SYMPLECTIC FLOER 理論の話題から

小野　薫
京都大学数理解析研究所

A. Floer の Morse theory for Lagrangian intersections [F] が出版されてから 30 年くらい経った。Floer 理論の発展とともに、様々な応用がなされて、今では symplectic 構造の研究において特に重要な位置を占めている。本稿では、太田啓史氏の予稿と合わせて、我々の深谷賢治氏、Yong-Geun Oh 氏との共同研究から幾つかの結果について紹介したい。

1. 序　Lagrange 部分多様体の Floer 理論のアイデア

多様体 X の symplectic 構造とは、2 次微分形式 ω で、 (1) $d\omega = 0$, (2) 非退化 即ち、各点の余接空間に ω が定める歪対象双 1 次形式が非退化 の 2 条件を満たすものを与えることをいう。Darboux の定理により、ω は偶数次元ベクトル空間の非退化双 1 次形式を平行移動不変な 2 次微分形式とみなしたものと局所的には微分同相になるので、symplectic 構造には Riemann 幾何における曲率のような局所的な不変量は存在しない。

symplectic 形式を保つ微分同相写像の中で、Hamilton 微分同相写像と呼ばれるものが特に重要なクラスをなす。X 上に滑らかな関数 h が与えられると、 ベクトル場 X_h で $i(X_h)\omega = dh$ を満たすものが一意的に定まる。これを h の定める Hamilton ベクトル場という。滑らかな関数の族 $H = \{h_t\}_{t\in[0,1]}$ に対して、それを積分して[1]得られる isotopy を $\{\phi_H^t\}_{t\in[0,1]}$ (但し $\phi_H^0 = id_X$ とする) と書き、ϕ_H^1 と表される Hamilton 微分同相写像という。　大雑把に言って、m 次元多様体の微分同相写像は m 変数関数を m 個用いて表されるが、Hamilton 微分同相写像は $m = 2n$ 次元の関数 1 つ (正準変換の母関数) で表される感じである。Hamilton 微分同相写像はかなり限られたクラスをなしている。

symplectic 多様体の部分多様体は ω との関係で、isotropic (ω の制限が 0 になる)、coisotropic (各点での接空間の ω に関する annihilator が接空間に含まれる)、symplectic (ω の制限が symplectic 形式を与える) などの条件がある。中でも、isotropic かつ coisotropic　(次元は入れ物の symplecctic 多様体の半分になる) であるものは Lagrange 部分多様体と呼ばれ、重要なクラスをなす。

多様体 M の余接束 T^*M には自然な 1 次微分形式 λ_{can} があり、余接束の切断 s に対し、$s^*\lambda_{can}$ は 切断 s を M 上の 1 次微分形式と見たものと一致する。そして、$\omega_{can} = d\lambda_{can}$ は T^*M の symplectic 形式となる。閉 1 次微分形式を余接束の切断と

[1] $H \in C^\infty([0,1]\times X)$ がコンパクトな台をもつことを課せば積分できる。

みなしたものを s とすると、$s : M \to T^*M$ は Lagrange 埋め込みとなる。特に完全1次微分形式 df に対しては、f の臨界点と 切断 df と零切断の交点が1対1に対応するので、これらの交叉の個数は関数の臨界点の個数から評価される。特に、交叉が横断的であることと f の臨界点が非退化であることは同値で、この場合 f について Morse 理論を用いて交叉点の個数の評価が得られる。切断 df は零切断の Hamilton 微分同相写像による像として表せるが、逆は正しくない。しかし、零切断の Hamilton 微分同相写像による像は、「無限遠で非退化な2次形式となる母関数」を用いて記述することができ、閉多様体上の関数の臨界点理論の安定化版を用いて、零切断との交叉点の個数の評価ができる。 余接束などの場合を超えて、一般の閉 symplectic 多様体の中の Lagrange 部分多様体の交叉を考察する際には、上記のような有限次元の臨界点理論を適用できない場合が出てくる。Conley, Zehnder といった人たちは、Lagrange 部分多様体に端点を持つ道の空間の上で定義される作用汎関数に Morse 理論のアイデアが適用できればよいと考えていたが、 L^2-計量に関する勾配ベクトル場を素朴に計算すると、勾配流が定義できない（与えられた点を通る積分曲線が一般には存在しない。積分曲線を複素平面の帯状領域からの正則写像と解釈すると、一般に初期値問題が解けない）ことも分かっていた。Floer は、考えたい複素平面の帯状領域からの正則写像の空間を非線形楕円型方程式の解空間として必要となる諸性質を調べることで、Morse 複体の類似物を（技術的な困難がないように然るべき条件をつけてではあるが）構成した。そのあらましは次のようである。

