(\mathbb{R}^{\mathcal{S}})$ を得ることに注意する。ここで, 双曲曲面 $X \in \text{Teich}(\Sigma)$ において, 一つの単純閉測地線 α の長さを 0 に近づける変形を考えると, α のカラー近傍はどんどん幅を広げ, そのため α と位相的に交わる曲線の長さは (交点数に応じて) どんどん長くなる。このことから, この $\text{Teich}(\Sigma)$ 内の道の極限が α であり, 従って, \mathcal{S} は Thurston 境界の部分集合であることが了解できるであろう。更に, \mathcal{S} が Thurston 境界内で稠密であることが知られている。

Σ 上の双曲構造を指定すると, \mathcal{S} の各元は単純閉測地線として実現できる。単純閉測地線に正実数の重み μ を与えた重み付き単純閉測地線の一般化として, 測度付きラミネーション (λ, μ) が以下のように定義される。まず λ は (測地的) ラミネーション, 即ち, 双曲曲面 Σ の閉部分集合で, 互いに交わらない (一般的に非可算無限個の) 単純閉測地線の和集合として表せる閉集合である。(一般的な状況では, λ は局所的にはカントール集合と开区間の直積に同相であり, Σ 内で測度 0 である。) そして μ は λ の横断方向の測度 (λ と横断的に交わる弧に対して正実数を対応させる) である。但し, 測度 μ のサポートが λ 全体であることを要請する。測度付きラミネーション全体の空間 $\text{ML}(\Sigma)$ は適当な位相の下で, $\mathbb{R}^{6g-6+2n}$ に同相である。 $\text{ML}(\Sigma) \setminus \{0\}$ において測度が定数倍であるものを同一視して得られる空間が射影的測度付きラミネーション空間 $\text{PML}(\Sigma)$ であり, これが Thurston 境界を与えているのである。

測度付きラミネーション空間 $\text{ML}(\Sigma) \setminus \{0\}$ において, 測度の情報を忘れて測度のサポートであるラミネーションが一致しているものが同値であるとみなして得られる商空間 $\text{UML}(\Sigma)$ を測度無視ラミネーション空間 (unmeasured lamination space) と呼ぶ。

エンド不変量は, 非コンパクト双曲多様体のエンド E に対して定義され, $E \cong \Sigma \times [0, \infty)$ であるときは, 大雑把に述べると, $\text{Teich}(\Sigma)$ あるいは $\text{UML}(\Sigma)$ に値をとる (詳細は [73, 98] 参照)。具体的に, どのように定義するかについては, 第 4.3 節を見ていただくことにして, 穴あきトーラスの場合のエンディング・ラミネーション定理を述べ

る。この時は、次の自然な同一視があることに注意する：

$$\text{Teich}(\Sigma_{1,1}) = \text{Teich}(\Sigma_1) = \mathbb{H}^2, \quad \text{UML}(\Sigma) = \text{PML}(\Sigma_{1,1}) = \partial\mathbb{H}^2 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

定理 2.5 (Minsky[72]) 全単射

$$\nu : \mathcal{DF}(\Sigma_{1,1}) \rightarrow (\overline{\mathbb{H}^2} \times \overline{\mathbb{H}^2}) \setminus \Delta(\partial\mathbb{H}^2) \quad (\Delta(\partial\mathbb{H}^2) \text{ は } \partial\mathbb{H}^2 \text{ の対角線集合})$$

が存在する。

Minsky とその共同研究者はこれを足がかりとして、一般の場合のエンディング・ラミネーション予想を完全に解決したのであった [74, 24]。尚、ここで ν^{-1} は連続であるが、 ν 自身は連続でない。そのため、表現空間 $\mathcal{R}(\Sigma_{1,1})$ における $\mathcal{DF}(\Sigma_{1,1})$ の形は極めて複雑であり、非常に興味深い研究対象となっている ([48] 及び参考文献参照)。

3. 幾何化定理

3.1. 幾何化定理と 8 つの 3 次元幾何構造

本節では、Thurston により予想され、Perelman により証明された幾何化定理と、その定理における双曲幾何の役割を述べる ([15, 78] 参照)。

定理 3.1 (幾何化定理) 任意のコンパクト 3 次元多様体は、幾何構造を持つ多様体への自然な分解を持つ。

Kneser と Milnor による一意素分解定理により、任意のコンパクト有向 3 次元多様体は、素な 3 次元多様体の連結和として一意的に表される。ここでコンパクト 3 次元多様体 M が素であるとは、もし M を連結和 $M_1 \# M_2$ として表したなら少なくとも一方の成分 M_i は S^3 に同相になることである。任意の素なコンパクト有向 3 次元多様体 M に対して、埋め込まれたトーラスによる標準的な分解 (Jaco-Shalen-Johannson 分解) を持つことが知られている。幾何化定理は、任意のコンパクト有向 3 次元多様体からこの 2 段階の分解を施して得られる各 3 次元多様体の内部が幾何構造を持つことを主張している。

ここで幾何構造とは、単連結、等質的、完備リーマン多様体 X のことであり、多様体 M が X を幾何構造に持つとは、 X に等長的かつ自由に作用する群 Γ による商空間 X/Γ として M が得られる事である。ここで X が等質的とは、その等長変換群 $\text{Isom}(X)$ が X に推移的に作用することである。3 次元幾何構造は (本質的に) 8 つ有り、各点の固定化群の連結成分が $\text{SO}(3)$, $\text{SO}(2)$, $\text{SO}(1) = 1$ に応じて 3 種類に分かれる。

1. 定曲率空間 S^3 , E^3 , H^3 .
2. 直積空間 $S^2 \times E^1$, $H^2 \times E^1$, および 3 次元リー群 Nil , $\widetilde{\text{SL}(2, \mathbb{R})}$.
3. 3 次元可解リー群 Sol .

ここで H^3 以外の幾何構造を持つ 3 次元多様体の位相型は次のように完全に分類できる。Sol 構造を持つ 3 次元多様体はアノソフ・モノドロミーを持つ円周上のトーラス束、あるいはそれを 2 重被覆にもつ 3 次元多様体である。 H^3 , Sol 以外の幾何構造を持つ

ものは、(円周の非交和として得られる) ザイフェルト束空間である ([97] 参照)。円周上のトーラス束は、実はポアンカレが分類しており (こうしてホモロジー群が同じだが同相でない 3 次元多様体対の最初の例を発見した)、ザイフェルト束空間はザイフェルトにより完全に分類されている。このため、双曲多様体の研究が最も重要なものとなる。

3.2. 双曲化定理

最も重要な幾何構造である双曲構造を持つための条件を述べるために、3次元多様体の基本事項を復習する ([79] 参照)。\$M\$ をコンパクト有向 3 次元多様体とする。\$M\$ が既約であるとは、\$M\$ 内に埋め込まれた任意の 2 次元球面が \$M\$ 内の 3 次元球体の境界になっていることである。球面定理により、これは \$\pi_2(M) = 0\$ であることと同値である。\$M\$ 内のコンパクト有向曲面 \$\Sigma\$ が適切に埋め込まれているとは、\$\Sigma \cap \partial M = \partial \Sigma\$ が成立することである。\$M\$ 内に適切に埋め込まれた曲面 \$\Sigma\$ が圧縮可能であるとは、\$M\$ 内に埋め込まれた円板 \$D\$ で \$D \cap \Sigma = \partial D\$ であり、しかも \$\partial D\$ は \$\Sigma\$ 内の本質的な単純閉曲線であることである。曲面 \$\Sigma\$ が圧縮不可能とは圧縮可能ではないことである。ループ定理により、この条件は、包含写像 \$j: \Sigma \to M\$ が誘導する準同型 \$j_*: \pi_1(\Sigma) \to \pi_1(M)\$ が単射であることと同値である。\$M\$ 内に適切に埋め込まれた曲面 \$\Sigma\$ が境界平行であるとは、\$M\$ の部分空間 \$N\$ で、

$$(N, \Sigma, N \cap \partial M) \cong (\Sigma \times [0, 1] / \sim, \Sigma \times \{0\}, \Sigma \times \{1\})$$

となるものが存在することである。但し \$\sim\$ は \$\Sigma \times [0, 1]\$ 上の同値関係で、各 \$x \in \partial \Sigma\$ に対して \$\{x\} \times [0, 1]\$ 上の全ての点を同値とすることにより生成されるものである。\$M\$ 内に適切に埋め込まれた曲面 \$\Sigma\$ が本質的であるとは、\$\Sigma\$ が圧縮不可能であり境界平行でないことである。アトロイダルという用語は、文献によって微妙に違う意味で使用されるが、本稿では、\$M\$ がアトロイダルであるとは、次の 2 条件が成立することとする。

1. \$\pi_1(M)\$ の階数 2 の自由アーベル群 \$\mathbb{Z}^2\$ に同型な部分群 \$H\$ を含めば、\$H\$ は周界的である (即ち、\$\partial M\$ の成分であるトーラスの基本群 (の像) の部分群に共役である) ことである。
2. \$M\$ は \$T^2 \times [0, 1]\$, \$K^2 \tilde{\times} I\$ (クラインボトル上の有向 \$I\$ 束) どちらにも同相でない。

トーラス定理を用いれば、既約な 3 次元多様体 \$M\$ がアトロイダルであるための必要十分条件は、\$M\$ が本質的なトーラスを持たなく、更に \$M\$ がザイフェルト束空間でもないことである。

幾何化予想の解決により、コンパクト有向 3 次元多様体 \$M\$ が有限体積双曲構造を持つ (即ち、その内部が有限体積完備双曲構造を持つ) ための必要十分条件が、以下の形で与えられる。

定理 3.2 無限基本群を持つコンパクト有向 3 次元多様体 \$M\$ が有限体積双曲構造を持つための必要十分条件は、\$\partial M\$ が高々圧縮不可能なトーラスから成り (空集合でも良い)、\$M\$ が既約かつアトロイダルであることである。

3 次元多様体 \$M\$ がハーケン多様体である場合、即ち \$M\$ が既約であり本質的な曲面を持つ場合、については、上の定理は Thurston によるハーケン多様体の双曲化定理と