$L \subset X$ を 閉 Lagrange 部分多様体、$\phi = \phi_H^1$ を Hamilton 微分同相写像とする。$\mathcal{P}(L, L)$ を始点と終点が L 上にある道 $\gamma : [0, 1] \to X$ のなす空間とする。(以下は発見的考察でなので、γ の regularity などについては書かない) $\mathcal{P}(L, L)$ 上に "1次微分形式" $\alpha_{L,H}$ を

$$\alpha_{L,H} : \xi \in T_\gamma \mathcal{P}(L, L) \mapsto \int_0^1 \omega(\xi(t), \dot{\gamma}(t) - X_{h_t}(\gamma(t)))dt$$

と定める。ここで ξ は γ^*TX の切断で、$t = 0, 1$ では L の接ベクトルになるものと解釈し、$\dot{\gamma}(t) = \frac{d}{dt}\gamma(t)$ とおいた。$\alpha_{L,H}$ は "閉微分形式" であることは、次のことからわかる。$\gamma_0 \in \mathcal{P}(L, L)$ と、それに近い $\gamma \in \mathcal{P}(L, L)$ を取ると、γ_0 と γ をつなぐ $\mathcal{P}(L, L)$ の道がある。それを $w : [0, 1] \times [0, 1] \to X$ で、$w(\{0, 1\} \times [0, 1]) \subset L$ を満たす写像と解釈して、γ_0 の近傍で定義される関数を $\gamma \mapsto \int_{[0,1]\times[0,1]} w^*\omega$ と定義する。これを用いて、$\alpha_{L,H}$ の γ_0 の近傍での原始関数が得られる。$\alpha_{L,H}$ の零点は、この関数の臨界点と対応するが、臨界点での Hessian が非退化であることは、L と $\phi(L)$ の交叉の横断性と理解できる。そこで、この関数について Morse 理論の類似を考えたい。

X 上の概複素構造 J が ω と両立するとは、$g_J(v_1, v_2) = \omega(v_1, Jv_2)$ が X の Riemann 計量となることをいう。g_J を用いて $\mathcal{P}(L, L)$ の各接空間に L^2-内積を入れ、$\alpha_{L,H}$ に対応するベクトル場を計算すると、$\gamma \mapsto (t \mapsto -J(\dot{\gamma}(t) - X_{h_t}(\gamma(t)))$ となる。このベクトル場の "積分曲線" $\ell : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(L, L)$ を $u(\tau, t) = (\ell(\tau))(t)$ (ここで、$\ell(\tau)$ は X の道で、そのパラメータは $t \in [0, 1]$ である) とすると、u は Hamilton ベクトル場を用

いて摂動された Cauchy-Riemann 方程式

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}u(\tau,t)+J(u(\tau,t))(\frac{\partial}{\partial t}u(\tau,t)-X_{h_t}(u(\tau,t)))=0 \tag{1}$$

の解と解釈できる。ここで発見的考察は終わりで、以後は、X は閉 symplectic 多様体とし、(1) の解たち u を用いて、鎖複体 $(CF^\bullet(L,H).\delta_{L,H,J})$ を構成する。

$\gamma \in \mathcal{P}(L,L)$ で

$$\dot{\gamma}^{\pm}(t)=X_{h_t}(\gamma^{\pm}(t)) \tag{2}$$

を満たすもの全体を $\mathcal{Z}$ とする。$CF^\bullet(L)$ を、$\mathcal{Z}$ で $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 上生成される自由加群とする[2]。次数付けは Maslov-Viterbo 指数を使うが、それについては省略する。

u のエネルギー $E(u)$ を

$$E(u)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^1 \| \frac{\partial u}{\partial \tau} \|^2+\| \frac{\partial u}{\partial t}-X_{h_t}(u) \|^2 \, d\tau dt$$

と定める。$E(u)$ が有限であることと、$\tau \to \pm\infty$ で $u(\tau,t)$ が $\gamma^{\pm} \in \mathcal{Z}$ に収束することは同値であることが示される。上記のような $\gamma^{\pm}$ に対して、

$$\widetilde{\mathcal{M}}(\gamma^-,\gamma^+)=\{u|(1), \lim_{\tau\to\pm\infty} u=\gamma^{\pm}\}$$

とおく。(1) は τ-方向の平行移動不変性を持つので、それによる $\mathbb{R}$-作用による商空間を $\mathcal{M}(\gamma^-,\gamma^+)$ とする。X 内に正則球面や L に境界をもつ正則円板がないと仮定すると、$\mathcal{M}(\gamma^-,\gamma^+)$ の 0-次元成分は有限個の点からなること、1-次元成分の ends は然るべき 0-次元成分二つの直積になることから、

$$\delta_{L,H,J}(\gamma^-)=\sum \#_2\mathcal{M}^{0-dim}(\gamma^-,\gamma^+)\gamma^+$$

と定義することができ、$\delta_{L,H,J}: CF^\bullet(L,H)\to CF^\bullet(L,H)$ は $\delta_{L,H,J}\circ\delta_{L,H,J}=0$ を満たすことがわかる。こうして得られる複体を Lagrange 部分多様体とその Hamilton 変形の組の Floer 複体、cohomology を Floer cohomology という。Floer は (ここで書いた書き方とは異なるが、同値なものを) $\pi_2(X,L)=0$ の条件のもとで実行してみせた。同じ条件下で Floer cohomology を計算し、L の $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-係数 cohomology と同型になることを示した [F]。この系として、交叉点の個数が L の $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-係数 Betti 数の和以上であることが従う。

この結果から、$\pi_2(X)=0$ である 閉 symplectic 多様体の Hamilton 微分同相写像の不動点が全て非退化であれば、その個数の評価が得られる (Arnold 予想の Betti 数版の部分的[3]解決)。Floer は Hamilton 微分同相写像の Floer cohomology を単調な閉 symplectic 多様体に対して構成、計算し、Arnold 予想の Betti 数版がこの場合

[2]一般には、Novikov 環上で考える必要があるが、アイデアを説明するこの節ではそれはしない。

[3]部分的とは言っても、Floer の成果は正に breakthrough である。

にも正しいことを証明した [F2]。ここで (X, ω) が単調であるとは、$[\omega]$, $c_1(TX, J)$ を $\pi_2(X)$ 上で測ったとき、ある 正定数 λ が存在して、

$$c_1(TX, J)|_{\pi_2(X)} = \lambda[\omega]|_{\pi_2(X)}$$

が成り立つことをいう。

上では、$\mathcal{P}(L, L)$ を使って、Floer 複体を説明したが、$L_0 = L$ から $L_1 = \phi(L)$ に至る道の空間 $\mathcal{P}(L_0, L_1)$ を用いて定式化することもできる (Floer の論文ではこちらで書かれている)。ϕ_H^t を用いて、$(\phi_H(\gamma))(t) = \phi_H^t(\gamma(t))$ とすると、これは L_0 から L_1 に至る道になる。こうして $\gamma \in \mathcal{P}(L, L) \mapsto \phi_H(\gamma) \in \mathcal{P}(L_0, L_1)$ により、$\mathcal{P}(L, L)$ と $\mathcal{P}(L_0, L_1)$ を同一視すると、方程式 (1) は Hamilton ベクトル場による摂動項のない (J は ϕ_H^t による変換を受けた）Cauchy-Riemann 方程式に変わる。