して証明された。この証明は、HakenおよびWaldhausenにより証明された、ハーケン多様体に対するヒエラルキーの存在（即ち、本質的曲面で切り開いていくと有限回で3次元球体の非交和に到達する）を出発点としている。この意味では第2.3節で紹介したパンツ分解を用いた曲面の双曲構造の構成に似ている。しかし、様々な深い数学を必要とするその膨大な内容にちなみ怪物定理と呼ばれていた（[60]参照）。怪物定理では周辺構造，すなわち ∂M 上の単純閉曲線 γ で、それが代表する $\pi_1(M)$ の元がホロノミー表現により放物型変換に写されるもの、の情報を込めたpared多様体 (M, P) （ここで P は γ の ∂M における正則近傍，あるいは ∂M のトーラス成分）に対する双曲化定理として証明される（[60, 52, 65, 67]参照）。

既約な多様体が空でない境界を持てば、3次元球体あるいはハーケン多様体になる。特に、結び目補空間（正確には結び目外部）はハーケン多様体であり、Riley予想「結び目 K の補空間が（有限体積）双曲構造を持つための必要十分条件は、 K がトーラス結び目でもサテライト結び目でもないことである」が従う。この事実が結び目理論に与えた影響は計り知れない。

4. 曲面束の幾何構造とNielsen-Thurston理論

4.1. 曲面束

曲面 $\Sigma = \Sigma_{g,n}$ 上の向き保存自己同相写像 φ が与えられた時、有向3次元多様体

$$M_\varphi := \Sigma \times \mathbb{R} / (x, t) \sim (\varphi(x), t + 1)$$

は Σ をファイバーとする $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 上のファイバー束である。これを φ をモノドロミーとする曲面束と呼ぶ。 Σ 上の向き保存自己同相写像のイソトピー類全体が作る群を Σ の写像類群と呼び $\text{MCG}(\Sigma)$ で表すと、曲面束 M_φ は φ が代表する写像類群の元 $[\varphi]$ により定まる。以下、誤解の心配がないときは、自己同相写像とそれが定める写像類群の元を区別せずに同じ記号で表す。以下で M_φ が持つ幾何構造を調べる。

まず下記の単純な曲面の写像類群は簡単な有限群になり（[36]参照）、曲面束はザイフェルト束空間であり、 $S^2 \times \mathbb{E}$ または \mathbb{E}^3 の構造を持つ。

$$\text{MCG}(\Sigma_{0,0}) = 1, \quad \text{MCG}(\Sigma_{0,1}) = 1, \quad \text{MCG}(\Sigma_{0,2}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad \text{MCG}(\Sigma_{0,3}) \cong \mathfrak{S}_3$$

トーラス $\Sigma_{1,0} = T^2$ に対しては、 $\text{MCG}(T^2) \cong \text{SL}(2, \mathbb{Z})$ であり、与えられた $A \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$ に対して、それが定める \mathbb{R}^2 の線形変換が $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ に誘導する自己同相写像 φ_A が $A \in \text{MCG}(T^2)$ を代表する。

Case 1. $A = \pm E$ の時： M_A は3次元トーラス $T^3 = \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$ であるか、または T^3 を2重被覆に持ち、そのため \mathbb{E}^3 構造を持つ。

Case 2. $|\text{tr} A| < 2$ の時： A は周期が3, 4, 6いずれかの周期写像であり、従って T^3 を有限巡回被覆に持ち、そのため \mathbb{E}^3 構造を持つ。

Case 3. $|\text{tr} A| = 2, A \neq \pm E$ の時： A は $\pm \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ($n \neq 0$)と共役になり、ただ1つの1次元固有空間を持つ。この固有空間に平行な直線族は、 T^2 の本質的単純閉曲線による φ_A 不変な葉層構造を定め、これは M_A はザイフェルト束構造を定める。その底空間はトーラスまたはクラインボトルであり、更にオイラー数は消えない。これより、 M_A はNil構造を持つ。

Case 4. $|\text{tr}A| > 2$ の時: A は 2 つの 1 次元固有空間を持つので, \mathbb{R}^2 の座標変換により次の変換と共役である。

$$(x, y) \mapsto \pm(Kx, \frac{1}{K}y) \quad (K > 1)$$

従って T^2 上に 2 つの互いに横断的な 1 次元葉層構造があり, φ_A は一方の葉層構造では各葉の上で K 倍という拡大写像, 他方の葉層構造では各葉の上で $1/K$ 倍という縮小写像として作用するアノソフ写像である。これより M_A は Sol 構造を持つ。

4.2. Nilesen-Thurston 理論

一般の曲面 $\Sigma = \Sigma_{g,n}$ に対しても, 穴あきトーラスの場合と同様に任意の写像類 $\varphi \in \text{MCG}(\Sigma)$ に対して下記のいずれかが成立する (Nilesen-Thurston 分類 [103])。

1. 周期的: φ は周期写像である。
2. 可約: Σ 上の互いに交わらない本質的単純閉曲線の族 C で φ で保存されるものが存在する。
3. 擬アノソフ: Σ の特異ユークリッド構造で次の条件を満たすものが存在する。
 - (a) その局所座標の下で φ は表示 $(x, y) \mapsto \pm(Kx, \frac{1}{K}y)$ ($K > 1$) を持つ。この K を擬アノソフ写像 φ の拡大係数と呼ぶ。
 - (b) 各特異点は π の自然数倍の錐角を持つ。

この分類は, $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^n)$ の元の分類と同じように, タイヒミュラー空間の Thurston コンパクト化 $\overline{\text{Teich}}(\Sigma) \cong B^{6g-6+2n}$ への写像類の作用の固定点を調べることにより得られる。ちなみに, 擬アノソフ写像はモジュライ空間 $\text{Mod}(\Sigma) = \text{Teich}(\Sigma)/\text{MCG}(\Sigma)$ のタイヒミュラー距離に関する閉測地線に対応し, その長さは $\log K$ (K は拡大係数) で与えられる ([47] 参照)。

上の分類に応じて, 曲面束 M_φ は, (1) ザイフェルト束空間であるか, (2) 非自明な JSJ 分解 (トーラス分解) を持つか, (3) 双曲構造を持つ。

4.3. 曲面束の双曲構造とエンド不変量

擬アノソフ写像 φ をモノドロミーにもつ曲面束 $M_\varphi = \Sigma \times \mathbb{R}/(x, t) \sim (\varphi(x), t+1)$ の双曲構造がどのような形をしているか考えてみよう。いま $M_\varphi \cong \mathbb{H}^3/\Gamma$ とし, $p: \mathbb{H}^3 \rightarrow M_\varphi$ を普遍被覆射影, $\Sigma \subset M_\varphi$ をファイバー曲面, $\tilde{\Sigma}$ を $p^{-1}(\Sigma)$ の連結成分, $\tau \in \Gamma$ を M_φ の無限巡回被覆 $\Sigma \times \mathbb{R}$ の被覆変換 $(x, t) \mapsto (\varphi(x), t+1)$ の普遍被覆空間 \mathbb{H}^3 への持ち上げとする。このとき, 次が成立していなくてはならない。

1. $\tilde{\Sigma}$ は Σ の普遍被覆 \mathbb{H}^2 と同相であり, \mathbb{H}^3 内に適切に埋め込まれている。
2. 等長変換が作る群 $\langle \tau \rangle$ による $\tilde{\Sigma}$ の像 $\{\tau^n(\tilde{\Sigma})\}$ は互いに交わらない。
3. ファイバー曲面の基本群 $\hat{\Gamma} = \pi_1(\Sigma)$ は $\Gamma = \pi_1(M_\varphi)$ の無限正規部分群であるので極限集合 $\Lambda(\hat{\Gamma}) = \Lambda(\Gamma)$ である。一方, $M_\varphi = \mathbb{H}^3/\Gamma$ は有限体積なので, $\Lambda(\Gamma)$ は $\partial\mathbb{H}^3$ 全体となる。従って $\Lambda(\hat{\Gamma}) = \partial\mathbb{H}^3$ を得る。このため, 平面 $\tilde{\Sigma}$ の $\mathbb{H}^3 \cup \partial\mathbb{H}^3$ における閉包は $\partial\mathbb{H}^3$ 全体を含む!

曲面群に同型なクライン群としてすぐに思いつく擬フックス群に対しては、極限集合は円であり、最初の条件以外は満たさないということもあり、このようなことは不可能なように思える。Thurston 自身も一瞬そのように思ったそうである。しかしながら、Riley [90] が穴あきトーラス束である 8 の字結び目補空間の双曲構造を構成しており、また Jorgensen[49] も曲面束の双曲構造を組織的に構成していた。Thurston はこれらの研究に触発され、程なく望みの性質を持つファイバー群 $\hat{\Gamma}$ は、擬フックス群の極限として得られることを証明した ([87] 参照)。実際、モノドロミー φ のタイヒミュラー空間への作用を用いると、任意の $X \in \text{Teich}(\Sigma)$ に対して擬フックス群の無限列 $\{\text{QF}(\varphi^{-n}(X), \varphi^n(X))\}$ は $\mathcal{DF}(\Sigma)$ 内で収束し、その像が M_φ のファイバー群 $\hat{\Gamma}$ を与えるのである (二重極限定理: [86] 参照)。

このファイバー群 $\hat{\Gamma}$ のエンド不変量 (エンディングラミネーション) は以下のように記述できる。 Σ 上の本質的単純閉曲線 α を選び、 M_φ の無限巡回被覆 $\tilde{M}_\varphi = \mathbb{H}^3/\hat{\Gamma} \cong \Sigma \times \mathbb{R}$ 内で α にホモトピックな閉測地線を α^* とする。この閉測地線の被覆変換 $\hat{\tau}$ の冪による像 $\hat{\tau}^n(\alpha^*)$ は $n \rightarrow \pm\infty$ とするとき、 \pm 側のエンドに向かっていく。一方、 $\hat{\tau}^n(\alpha^*)$ は Σ 上の本質的単純閉曲線 $\varphi^n(\alpha)$ にホモトピックである。 $n \rightarrow \pm\infty$ としたとき $\varphi^n(\alpha)$ は $\text{PML}(\Sigma)$ 内で収束する。この極限が定める測度無視ラミネーション ($\in \text{UML}(\Sigma)$) が、エンディングラミネーションである。