Yong-Geun Oh [Oh] は、Lagrange 部分多様体に対しても単調性と最小 Maslov 数が 3 以上の条件[4]のもとで、Floer の構成を拡張し、コンパクトエルミート対称空間の中の実形の場合に計算をした。ここでも、X と L_0, L_1 に課した条件から正則球面や正則円板が、Floer 複体を構成する際に必要となる 0-次元と 1-次元のモデュライ空間に悪影響を与えないことが議論の鍵である。

一般的な場合を考えると状況は変わる。Hamilton 微分同相写像（symplectic 微分同相写像に対してでもよい) に対する Floer cohomology は一般の閉 symplectic 多様体上で構成でき、X の (Novikov 環係数の) 常 cohomology と同型になることが証明できる (深谷-小野 [FO]、Liu-Tian [LT])。しかし、Lagrange 部分多様体の交叉の Floer 複体については、２次元トーラス上で、可縮な円と meridian の対のような簡単な例でも上の議論はうまく進まないことがわかる。このことは、正則球面の bubbling-off は余実次元 2 の現象であるのに対し、正則円板のそれは余実次元 1 の現象なので、Floer 複体を作る際のモデュライ空間の end に影響を与えうることによる。問題となるのは Lagrange 部分多様体に境界を持つ正則円板の存在であるから、それらを組織的に考察し、Floer 複体を構成するための障害をはっきりさせ、可能であれば、境界作用素 δ を修正して Floer 複体を得られるのはどういう時であるかを明らかにしたい。そのために我々は、Lagrange 部分多様体に対して、filter 付き A_∞-代数を構成し、その言葉を用いてこれらの問いに答を与えた。それについて [FOOO1] の議論を次節で説明したい。

2. Lagrange 部分多様体に付随した filter 付き A_∞-代数

以後、Lagrange 部分多様体は spin 構造 (それより弱く我々が導入した相対 spin 構造で十分) を与えられているとする[5]。この条件は、これから説明する構成に現れるモデュライ空間に整合的な向きを入れるために必要となる。

[4]もう少し条件を付けてあるが、ここでは省く

[5]X に然るべき条件を付けて、正則球面の影響が制御できる状況においては L の spin 構造なしで $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-上で Floer 理論を展開できる。同じ条件下で、L に spin 構造があれば、$\mathbb{Z}$ 上での構成もできる [FOOO8]。

まず、複素係数の普遍 Novikov 環 (以後単に Novikov 環と書く。また、今回は次数に関する生成元を落としたものを考える。) を定義する。T を形式的変数とし、

$$\Lambda_0 = \{\sum_i a_i T^{\lambda_i} | a_i \in \mathbb{C}, \lambda_i \geq 0, \lim_{i\to\infty} \lambda_i = +\infty\}$$

とおく。指数が実数であるべき級数で、べきが $+\infty$ に発散するような無限和を許している。勿論、有限和は全て許される。Λ_0 は整域で、その商体を Λ と書く。これは指数が実数である Laurent 型のべき級数からなる体である。また、Λ_+ で、指数が正であるべき級数のなすもの (Λ_0 の唯一の極大イデアル) を表す。$\Lambda \setminus \{0\}$ に v_T を、

$$v_T(\sum_i a_i T^{\lambda_i}) = \min\{\lambda_i | a_i \neq 0\}$$

で定めると、加法的付値になる。 Λ_0, Λ は v_T の定める位相で完備であり、Λ は ($\mathbb{C}$ が標数 0 の代数的閉体であることから) 代数的閉体になる。(この事実は、第３節の potenrial 関数の臨界点を探すときに役立つ。)