穴あきトーラスの場合、擬アノソフ写像 $A \in \text{SL}(2, \mathbb{Z}) \cong \text{MCG}(\Sigma_{1,1})$ をモノドロミーとする $\Sigma_{1,1}$ -束 M_A のファイバー群の 2 つのエンディングラミネーションは、行列 A の 2 つの固有空間の傾きである二次無理数となる。

ファイバー群 $\hat{\Gamma}$ を近似する擬フックス群の極限集合は、とてつもなく複雑な曲線である。(Mumford-Series-Wright による素晴らしい著書 [80] または小森洋平による翻訳 [81] を参照されたい。また和田昌昭が開発したソフト OPTi[104] を使えば、極限集合が変化していく様子をリアルタイムで見ることができる。) 更に驚くべきことに、ファイバー群 $\hat{\Gamma}$ の極限集合 $\Lambda(\hat{\Gamma})$ は、実は球面充滿曲線 (Cannon-Thurston 写像) の像として理解できるのである ([30, 76] 及びその引用文献を参照)。

5. Thurston ノルムとファイバー面

曲面束 M の射影 $f: M \rightarrow S^1$ は $H^1(M; \mathbb{Z})$ の非自明元 (ファイバーが連結であるなら原始元) を定める。これをファイバー類と呼ぶ。もし 1 次元ベッチ数 $b_1(M)$ が 1 であるなら、 M のファイバー構造は (被覆 $S^1 \rightarrow S^1$ の合成を除いて) 一意的である。しかし、もし $b_1(M) > 1$ であるなら、次のように射影 f を「微小変形」することにより、無限個のファイバー構造 $f': M \rightarrow S^1$ を得る。 $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ の標準的 1-形式 dt の f による引き戻し ω を考える。 ω は非特異閉形式なので、それを微小変形して得られる閉形式 ω' も非特異であり、 $\ker \omega'$ は余次元 1 の葉層構造 \mathcal{F}' を定める。今、 $[\omega'] \in H^1(M; \mathbb{Q}) = \text{Hom}(H_1(M; \mathbb{Z}); \mathbb{Q})$ とすると、像 $[\omega'](H_1(M; \mathbb{Z}))$ は \mathbb{Q} の離散部分群であり、従って $r\mathbb{Z}$ ($r \in \mathbb{Q}$) の形をしている。 M の基点を定めて、基点と M の各点を結ぶ道に沿う ω' の積分は写像 $f': M \rightarrow \mathbb{R}/r\mathbb{Z} \cong S^1$ を定める。これは特異点を持たず、 \mathcal{F}' をファイバーとする曲面束構造の射影を与える。

Thurston は $H^1(M)$ 上のノルム (Thurston norm) を導入し、上述の現象のより精密な記述を与えた ([102], [52, Section 2] 参照)。以下、 M をコンパクト有向 3 次元多様体とする。 $H^1(M; \mathbb{Z}) \cong H_2(M, \partial M; \mathbb{Z})$ の任意の元は、 M 内に適切に埋め込まれた (連結とは限らない) コンパクト有向曲面 S により実現できる。 S から S^2 成分および

D^2 成分を除いて得られる曲面を S_0 とし, S の複雑度を $\chi_-(S) := |\chi(S_0)|$ で定める。 $\alpha \in H_2(M, \partial M; \mathbb{Z})$ のノルム $\|\alpha\|$ を以下で定義する。

$$\|\alpha\| = \min\{\chi_-(S) \mid [S] = \alpha\}$$

定理 5.1 (1) $\|\cdot\|$ は連続写像 $\|\cdot\| : H^1(M; \mathbb{R}) \cong H_2(M, \partial M; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ に拡張してベクトル空間 $H^1(M; \mathbb{R})$ 上の擬ノルムを定める。さらに, もし非自明なホモロジー類を表す M に適切に埋め込まれた任意のコンパクト有向曲面が負のオイラー標数を持つなら, $\|\cdot\|$ はノルムである。

(2) $\|\cdot\|$ がノルムである時, 単位球

$$B_M = \{\alpha \in H^1(M; \mathbb{R}) \mid \|\alpha\| \leq 1\}$$

は有限個の面からなる多面体で, しかもその頂点集合は有理点からなる。

(3) $\|\cdot\|$ がノルムであるとする。 B_M の有限個の余次元 1 の面 F_1, \dots, F_n で次の条件をみたすものが存在する。

1. F_i の原点からのコーン $\mathbb{R}_+ \cdot F_i$ の内部に含まれる任意の整数点はファイバー類になる。
2. 逆に, 任意のファイバー類はあるコーン $\mathbb{R}_+ \cdot F_i$ に含まれる。

上の定理において, 各 F_i をファイバー面と呼ぶ。ファイバー面 F に対して, そのコーン $\mathbb{R}_+ \cdot F$ の内部に含まれる無限個のファイバー構造を統一的に扱う研究が, Fried, Long-Oertel, 松元重則, McMullen 等により行われている ([68] 及び参考文献参照)。Fried は, 有限体積双曲多様体 M の各ファイバー面 F に対して, M のラミネーションで, コーン $\mathbb{R}_+ \cdot F$ の内部に含まれる任意のファイバー類に対してそのファイバー曲面と横断的に交わるもの, が存在することを証明し, McMullen は, その結果を用いてタイヒミュラー多項式 $\theta_F \in \mathbb{Z}[H^1(M; \mathbb{Z})]$ を導入した。

定理 5.2 (1) コーン $\mathbb{R}_+ \cdot F$ は, θ_F のニュートン多面体の頂点集合の双対である。

(2) コーン $\mathbb{R}_+ \cdot F$ に含まれる任意のファイバー類 $\phi \in H^1(M; \mathbb{Z})$ に対して, それが定めるファイバー構造のモノドロミーである擬アノソフ写像の拡大係数 $K(\phi)$ は, 整数係数 1 変数多項式 $\phi(\theta_F)$ の最大実根である。

(3) 関数 $\phi \mapsto K(\phi)$ は, コーン $\mathbb{R}_+ \cdot F$ 上の実解析的凸関数に拡張する。

アレクサンダー多項式を用いて定義されるアレクサンダーノルムと Thurston ノルムは, ファイバー類に対しては同じであり, 更に, もしファイバー面に付随するラミネーションが横断的に向き付け可能なら, アレクサンダー多項式はタイヒミュラー多項式を割ることが示されている。(最初の主張は, ファイバー結び目のアレクサンダー多項式の次数は結び目の種数の 2 倍である, という古典的結果の一般化である。)

たった一つの双曲多様体が, 無限個のファイバー構造 (即ち, 擬アノソフ写像, 言い換えればモジュライ空間の閉測地線) を定めるのはとても面白い現象であり, この現象を出発点とした様々な興味深い研究が発表されている ([44, 57] 及び参考文献参照)。

6. バーチャル・ファイブレーション予想

6.1. バーチャル・ファイブレーション予想とその根拠

円周上の曲面束は非常に特別な3次元多様体であり、3次元多様体全体の中のほんの一部を占めるといえる。しかしながら、有限被覆を取るという操作を許すなら、任意の有限体積双曲3次元多様体が曲面束の構造を持つという、信じることができそうにない予想をThurstonは提案した。

予想 6.1 (バーチャル・ファイブレーション予想) 任意の有限体積双曲3次元多様体は、円周上の曲面束を有限被覆に持つ。

3次元多様体が種数2以上の曲面を境界を持つ場合や既約でない場合は、明らかに曲面束を有限被覆に持つことは不可能であり、またザイフェルト多様体に対しては、曲面束を有限被覆に持つための必要十分条件は、そのオイラー数が0となる事であるので、上の予想において、有限体積双曲構造を持つという仮定は本質的である。Thurstonがこのような一見非常識と思える予想を提案した背景には、後にAgolとCalegari-Gabaiにより証明されたチーム・エンド予想およびCanaryの被覆定理の帰結として得られる次の事実にある ([29, Corollary 8.1])。

定理 6.2 有限体積双曲3次元多様体 $M = \mathbb{H}^3/\Gamma$ の基本群 Γ の任意の有限生成部分群 $\hat{\Gamma}$ は、次のいずれかの条件を満たす。

1. 幾何学的有限である
2. バーチャル・ファイバー群である。即ち、 M のある有限被覆が曲面束の構造を持ち、 $\hat{\Gamma}$ はそのファイバー曲面の基本群である。

特に M が閉双曲3次元多様体であり、 $\hat{\Gamma}$ が閉曲面群（球面以外の有向閉曲面の基本群）であるときは、 $\hat{\Gamma}$ は擬フックス群であるか、あるいはバーチャル・ファイバー群である。また M が双曲結び目補空有間で $\hat{\Gamma}$ が最小種数ザイフェルト曲面 Σ の基本群であるときは、 $\hat{\Gamma}$ は擬フックス群であるか、あるいはファイバー群（従って Σ はファイバー曲面）である [37]。

6.2. Waldhausenの問題とその解決

もし予想6.1が正しいなら、任意の閉双曲3次元多様体は閉曲面群を部分群にもつことになるが、これは、3次元多様体論における長年の懸案であったWaldhausen[106]の問題が解決されることになる。

問題 6.3 (Waldhausen) M を既約な有向閉3次元多様体で、その基本群は無限群であるとする。このとき $\pi_1(M)$ は閉曲面群を部分群に含むか？

バーチャル・ファイブレーション予想が解けた背景には、この問題に対するKahn-Markovic [51]による驚くべき精密な肯定的解答がある。

定理 6.4 (Kahn-Markovic) $M = \mathbb{H}^3/\Gamma$ を閉双曲3次元多様体とする。このとき、任意の $\epsilon > 0$ に対して、 Γ の部分群 Γ_ϵ で次の条件を満たすものが存在する。

1. Γ_ϵ は擬フックス閉曲面群である。

2. 双曲曲面 $\Sigma = \mathbb{H}^2/\Gamma_\epsilon^{(0)}$ と $(1 + \epsilon)$ 擬等長写像 $g : \partial\mathbb{H}^3 \rightarrow \partial\mathbb{H}^3$ が存在し, $\Gamma_\epsilon = g\Gamma_\epsilon^{(0)}g^{-1}$ が成立する。