$\Omega^\bullet(L), \Omega^\bullet(L;\Lambda_0)$ で、L の複素係数あるいは Novikov 環係数の de Rham 複体を表す。de Rham 複体の外微分、wedge 積に加えて、正則円板の効果を加えて filter 付き A_∞-代数が構成される。

空でない連結な境界を持つ種数 1 の Riemann 面 Σ (例えば 円板 D^2) の境界に $k+1$ 点 $z_0, \dots, z_k$、内部に ℓ 点 $w_1, \dots, w_\ell$ を付けたものから (X, L) への境界付き安定写像、即ち正則写像で、$\beta \in H_2(X, L; \mathbb{Z})$ を表し、自己同型群が有限であるもの[6]のモデュライ $\mathcal{M}_{\ell,k+1}(\beta; L)$ を考える。$k+1$ 個の境界上の点、ℓ 個の内点で値をとることにより evalution maps

$$ev_i : \mathcal{M}_{\ell,k+1}(\beta; L) \to L \;\; i = 0, 1, \dots, k; \; ev_j^+ : \mathcal{M}_{\ell,k+1}(\beta; L) \to X \; j = 1, \dots, \ell$$

が定まる。

まず $\ell = 0$ の場合を考える。$\beta \neq 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$ に対して、

$$\mathfrak{m}_{k,\beta} : (\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_k) \in (\Omega^\bullet(L))^{\otimes k} \mapsto (ev_0)_!(ev_1^*\xi_1 \wedge \cdots \wedge ev_k^*\xi_k) \in \Omega^\bullet(L)$$

と定義する。ここで、$(ev_0)_!$ はファイバーに沿う積分で、これを定義するには倉西構造の摂動の連続族の手法を用いる。$\mathfrak{m}_{k,\beta}$ は $\Omega^\bullet(L)$ に入れる次数を微分形式としての次数マイナス 1 とすると、これらは次数を 1 増やす多重線形写像になる。$\beta = 0$ に対しては、$k = 1, 2$ の時以外は 0 で[7] $\mathfrak{m}_{1,\beta=0}, \mathfrak{m}_{2,\beta=0}$ は符号を除けば外微分と wedge 積として定義する。

k ごとに足し上げて $\mathfrak{m}_k = \sum_\beta T^{\int_\beta \omega} \mathfrak{m}_{k,\beta}$ とおき、$\mathfrak{m}_k : \Omega^\bullet(L;\Lambda_0)^{\times k} \to \Omega^\bullet(L;\Lambda_0)$ が定まる。この和が T-進の意味で収束することはエネルギー有界な安定写像に関する Gromov コンパクト性から従う。境界付き安定写像のモデュライ空間の境界の記述と

[6]境界上に点のついていない場合 $k+1=0$ の場合だけは例外的な扱いが必要である。

[7]L の特異鎖複体に filter 付き A_∞-代数の構造を入れる場合には、$\mathfrak{m}_{k,\beta=0}$ は $k \geq 3$ であっても消えない。

ファイバー積分についての基本的性質から、$\{\mathfrak{m}_k\}_{k=0,1,2,\ldots}$ は次の関係式を満たすことが示される。(符号は少し煩雑なのでここでは $\pm$ と書くが、先ほどの次数のずらし $\deg' = \deg -1$ を考慮すると Koszul 符号で関係式は成立する。)

$$(3)\quad \sum_{k=k_1+k_2-1}\sum_{i=0}^{k_1-1} \pm\mathfrak{m}_{k_1}(\xi_1\otimes\ldots,\otimes\xi_i\otimes\mathfrak{m}_{k_2}(\xi_{i+1}\otimes\cdots\otimes x_{i+k_2})\otimes\xi_{i+k_2+1}\otimes\cdots\otimes\xi_k)=0$$