条件2において \mathbb{H}^2 は \mathbb{H}^3 の全測地的部分空有間と同一視している。 $\epsilon > 0$ を限りなく小さな正数に選ぶと, Γ_ϵ は限りなくフックス群に近く, そのため, その極限集合は限りなく真円に近い。 Γ の元による Γ_ϵ の共役を考えると, $\partial\mathbb{H}^3$ の任意の点の近くにそれを取り囲む限りなく小さく限りなく真円に近い曲面群の極限集合が存在することになる。

6.3. 立方複体と閉3次元双曲多様体

バーチャル・ファイブレーション予想証明の鍵を握るのは, Wiseにより展開された立方複体 (cube complex) の理論である。立方複体 (cube complex) とは, ユークリッド立方体 $I^n = [-1, 1]^n$ の非交和から, それらの面を等長写像で貼り合わせて得られる胞体複体のことである ([43, Definition 2.1] 参照)。例えば, I^n において各対面を自然に貼り合わせると n 次元トーラス T^n を底空間とする胞体複体を得られるが, これは立方複体となっている。また1次元立方複体は, 各辺の長さが2であるような (多重辺やループ辺を許す) グラフに他ならない。連結な絡み目ダイアグラムから得られるデーレン複体 ([23, II.5.41]) は, 2次元立方複体であり, 絡み目外部のスパンを形作る。更に境界トーラスからデーレン複体への自然な写像の写像柱は絡み目外部に立方複体の構造を与える。ちなみに, 体積予想で重要な役割を果たす結び目補空間の Thurston-横田分解 ([109] 参照) は, この立方複体から構成される。

立方複体 X が非正曲率であるとは, グロモフ条件「各頂点のリンクが旗単体的複体である」を満たすときをいう。ここで, 旗単体的複体とは, 単体的複体 L で, L の頂点集合の部分集合 $\{v_0, v_1, \dots, v_k\}$ の任意の2点が互いに辺で結ばれているなら, それが k 単体の頂点集合となっているものである。例えば, 2つの正方形をその境界で貼り合わせて得られる立方複体 X_0 の任意の頂点のリンクは2つの頂点を2つの辺でつないでできるグラフであり, 単体的複体ではないので, X_0 は非正曲率ではない。3次元立方体の境界 ∂I^3 の任意の頂点のリンクは, 2単体の境界と同型な単体的複体であるが, 旗単体的複体ではないので, 立方複体 ∂I^3 は非正曲率ではない。 I^2 の対辺を自然に同一視してできる T^2 を底空間とする立方複体 X_1 の頂点のリンクは, 長さが4のサイクルが作る旗単体的複体であるので, X_1 は非正曲率である。有向閉曲面 Σ_g ($g \geq 2$) のパンツ分解において, 各々のパンツを2つの六角形に分割することにより, Σ_g の六角形によるタイル貼りを得るが, この双対として得られる立方複体 X_g の任意の頂点のリンクは長さが6のサイクルが作る旗単体的複体であるので, X_g ($g \geq 2$) は非正曲率である。連結な絡み目ダイアグラムから得られるデーレン複体および立方複体が非正曲率であるための必要十分条件は, そのダイアグラムが既約かつ交代的であることである。この事実の結び目理論への興味深い応用が [10, 4] により与えられている。

3次元多様体 M が本質的な曲面を含んでいるなら, $\pi_1(M)$ は (1次元立方複体である) ツリーに作用する。曲面が埋め込まれていなくても基本群が単射になるように曲面が M にはめ込まれていたなら, $\pi_1(M)$ は非正曲率立方複体に作用することを, Sageev [93] は Bass-Serre 理論の一般化として証明した。Bergeron-Wise [14] は, この理論と Kahn-Markovic の定理 6.4 を用いて, 任意の閉双曲3次元多様体 M に対して, それとホモトピー同値な非正曲率立方複体 X が存在することを証明した。交代結び目補空間のような特別な3次元多様体が, 非正曲率立方複体の構造を持つことだけでも十分面

白いが、任意の閉双曲多様体の基本群がある非正曲率立方複体 X の基本群と同型である、というのは驚きである。

6.4. 立方複体内の超平面と特別立方複体

立方複体 X の各立方体 $[-1, 1]^n$ は n 枚の超平面 (ある座標成分 $x_i = 0$ で与えられる) を持ち、これらの超平面は貼りあって X 内にはめ込まれた“余次元 1”の立方複体を形作る。例えば、 $T^n = I^n / \sim$ では $n - 1$ 枚の T^{n-1} を形作り、デーン複体から得られる結び目補空間を底空間とする立方複体では、デーン複体と 2 つのチェッカーボード曲面を得る。これらの超平面が全て埋め込みになっていて、しかも「その 1-近傍が、お互いに分離されている」ような立方複体を特別立方複体と呼ぶ。Haglund-Wise [43] は、任意の非正曲率特別立方複体はある Salvetti 複体 $S(\Gamma)$ に局所等長写像を持ち、従ってその基本群 $\pi_1(X)$ は直角アルティン群 $A(\Gamma)$ に埋め込まれることを証明した。ここで、直角アルティン群 $A(\Gamma)$ とは (多重辺やループ辺を持たない) 有限グラフ Γ から群表示

$$A(\Gamma) = \langle v \in V(\Gamma) \mid [v, w] \quad (\{v, w\} \in E(\Gamma)) \rangle$$

で定まる群のことであり、Salvetti 複体 $S(\Gamma)$ は、この群表示に付随する 2 次元胞体複体に、3 次元以上の立方体を適切に貼り付けて得られる非正曲率立方複体である。ここで任意の直角アルティン群は、ある直角コクセター群

$$C(\Gamma') = \langle v \in V(\Gamma') \mid v^2, \quad [v, w] \quad (v \in V(\Gamma'), \{v, w\} \in E(\Gamma')) \rangle$$

埋め込まれる。

直角コクセター群 $C(\Gamma')$ は *virtually RFRS* (residually finite rationally solvable) と呼ばれる極めて良い性質を持っている [5, Theorem 2.2]。即ち、 $C(\Gamma')$ のある有限指数部分群は G は、以下の条件を満たす可解列を持つ: $G = \pi_1(Y)$ とすると、cofinal な有限巡回被覆の列 $Y \leftarrow Y_1 \leftarrow Y_2 \leftarrow Y_3 \leftarrow \dots$ が存在し、各有限巡回被覆 $Y_{i+1} \rightarrow Y_i$ は、無限巡回被覆 $\tilde{Y}_{i+1} \rightarrow Y_i$ の商として得られる。ここで、cofinal であるとは、 $\pi_1(Y_i)$ を $\pi_1(Y)$ の部分群とみなしたときに、 $\bigcap_{i=1}^{\infty} \pi_1(Y_i) = 1$ となることである。古典的結び目理論研究者にとって、無限巡回被覆の商として有限巡回被覆を構成するのは日常茶飯事であるが、(まず最初に適当に有限被覆をとってから) そのような操作の繰り返しの極限として普遍被覆が得られるという調子のよい性質が、*virtually RFRS* である。Agol [5] は、この性質が、バーチャル・ファイブレーションを持つための必要十分条件であることを示していた。

定理 6.5 (Agol) M をコンパクト既約有向 3 次元多様体で、 ∂M は高々トーラスから成るとする。このとき、 M が *virtually fibered* であるための必要十分条件は、 $\pi_1(M)$ が *virtually RFRS* であることである。

与えられた非分離的な曲面 F がファイバー曲面であるための必要十分条件は、 M を F で切り開いて作られる縫い目付き多様体 $M \setminus F$ が積縫い目付き多様体であることである。適切な被覆空間を取り、その中で生じる新しい 2 次元ホモロジー類で縫い目付き多様体を切り開いて、その複雑度を下げていき、ついには複雑度 0 の積縫い目付き多様体を見付けるというのが証明のアイデアである。有限巡回被覆 $Y_{i+1} \rightarrow Y_i$ に関する条件は、 Y_i 内に棲む縫い目付き多様体が、その有限巡回被覆 $Y_{i+1} \rightarrow Y_i$ へ持ち上がることを保証するために使われる。

そこで残るのは次の予想の証明となる。

予想 6.6 (Wise) 非正曲率立方複体 X の基本群 G が双曲群であるなら、 X のある有限被覆 \tilde{X} は特別非正曲率立方複体になる。

この予想は、Agol [7] により、以下の結果に基づく議論により証明された。

1. Virtually special hyperbolic group (特別非正曲率立方複体の基本群を有限指数部分群として含む双曲群) はバーチャル・ハーケン多様体の群論的類似であり、したがって、ハーケン多様体に対するヒエラルキーと類似の群論的ヒエラルキーを持つ双曲群の有限次拡大になっている (Wise [108])。
2. カスプ付き 3 次元双曲多様体に対する双曲的デーネン充填定理 (十分複雑なデーネン充填を施せば閉双曲多様体を得る) の群論的類似である、相対双曲群の「デーネン充填」に関する Malnormal Special Quotient Theorem (擬凸である Malnormal subgroup を周辺群とする相対双曲群に十分複雑な「デーネン充填」を施せば、双曲群を得る (Wise [108]))。

証明の最後のステップは、「Weak Separation Theorem」で存在を保証したある性質をもつ無限被覆を、一旦基本領域に切り分けてそのピースを使って同じ性質をもつ有限被覆を構成することからなる。

なお、カスプ付き双曲多様体の基本群は双曲的でないため、上の議論は適用できないが、Wise [108, Theorem 14.29] により、virtually special であること、即ち、有限被覆が特別非正曲率立方複体と同じ基本群をもつことが証明されている。従って、カスプ付き双曲多様体に対しても virtual fibration 定理は成立する。

Bestvina [16] が述べているように、この証明で特徴的なことは、たとえ閉双曲 3 次元多様体の基本群に限っても、3 次元多様体の世界の中だけでは Wise 予想を証明することは出来なくて、幾何学群論においてバーチャル・ハーケン多様体の類似を考える事により、証明が完成された事である。また、直角アルティン群は (自由群と自由アーベル群の間を補完する) 極めて特別な群であるにもかかわらず、任意の双曲閉 3 次元多様体の基本群を (その指数有限部分群を取れば) 埋め込みを許容するという事実は、印象的である。以上の議論はバーチャル・ファイブレーション予想の証明だけにとどまらず、様々な応用がある ([12, Chapter 5])。なお、バーチャル・ファイブレーション予想の背景と証明については、蒲谷祐一氏による素晴らしいノート [50] がある。

7. 曲面束とヘガード分解

任意の有向閉 3 次元多様体 M は 2 つのハンドル体とその境界で貼り合わせるにより得られる。言い換えれば、 M は 2 つのハンドル体 V_1, V_2 に分解できる。これをヘガード分解と呼び、 $\Sigma = \partial V_1 = \partial V_2$ をヘガード曲面と呼ぶ。境界があるコンパクト有向多様体に対しても、ハンドル体の代わりに圧縮体 ($\Sigma \times [0, 1]$ の片側の境界に 2 ハンドル、3 ハンドルを貼り付けて得られる 3 次元多様体) を用いれば、同様の分解が得られ、これもヘガード分解と呼ばれる。3 次元球面内の絡み目 (S^3, L) は 2 つの自明タングル (3 次元球体 B^3 とその中に自明に埋め込まれた弧 t の対 (B^3, t)) に分解でき、これは橋分解と呼ばれる。これもヘガード分解の一種である。

筆者は、以下に述べる 3 つの理由により、ヘガード分解の構造と曲面束の構造には相通ずるところがあると考えている。また、その観点から、興味深いと思える問題がたくさん生じる。

(1) ファイバー構造: 曲面束は S^1 上のファイバー構造である。それに対して、ヘガード分解は1次元軌道体 $\mathcal{I} := S^1/(z \sim \bar{z})$ 上の特異曲面束と理解出来る。この軌道体の底空間 $|\mathcal{I}|$ は閉区間 $[-1, 1]$ で、両端点 $\{\pm 1\}$ が特異点である。特異点上のファイバーは、 Σ/h 、ただし h はヘガード曲面 Σ 上の1次元固定点集合を持つ向き逆転対合、と表される。この特異ファイバー構造を軌道体被覆 $S^1 \rightarrow \mathcal{I}$ で引き戻すと、円周上の曲面束を得る。これを言い換えれば、分岐ファイブレーション定理「任意の有向閉3次元多様体 M は曲面束を2重分岐被覆に持つ」を得る [96, 26, 77, 13]。

(2) モノドロミー群: 円周上の曲面束 M_φ はモノドロミー φ により決定され、それが生成するモノドロミー群 $\langle \varphi \rangle \subset \text{MCG}(\Sigma)$ は、以下の性質を持つ: ファイバー曲面上の2本の本質的単純閉曲線が M_φ の中でホモトピックとなる必要十分条件は、モノドロミー群の作用で写り合うことである。ヘガード分解 $M = V_1 \cup_\Sigma V_2$ に対しても、類似の性質をもつ「モノドロミー群もどき」が拡大写像類群 $\text{MCG}^\pm(\Sigma)$ の部分群として以下のように定まる。各 $i = 1, 2$ に対して、 $\text{MCG}^\pm(\Sigma)$ の元で、ハンドル体 V_i の自己同相写像に拡張し、その拡張が V_i の恒等写像にホモトピックなもの全体が作る部分群を G_i とする。 G_1 と G_2 が生成する $\text{MCG}^\pm(\Sigma)$ の部分群 G は、下記の理由により「モノドロミー群もどき」と考えることが出来る。 G の作用で写り合うヘガード曲面 Σ 上の2本の本質的単純閉曲線は M 内でホモトピックである。しかも、ヘガード分解が十分高い Hempel 距離を持ち「有界組み合わせ構造」を持つときは、部分的にこの逆も成立する [85]。更に、2橋絡み目の2橋分解に対して、同様の群 G を考えると、きちんと記述できる例外を除いて、その逆も成立する ([62] 及び参考文献参照)。また面白いことに、前述の分岐ファイブレーション定理で生じる曲面束のモノドロミー φ は、 G_i に含まれる向き逆転対合 h_i を使って $\varphi = h_1 h_2$ と表せる。

(3) 表現空間における位置: 穴あきトーラス $\Sigma = \Sigma_{1,1}$ に関する Keen-Seres [55] の理論により、擬フックス空間 $\mathcal{QF}(\Sigma)$ はプリーツ部分多様体の族 $\{\mathcal{P}(\lambda_-, \lambda_+)\}_{(\lambda_-, \lambda_+) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \Delta}$ が定めるプリーツ座標を持つ。ここで、 $\mathcal{P}(\lambda_-, \lambda_+)$ はその凸核の2つの境界が測地的ラミネーション λ_\pm で折れ曲がった双曲曲面となる擬フックス表現全体が作る $\mathcal{QF}(\Sigma)$ の部分空間である。今、曲面束のファイバー群のエンディングラミネーションを (λ_-, λ_+) とすると、ファイバー群は $\mathcal{P}(\lambda_-, \lambda_+)$ の「終点」(特別な境界点) となっている。一方、有理的プリーツ部分多様体 $\mathcal{P}(r_-, r_+)$ ($r_\pm \in \mathbb{Q}$) は $\mathcal{QF}(\Sigma)$ の外部への自然な延長 $\hat{\mathcal{P}}(r_-, r_+)$ を持ち、その「終点」(特別な境界点) が、2橋結び目補空間基本群の2橋分解から定まる表現になっていることを [11] でアナウンスしている。つまりファイバー群が定める忠実離散表現とヘガード分解が定める忠実でない離散表現は、(少なくとも穴あきトーラスの世界では) プリーツ部分多様体 (の拡張の) 特別な境界点になっているのである。

一般に Σ をヘガード曲面とする双曲多様体 $M = \mathbb{H}^3/\Gamma$ の基本群 Γ は $\pi_1(\Sigma)$ の商群であるため、 $\pi_1(\Sigma)$ の忠実でない離散表現 ρ_M の像として得られる。 $\mathcal{D}(\Sigma)$ を $\pi_1(\Sigma)$ の離散表現全体から成る $\mathcal{R}(\Sigma)$ の部分空間とすると、Mostow-Prasad 剛性定理により、 ρ_M は $\mathcal{D}(\Sigma) \setminus \mathcal{DF}(\Sigma)$ の孤立点である。しかしながら、ヘガード分解が十分複雑であるなら、クライン群の空間の孤島といえる ρ_M は、次のようにしてクライン群の空間の大陸である $\mathcal{QF}(\Sigma)$ と次のような航路で結ばれていると予想している。 $\mathcal{QF}(\Sigma)$ の「有理的」プリーツ部分多様体 $\mathcal{P}(r_-, r_+)$ は $\mathcal{QF}(\Sigma)$ の外部への自然な延長 $\hat{\mathcal{P}}(r_-, r_+)$ を持ち、 ρ_M は (それに対応する) $\hat{\mathcal{P}}(r_-, r_+)$ の「終点」(特別な境界点) となっている。有

限体積双曲多様体 M は $\Sigma \times [-1, 1]$ に 2 ハンドルと 3 ハンドルを貼り付けて得られるが、良い状況では、この位相的操作が、双曲的錐多様体の連続族により、幾何的に実現できるだろうというのが予想（願望）の意味である。この予想は、もっとも単純な場合は次の予想となる。

予想 7.1 ([11]) K を S^3 内のトンネル数 1 の双曲結び目とし、 τ を解消トンネルとする。このとき、 $S^3 \setminus K$ を底空間、 τ を錐軸とする双曲錐多様体の連続族で錐角が 0 から 2π まで動くものが存在する。

この予想は、Adams 予想「双曲結び目の解消トンネルは測地線にイソトピックである」(ホモトピックであることは自明だがイソトピックかどうかは非自明であることに注意) [2] の精密化と考えることができる。尚、Adams 予想に関しては大きな進展が Cooper-Futer-Purcell [31] により得られている。

8. 今後の課題

問題 8.1 (1) 表現空間 $\mathcal{R}(\Sigma)$ における離散表現全体がつくる部分空間 (クライン群の空間) $\mathcal{D}(\Sigma)$ の配置を調べよ。特にどのような $\mathcal{D}(\Sigma)$ の孤立点が錐多様体の連続族で $\mathcal{DF}(\Sigma)$ に結ばれるか調べよ。

(2) 曲面 Σ の代わりにハンドル体または自明タングル補空間を選んだときに同様の問題を考えよ。

2 系自明タングル補空間 $B^3 - t$ に対する上記の問題は 2 つの放物型変換が生成する群の研究と同値である。先駆者 Riley は、パンチカード時代のコンピュータ環境の下で大変な苦勞の末に、2 つの放物型変換が生成するクライン群の空間 $\mathcal{D}(B^3 - t) \subset \mathcal{R}(B^3 - t) \cong \mathbb{C} \setminus \{0\}$ を特大用紙に描き、様々な予想を立てた ([11, Figure 0.2a], [91, 92] 参照)。特にそのようなクライン群の分類に関する予想は、ねじれ元のない場合は Adams [3] により、一般の場合については Agol [4] により証明されている ([63] 参照)。尚、どちらの証明も、Thurston の軌道体定理 ([19, 32] 参照) を本質的に使う。山下靖は、[11, Figure 0.2b] の中で $\mathcal{D}(B^3 - t)$ 及びその孤島を大陸に結ぶ絵を描いた。その絵に明らかに存在する美しいパターンに、我々がまだ知らない数学が隠されているのではないかと想像を逞しくしている。尚、この錐多様体を用いるアプローチは、Martin が推進しているプロジェクト「2 元生成算術的クライン群の決定」([66] 参照) に優れた効力を発揮することが山下靖により示されており、今後の進展が期待される。

Kim-Lecuire-Ohshika[56] はハンドル体 V の基本群の表現空間 $\mathcal{R}(V)$ を研究し、特に V を一方のハンドル体とするようなヘガード分解を持つ双曲多様体のホロノミー表現全体の集積点集合 (孤島全体の集積点集合) がショットキー空間 (大陸) の境界に一致することを証明している。

問題 8.2 幾何化定理を精密化して、幾何構造を目で見えるようにせよ。

幾何化定理で幾何構造の存在は保証されるが、その幾何構造がいったいどのようなものであるかということ、まだわからないことだらけである。任意の結び目は結び目ダイアグラムで表現できるが、そのダイアグラムの組み合わせ情報がどれだけ幾何に反映されているであろうか? 例えば、交差点が定める結び目補空間の弧は測地線にイソトピックか? またそうだとすると、その測地線達の相互位置関係はダイアグラムで読み取れるものと同じか? カスプから出てカスプに戻る“最短”測地線 (そして最短

閉測地線) はダイアグラム上でどのように見えるか? という問題に関しては, 2橋結び目の場合を除けば, まだほとんど何もわかっていないようである。2橋結び目を特別な場合として含む交代絡み目に関しては, Menasco-Thistlethwaite[70] による Tait フライプ予想の解決により, それを表す(既約) 交代ダイアグラムは, フライプを法として一意的なので, 交代ダイアグラムから得られる組み合わせ情報は, 幾何構造によく反映されると予想している。特に, 予想 7.1 の類似が交代絡み目補空間の交差点が定める弧に対して成立するのではないかと想像している。また逆に, Tait フライプ予想を双曲幾何の立場から(あるいは立方複体の観点から) 証明することも可能かもしれない。

A'Campo[1] が, (複素) 平面曲線の特異点のリンクとして得られる結び目の一般化として導入したディバイド結び目は, 特殊なモノドロミー(右ひねりデーンツイストの積) を持つファイバー結び目であり, その出自からしても極めて興味深い結び目である。この結び目補空間の双曲構造を目で見ることはできないだろうか?

Purcell は, この種の問題を“Effective Geometrization” または “WYSIWYG Topology: What you see is what you get” と呼び, Futer, Kalfagianni 等との共同研究で, この方向の研究を精力的に進めている。同じ思想のもとで, Namazi-Souto[83] はヘガード分解と幾何構造の関係に関する重要な研究成果を上げた。また, これを含む一般的な結果が Brock-Minsky-Namazi-Souto [25] により得られている。

問題 8.3 一般の表現に対するエンド不変量を研究せよ。

Bowditch[21] は(離散とも忠実とも限らない) 一般の表現 $\rho \in \mathcal{R}(\Sigma_{1,1})$ に対してエンド不変量の集合 $\mathcal{E}(\rho) \subset \hat{\mathbb{R}}$ を定義した。 ρ が忠実離散表現である時は, $\mathcal{E}(\rho)$ は通常のエンド不変量からエンディング・ラミネーション成分だけを集めたものになっており, 特に ρ が擬フックス表現のときは $\mathcal{E}(\rho) = \emptyset$ である。BQ 予想「 $\mathcal{E}(\rho) = \emptyset$ なら ρ は擬フックス表現か?」[21, Conjecture A] という極めて興味深い予想は, まだ未解決である。また $|\mathcal{E}(\rho)| > 2$ となる時は, 一般にはコントロール集合になると予想されているが [99, Conjecture 1.8], そのような表現でエンド不変量の具体的な形が決定された唯一の例は, 2橋結び目の双曲構造に由来する表現のみである ([62] 参照)。予想「 $\mathcal{E}(\rho)$ が 2 つ以上の点を含み全体集合でもないときは, 表現の共役類がエンド不変量で決定されよう」[99, Conjecture 1.9] は, エンディング・ラミネーション予想の一般化とみなせて, とても興味深い, まだ何もわかっていない。

問題 8.4 双曲的穴あき曲面束の標準的理想胞体分割と変針理想単体分割を比較せよ。

Epstein-Penner[35] により, 有限体積カスプ付き双曲多様体は, 一意的に定まる幾何的理想胞体分割(標準的理想胞体分割)をもつことが示されている。2次元においては, 標準的分割のイソトピー型により双曲構造をグループにまとめることにより, タイヒミュラー空間の自然な分割を与えることができる ([22] 参照)。3次元以上においては, 双曲構造が一意的なので, 標準的分割の組み合わせ構造が有限体積カスプ付き双曲多様体の完全な位相不変量になる。精度保障付計算により標準的分割を求めるプログラム [46, 34] も開発されており, 様々な応用が与えられている。

一方, 擬アノソフモノドロミー $\varphi \in \text{MCG}(\Sigma)$ の不変特異ユークリッド構造がカスプ以外に特異点を持たない時は, Agol[6] により, φ が生み出す力学系の観点から自然な M_φ の位相的理想単体分割(変針理想単体分割)が一意的に存在することが証明され

ている。Guéritaud [41] により、変針 (veering) 理想単体分割は、ファイバー群に付随する Cannon-Thurston 写像の性質をよく反映する Cannon-Thurston-Dicks フラクタルタイル貼りと密接な関係があることが示されており ([33] 参照), その意味でも興味深い分割である。

それでは, M_ρ の 2 つの自然な分割の間にどのような関係があるのでしょうか? 一般には, 変針理想単体分割は幾何的分割ですらないことがあることがあるが [45], 穴あきトーラス束や, 正負のホップバンドを交互にプラミングして得られる 2 橋ファイバー絡み目については, 両者は一致する [94]。2 つの自然な分割の共通点と差異を解明するのは, 興味深い問題である。

問題 8.5 楕円のモンテシノス結び目の球面的軌道体としての構造と, その補空間の双曲構造を, 比較せよ。

楕円のモンテシノス絡み目 K に対して, K で分岐する S^3 の 2 重分岐被覆 M は球的多様体 S^3/G (G は S^3 に等長かつ自由に作用する有限群) となり, その (有限) 普遍被覆空間 \tilde{M} は再び S^3 となる。 $\tilde{M} = S^3$ における K の逆像 \tilde{K} は S^3 の大円が作る絡み目となる [28, 95]。実際, 二重分岐被覆 M 上の被覆変換は球面構造に関する等長変換であるので, その普遍被覆 $\tilde{M} = S^3$ への持ち上げと G が生成する群 (π -軌道体 (S^3, K) の軌道体基本群 [20]) \tilde{G} は S^3 の等長変換群であり, \tilde{K} は \tilde{G} の特異集合である。このため, \tilde{K} の S^3 における配置は, かつちりと決まり, この意味で, $S^3 \setminus \tilde{K}$ には球面座標が入る。一方, 一般的には楕円のモンテシノス絡み目 K は双曲絡み目なので, $S^3 \setminus \tilde{K}$ には一意的に双曲構造が入る。この双曲構造を球面座標の下で書き下すことはできるであろうか? $S^3 \setminus \tilde{K}$ が同時に併せ持つ, かつちりとした球面座標と双曲座標を比較するのは大切な問題だと 30 年以上思い続けているが, また吉田正章氏の論説 [110] に鼓舞されたこともあったが, 残念ながらまだ何の進展もない。しかしながら, せめて \tilde{K} が S^3 内で「良い位置」にあることを確認したいと思い, 結び目のエネルギーを定義するという問題を提案したところ, 福原真二氏の先行研究 [38] に触発された今井 (大原) 淳氏が結び目のエネルギーの理論を打ち立てられた [84] のは望外の喜びであった。

ちなみに, この大円絡み目から, 簡単だが面白い次の 2 つの話が生まれていた。通常 2 橋絡み目の分類には, Schubert による 2 橋球面の一意性の証明, またはライデマイスター・トーションによる (2 重分岐被覆である) レンズ空間の分類定理を必要とするが, 実は大円絡み目 \tilde{K} の絡み数という単純な不変量だけで分類が可能である [27]。大円絡み目の補空間は容易に曲面束の構造を持つことがわかるのに対し, 楕円のモンテシノス絡み目は一般にはファイバー絡み目でないので, ここから直ちにバーチャル・ファイブレーション予想の非自明な例が生まれる [107]。同様のアイデアにより多くの (楕円的ではない) モンテシノス絡み目補空間もバーチャル・ファイブレーションを持つことが示されている [9, 42]。

問題 8.6 (Long-Reid) 2 つの結び目群が同型な副有限完備化 (profinite completion) を持てば, その 2 つの結び目群は同型か?

一般に群 G の副有限完備化とは, その有限商群全体が作る逆系の逆極限のことである。上の問題は次のようにも言い換えることができる: 結び目群 $G(K) = \pi_1(S^3 \setminus K)$ に

対して、その有限商群全体の集合を $Q(G(K))$ とする。2つの結び目群 $G(K_1), G(K_2)$ に対して $Q(G(K_1)) = Q(G(K_2))$ なら $G(K_1) \cong G(K_2)$ か？

Boileau と Friedl は、上の問題を「3次元多様体の基本群の副有限完備化から3次元多様体のどのような性質が引き出せるか？」という広い観点で捉えることにより、様々な研究成果を挙げつつある ([18] 参照)。

筆者がこの問題に興味を持ったのは、児玉宏児氏との共同研究 [59] がきっかけとなっている。そこでは互いにミュータントな結び目の対を区別する必要があるがあった。我々が取った方法は、結び目 K で分岐する S^3 の分岐被覆のうち、与えられた有限次数 d をもつものを全部書き上げ、その1次元ホモロジーを比較するというものである。(計算の実行は児玉氏が開発していたコンピュータソフト [58] で行った。) この方法で15組のミュータント対を調べたところ、14組は $d=5$ で区別がつき、残りの1組は $d=6$ で区別がついた。児玉氏のソフトのおかげで計算できたとはいえ、このような小さな次数の分岐被覆を比較するだけで複雑な結び目の対を区別できたのは驚きであった。また歴史的には、Perko [88] が分岐被覆のホモロジー不変量を用いて10交点までの素結び目の分類を完成させたという経緯もある。そこで、次の問題を提案したい。

問題 8.7 (1) 相異なる2つの素結び目は、上の様にその有限分岐被覆を調べることにより区別できるか？

(2) 上の (1) において、被覆の次数をあらかじめ評価することができるか？例えば、2つの結び目の交点数が共に n 以下であるなら (または体積が n 以下であるなら)、 n だけで決まる評価可能な自然数 $d(n)$ が存在して、次数 $d(n)$ 以下の分岐被覆を調べただけで、2つの結び目を区別できるか？

(3) 問題8.6直後に述べた言い換えにおいて、上の (2) と同様に、考える有限商群の位数を、2つの結び目群の複雑度であらかじめ決まる定数 d で抑えることができるか？

上で述べたように、結び目で分岐する3次元球面の分岐被覆のホモロジー群を調べるのは、結び目理論における極めて有効な常套手段であったが、すべての有限分岐被覆を考えて、その漸近挙動を調べると、想像を絶するようなことが起こることが Le [61] により明らかにされた。

定理 8.8 (Le) (1) K を S^3 内の結び目、 $X = S^3 \setminus K$ とする。結び目群 $\Pi = G(K)$ の有限指数部分群 Γ に対して、 \hat{X}_Γ を K で分岐する S^3 の Γ -分岐被覆とする。この時、次が成り立つ。

$$\limsup \frac{\ln \operatorname{Tor} H_1(\hat{X}_\Gamma; \mathbb{Z})}{[\Pi : \Gamma]} \leq \frac{\operatorname{vol}(X)}{6\pi}$$

(2) X を有向コンパクト既約3次元多様体で ∂X は高々トーラスからなるとする。基本群 $\Pi = \pi_1(X)$ の有限指数部分群 Γ に対して、 X_Γ を X の Γ -被覆とする。この時、次が成り立つ。

$$\limsup \frac{\ln \operatorname{Tor} H_1(X_\Gamma; \mathbb{Z})}{[\Pi : \Gamma]} \leq \frac{\operatorname{vol}(X)}{6\pi}$$

但し、 $\operatorname{vol}(X)$ は X の双曲ピースの体積の和である。

更に、Le は上の定理で等号が成立することを予想しているのである。Kashaev-村上-村上順 [53, 82] の体積予想にも驚愕したが、昔馴染みの有限被覆のホモロジー群にこのような側面があるのを知って、ただただ恐れ入るばかりである。

9. おわりに

筆者は神戸大学理学部および大学院修士課程で細川藤次先生と鈴木晋一先生のご指導を、そして大阪市立大学大学院博士課程で田尾鶉三先生と河内明夫先生のご指導を受ける幸運に恵まれました。結び目理論が盛んになり出した頃に、四先生のご指導の下、先輩・同輩・後輩と一緒に、のびのびと結び目理論の勉強と研究に勤しめたのは本当に幸せなことでした。因みに、お世話になった四先生全員が寺阪英孝先生の直接のお弟子さんでした。筆者は四重の意味で寺阪先生の孫弟子と言えます。

細川藤次先生は2014年11月27日に、田尾鶉三先生は2016年5月11日に、永眠されました。拙い論説ではありますが、両先生の御冥福を心よりお祈り申し上げ、この論説を両先生に捧げます。

参考文献

- [1] N. A'Campo, *Generic immersions of curves, knots, monodromy and Gordian number*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **88** (1998), 151–169 (1999).
- [2] C. Adams, *Unknotting tunnels in hyperbolic 3-manifolds*, Math. Ann. **302** (1995), 177–195.
- [3] C. Adams, *Hyperbolic 3-manifolds with two generators*, Comm. Anal. Geom. **4** (1996), 181–206.
- [4] I. Agol, *The classification of non-free 2-parabolic generator Kleinian groups*, Slides of talks given at Austin AMS Meeting and Budapest Bolyai conference, July 2002, Budapest, Hungary.
- [5] I. Agol, *Criteria for virtual fibering*, J. Topol. **1** (2008), 269–284.
- [6] I. Agol, *Ideal triangulations of pseudo-Anosov mapping tori*, Topology and geometry in dimension three, 1–17, Contemp. Math., **560**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011.
- [7] I. Agol, *The virtual Haken conjecture. With an appendix by Agol, Daniel Groves, and Jason Manning*, Doc. Math. **18** (2013), 1045–1087.
- [8] I. Agol, *Virtual properties of 3-manifolds*, Talk at ICM 2014, Seoul.
- [9] I. Agol, S. Boyer, X. Zhang, *Virtually fibered Montesinos links*, J. Topol. **1** (2008), 993–1018.
- [10] I. R. Aitchison, E. Lumsden and J. H. Rubinstein, *Cusp structures of alternating links*, Invent. Math. **109** (1992), 473–494.
- [11] H. Akiyoshi, M. Sakuma, M. Wada and Y. Yamashita, *Punctured torus groups and 2-bridge knot groups (I)*, Lecture Notes in Mathematics **1909**, Springer, Berlin, 2007.
- [12] M. Aschenbrenner, S. Friedl and H. Wilton, *3-manifold groups*, EMS Series of Lectures in Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2015. xiv+215 pp.
- [13] D. Auckly, *Two-fold branched covers*, J. Knot Theory Ramifications **23** (2014), 1430001, 29 pp.
- [14] N. Bergeron and D. Wise, *A boundary criterion for cubulation*, Amer. J. Math. **134** (2012), 843–859.
- [15] L. Bessières, G. Besson, M. Boileau, S. Maillot and J. Porti, *Geometrisation of 3-manifolds*, EMS Tracts in Mathematics, **13**, European Mathematical Society, Zurich, 2010. Available at <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~labessier/book.pdf>
- [16] M. Bestvina, *Geometric group theory and 3-manifolds hand in hand: the fulfillment of Thurston's vision*, Bull. Amer. Math. Soc. **51** (2014), 53–70.
- [17] J. S. Birman and C. Series, *Geodesics with bounded intersection number on surfaces are sparsely distributed*, Topology **24** (1985), 217–225.

- [18] M. Boileau, *Three Lectures on profinite completions of 3-manifold groups*, Lecture at the workshop, Branched Coverings, Degenerations, and Related Topics 2016, Hiroshima Univ.. available at <http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/branched/index2016.html>
- [19] M. Boileau and J. Porti, *Geometrization of 3-orbifolds of cyclic type. Appendix A by Michael Heusener and Porti*, *Astérisque* **272** (2001), 208 pp.
- [20] M. Boileau and B. Zimmermann, *The π -orbifold group of a link*, *Math. Z.* **200** (1989), 187–208.
- [21] B. H. Bowditch, *Markoff triples and quasifuchsian groups*, *Proc. London Math. Soc.* **77** (1998), 697–736.
- [22] B. Bowditch and D. B. A. Epstein, *Natural triangulations associated to a surface*, *Topology* **27** (1988), 91–117.
- [23] M. Bridson and A. Haefliger, *Metric spaces of non-positive curvature*, *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften* **319**, Springer-Verlag, Berlin, 1999. xxii+643 pp.
- [24] J. Brock, R. Canary and Y. Minsky, *The classification of Kleinian surface groups, II: The ending lamination conjecture*, *Ann. of Math.* **176** (2012), 1–149.
- [25] J. Brock, Y. Minsky, H. Namazi and J. Souto, *Bounded combinatorics and uniform models for hyperbolic 3-manifolds*, arXiv. Math. 1312.2293, to appear in *Journal of Topology*.
- [26] R. Brooks, *On branched coverings of 3-manifolds which fiber over the circle*, *J. Reine Angew. Math.* **362** (1985), 87–101.
- [27] G. Burde, *Verschlingungsinvarianten von Knoten und Verkettungen mit zwei Brücken*, *Math. Z.* **145** (1975), 235–242.
- [28] G. Burde, *Links covering knots with two bridges*, *Kobe J. Math.* **5** (1988), 209–219.
- [29] R. D. Canary, *Marden’s tameness conjecture: history and applications*, *Geometry, analysis and topology of discrete groups*, 137–162, *Adv. Lect. Math. (ALM)*, 6, Int. Press, Somerville, MA, 2008.
- [30] J. W. Cannon and W. P. Thurston, *Group invariant Peano curves*, *Geom. Topol.* **11** (2007), 1315–1355.
- [31] D. Cooper, D. Futer and J.S. Purcell, *Dehn filling and the geometry of unknotting tunnels*, *Geom. Topol.* **17** (2013), 1815–1876.
- [32] D. Cooper, C. D. Hodgson and S. P. Kerckhoff, *Three-dimensional orbifolds and cone-manifolds. With a postface by Sadayoshi Kojima*, *MSJ Memoirs*, **5**. Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2000. x+170 pp.
- [33] W. Dicks and M. Sakuma, *On hyperbolic once-punctured-torus bundles III: comparing two tessellations of the complex plane*, *Topology Appl.* **157** (2010), 1873–1899.
- [34] N. Dunfield, N. Hoffman and J. Licata, *Asymmetric hyperbolic L-spaces, Heegaard genus, and Dehn filling*, *Math. Res. Letters* (to appear), 19 pages, arXiv:1407.7827.
- [35] D. B. A. Epstein and R.C Penner, *Euclidean decompositions of noncompact hyperbolic manifolds*, *J. Differential Geom.* **27** (1988), 67–80.
- [36] B. Farb and D. Margalit, *A primer on mapping class groups*, *Princeton Mathematical Series*, **49**, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2012. xiv+472.
- [37] S.R. Fenley, *Quasi-Fuchsian Seifert surfaces*, *Math. Z.* **228** (1998), 221–227.
- [38] S. Fukuhara, *Energy of a knot*, *A fête of topology*, 443–451.
- [39] D. Gabai, R. Meyerhoff and P. Milley, *Volumes of hyperbolic 3-manifolds*, *The Poincaré conjecture*, 65–79, *Clay Math. Proc.* **19**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2014.
- [40] W. Goldman, *Topological components of spaces of representations*, *Invent. Math.* **93** (1988), 557–607.
- [41] F. Guéritaud, *Veering triangulation and Cannon-Thurston maps*, arXiv:1506. 03387.

- [42] X. Guo, *Two classes of virtually fibered Montesinos links of type $\tilde{S}L_2$* , J. Knot Theory Ramifications **21** (2012), 1250066, 50 pp.
- [43] E. Haglund and D. T. Wise, *Special cube complexes*, Geom. Funct. Anal. **17** (2008), 1551–1620.
- [44] E. Hironaka, *Fibered faces and the dynamics of mapping classes in special subgroups of the mapping class group*, Lecture at the workshop, Branched Coverings, Degenerations, and Related Topics 2012, Hiroshima Univ.. available at <http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/branched/index2012.html>
- [45] C. D. Hodgson, A. Issa, and H. Segerman, *Non-geometric veering triangulations*, arXiv:1406.6439.
- [46] N. Hoffman, K. Ichihara, M. Kashiwagi, H. Masai, S. Oishi and A. Takayasu, *Verified computations for hyperbolic 3-manifolds*, Exp. Math. **25** (2016), 66–78.
- [47] Y. Iwayoshi, and M. Taniguchi, *An introduction to Teichmüller spaces*, Translated and revised from the Japanese by the authors. Springer-Verlag, Tokyo, 1992. xiv+279.
- [48] K. Ito, *Convergence and divergence of Kleinian punctured torus groups*, Amer. J. Math. **134** (2012), 861–889.
- [49] T. Jorgensen, *Compact 3-manifolds of constant negative curvature fibering over the circle*, Ann. of Math. **106** (1977), 61–72.
- [50] 蒲谷祐一, *Agolによる virtual fibering conjecture の解決について*, 次より入手可能 : <http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kabaya/index.html>
- [51] J. Kahn and V. Markovic, *Immersing almost geodesic surfaces in a closed hyperbolic three manifold*, Ann. of Math. **175** (2012), 1127–1190.
- [52] M. Kapovich, *Hyperbolic manifolds and discrete groups*, Progress in Mathematics, **183**, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2001. xxvi+467
- [53] R. M. Kashaev, *The hyperbolic volume of knots from the quantum dilogarithm*, Lett. Math. Phys., **39** (1997), 269–275.
- [54] A. Kawachi, *A survey of knot theory*, Translated and revised from the 1990 Japanese original by the author. Birkhäuser Verlag, Basel, 1996. xxii+420 pp.
- [55] L. Keen and C. Series, *Pleating invariants for punctured torus groups*, Topology **43** (2004), 447–491.
- [56] I. Kim, Inkang, C. Lecuire and K. Ohshika, *Primitive stable closed hyperbolic 3-manifolds*, Topology Appl. **172** (2014), 68–71.
- [57] E. Kin and M. Takasawa, *The boundary of a fibered face of the magic 3-manifold and the asymptotic behavior of minimal pseudo-Anosov dilatations*, to appear in Hiroshima Math. J.
- [58] 児玉宏児, *Knot Program*, available at <http://www.math.kobe-u.ac.jp/~kodama/knot.html>
- [59] K. Kodama and M. Sakuma, *Symmetry groups of prime knots up to 10 crossings*, Knots 90 (Osaka, 1990), 323–340, de Gruyter, Berlin, 1992.
- [60] 小島定吉, *Thurston の ‘怪物定理’ について*, 数学 **34** (1982) 301–316.
- [61] T. Le, *Growth of homology torsion in finite coverings and hyperbolic volume*, Preprint arXiv:1412.7758.
- [62] D. Lee and M. Sakuma, *A variation of McShane’s identity for 2-bridge links*, Geom. Topol. **17** (2013), 2061–2101.
- [63] D. Lee and M. Sakuma, *Epimorphisms from 2-bridge link groups onto Heckoid groups (I)*, Hiroshima Math. J. **43** (2013), 239–264.
- [64] A. Marden, *Deformations of Kleinian groups*, Handbook of Teichmüller theory. Vol. I, 41–446, IRMA Lect. Math. Theor. Phys., 11, Eur. Math. Soc., Zürich, 2007.

- [65] A. Marden, *Outer circles. An introduction to hyperbolic 3-manifolds*, Cambridge University Press, Cambridge, 2007. xviii+427 pp.
- [66] G. J. Martin, *The geometry and arithmetic of Kleinian groups*, Handbook of group actions. Vol. I, 411–494, Adv. Lect. Math. (ALM), **31**, Int. Press, Somerville, MA, 2015.
- [67] K. Matsuzaki and M. Taniguchi, *Hyperbolic manifolds and Kleinian groups*, Oxford Mathematical Monographs. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1998. x+253.
- [68] C. T. McMullen, *Polynomial invariants for fibered 3-manifolds and Teichmüller geodesics for foliations*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **33** (2000), 519–560.
- [69] C. T. McMullen, *The evolution of geometric structures on 3-manifolds*, The Poincaré conjecture, 31–46, Clay Math. Proc., **19**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2014.
- [70] W. Menasco and M. Thistlethwaite, *The classification of alternating links*, Ann. of Math. **138** (1993), 113–171.
- [71] J. Milnor, *Hyperbolic geometry: the first 150 years*, Bull. Amer. Math. Soc. **6** (1982), 9–24.
- [72] Y. N. Minsky, *The classification of punctured-torus groups*, Ann. of Math. **149** (1999), 559–626.
- [73] Y. N. Minsky, *End invariants and the classification of hyperbolic 3-manifolds*, Current developments in mathematics, 2002, 181–217, Int. Press, Somerville, MA, 2003.
- [74] Y. Minsky, *The classification of Kleinian surface groups. I. Models and bounds*. Ann. of Math. **171** (2010), 1–107.
- [75] M. Mirzakhani, *Growth of the number of simple closed geodesics on hyperbolic surfaces*, Ann. of Math. **168** (2008), 97–125.
- [76] M. Mj, *Cannon-Thurston maps for surface groups*, Ann. of Math. **179** (2014), 1–80.
- [77] J. M. Montesinos, *On 3-manifolds having surface-bundles as branched coverings*, Proc. A.M.S. **101** (1987), 555–558.
- [78] J. Morgan and G. Tian, *The geometrization conjecture*, Clay Mathematics Monographs, **5**. American Mathematical Society, Providence, RI; Clay Mathematics Institute, Cambridge, MA, 2014. x+291 pp.
- [79] 森元勘治, 3次元多様体入門, 1996, 培風館. 次より入手可能 : <http://tunnel-knot.sakura.ne.jp/3-manifolds.html>
- [80] D. Mumford, C. Series, and D. Wright, *Indra’s pearls. The vision of Felix Klein*, Cambridge University Press, New York, 2002. xxiii+374 pp.
- [81] D. Mumford, C. Series, and D. Wright, インドラの真珠 クラインの夢見た世界, 小森洋平訳, 日本評論社 2012. xx+396 pp.
- [82] H. Murakami and J. Murakami, *The colored Jones polynomials and the simplicial volume of a knot*, Acta Math. **186** (2001), 85–104.
- [83] H. Namazi and J. Souto, *Heegaard splittings and pseudo-Anosov maps*, Geom. Funct. Anal. **19** (2009), 1195–1228.
- [84] J. O’Hara, *Energy of a knot*, Topology **30** (1991), 241–247
- [85] K. Ohshika and M. Sakuma, *Subgroups of mapping class groups related to Heegaard splittings and bridge decompositions*, Geom. Dedicata **180** (2016), 117–134.
- [86] J.P. Otal, *The hyperbolization theorem for fibered 3-manifolds*, Translated from the 1996 French original by Leslie D. Kay. SMF/AMS Texts and Monographs, **7**, American Mathematical Society, Providence, RI; Société Mathématique de France, Paris, 2001. xiv+126 pp.
- [87] J. P. Otal, *William P. Thurston: “Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry”* Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. **116** (2014), 3–20.

- [88] K. A. Perko, *On the classification of knots*, Proc. Amer. Math. Soc. **45** (1974), 262–266.
- [89] J. Purcell, *Research Statement*, available at <http://users.monash.edu/~jpurcell/jpurcell-research2014.pdf>
- [90] R. Riley, *A quadratic parabolic group*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **77** (1975), 281–288.
- [91] R. Riley, *Algebra for Heckoid groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **334** (1992), 389–409.
- [92] R. Riley, *A personal account of the discovery of hyperbolic structures on some knot complements. With a postscript by M. B. Brin, G. A. Jones and D. Singerman*, Expo. Math. **31** (2013), 104–115.
- [93] M. Sageev, *Ends of group pairs and non-positively curved cube complexes*, Proc. London Math. Soc. **71** (1995), 585–617.
- [94] N. Sakata, *Veering structures of the canonical decompositions of hyperbolic fibered two-bridge link complements*, Journal of Knot Theory and Its Ramifications, **25** (2016), 1650015, 34 pages.
- [95] M. Sakuma, *The geometries of spherical Montesinos links*, Kobe J. Math. **7** (1990), 167–190.
- [96] M. Sakuma, *Surface bundles over S^1 which are 2-fold branched cyclic coverings of S^3* , Math. Sem. Notes Kobe Univ. **9** (1981), 159–180.
- [97] P. Scott, *The geometries of 3-manifolds*, Bull. London Math. Soc. **15** (1983), 401–487.
- [98] 相馬輝彦, 位相的クライン群論の最近の話題, 数学 **62**(2010), 18–39.
- [99] S. P. Tan, Y. L. Wong, and Y. Zhang, *End invariants for $SL(2, \mathbb{C})$ characters of the one-holed torus*, Amer. J. Math. **130** (2008), 385–412.
- [100] 寺阪英孝, 非ユークリッド幾何の世界 幾何学の原点をさぐる, 講談社〈ブルーバックス ; B312〉, 1977年5月.
- [101] W. P. Thurston, *Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry*, Bull. Amer. Math. Soc. **6** (1982), 357–381.
- [102] W. P. Thurston, *A norm for the homology of 3-manifolds*, Mem. Amer. Math. Soc. **59** (1986), no. 339, i–vi and 99–130.
- [103] W. P. Thurston, *On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **19** (1988), 417–431.
- [104] M. Wada, *OPTi*, Computer Software available at <http://delta-mat.ist.osaka-u.ac.jp/OPTI/>
- [105] F. Waldhausen, *On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large*, Ann. of Math. **87** (1968) 56–88.
- [106] F. Waldhausen, *Some problems on 3-manifolds*, Algebraic and geometric topology (Proc. Sympos. Pure Math., Stanford Univ., Stanford, Calif., 1976), Part 2, pp. 313–322, Proc. Sympos. Pure Math., XXXII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1978.
- [107] G.S. Walsh, *Great circle links and virtually fibered knots*, Topology **44** (2005), 947–958.
- [108] D. Wise, *The Structure of Groups with a Quasiconvex Hierarchy*, 187pp. 2011.
- [109] Y. Yokota, *On the potential functions for the hyperbolic structures of a knot complement*, Invariants of knots and 3-manifolds (Kyoto, 2001), 303–311 (electronic), Geom. Topol. Monogr., **4**, Geom. Topol. Publ., Coventry, 2002.
- [110] 吉田正章, 又曲型鏡映群と不変式の一例, 双曲空間とその関連分野 II, 数理解析研究所講究録 (2000), **1163**, 103–108.