これを filter 付き A_∞-代数の関係式と呼び、$(\Omega^\bullet(L;\Lambda_0),\{\mathfrak{m}_k\})$ を L に付随した filter 付き A_∞-代数と呼ぶ。特に、$k=1$ の時をみると、

$$(4)\qquad \mathfrak{m}_1\circ\mathfrak{m}_1\xi+\mathfrak{m}_2(\mathfrak{m}_0(1)\otimes\xi)+(-1)^{\deg'\xi}(\xi\otimes\mathfrak{m}_0(1))=0$$

となる。$\mathfrak{m}_1$ は L とそれ自身の交叉についての Bott-Morse 型の Floer 複体の余境界作用素になってほしいものであるが、上の関係式から $\mathfrak{m}_0(1)$ の関係する項があるため、一般に $\mathfrak{m}_1\circ\mathfrak{m}_1=0$ とはならない。つまり、この場合 $\mathfrak{m}_0(1)$ が余境界作用素を得るための障害である。そこで、これを消すような変形を探す。まずは、filter 付き A_∞-代数の座標変換をしてこれを消すことを考える。$b\in\Omega^{odd}(L;\Lambda_+)$ を用いて、

$$\mathfrak{m}_{b,k}(\xi_1\otimes\cdots\otimes\xi_k)=\sum_{r_0,\ldots,r_k}\mathfrak{m}_{k+r_0+\cdots+r_k}(b^{\otimes r_0}\otimes\xi_1\otimes b^{\otimes r_1}\otimes\cdots\otimes\xi_k\otimes b^{\otimes r_k})$$

とする。即ち、$\xi_1,\ldots,\xi_k$ の前、間、後に任意個数の b を入れ、足し上げたものである。b の取り方から、この和は T-進位相で収束する。$\Lambda_0=\mathbb{C}\oplus\Lambda_+$ の Λ_+ 係数の b についてはこのような変形ができる。$b_0\in H^1(L;\mathbb{C}/2\pi\sqrt{-1}\mathbb{Z})$ による変形は、L 上の local system を使って、これまでの構成をひねり filter 付き A_∞-構造 $\mathfrak{m}_k^{b_0}$ を作ることができる (Cheol-Hyun Cho)。(b_0,b) に対する

$$(5)\qquad \mathfrak{m}_{b,0}^{b_0}(1)=\sum_k\mathfrak{m}_k^{b_0}(b^{\otimes k})=0$$

を Maurer-Cartan 方程式という。Maurer-Cartan 方程式が解 (b_0,b) を持てば、$\mathfrak{m}_{b,1}^{b_0}\circ\mathfrak{m}_{b,1}^{b_0}=0$ となり、$(\Omega^\bullet(L;\Lambda_0),\mathfrak{m}_{b,1}^{b_0})$ は複体となることがわかる。

ところで、filter 付き A_∞-代数に対して、$\mathfrak{m}_1$ の古典的部分、今の場合は外微分、の cohomology 上に filter 付き A_∞-代数の構造を移すことができる。(我々の言葉では canonical model と呼ぶが、minimal model と呼ぶ人たちもいる。) 今の場合、$H^\bullet(L;\Lambda_0)$ 上に filter 付き A_∞-構造 $\{\mathfrak{m}_k^{can}\}$ が入る。cohomology 環の単位元 1_L は filter 付き A_∞-代数の単位元になる。即ち、$k\neq 2$ ならば、$\mathfrak{m}_2^{can}$ に一つでも 1_L が入れば 0 になり、

$$\mathfrak{m}_2(1_L;\xi)=\xi=(-1)^{\deg\xi}\mathfrak{m}_2(\xi,1_L)$$

を満たす。これを (4) と見比べれば、$\mathfrak{m}_0(1)$ が 1_L に Λ_+ の元が掛かった形になっていれば、$\mathfrak{m}_1\circ\mathfrak{m}_1=0$ となり、複体が得られることがわかる。filter 付き A_∞-代数の単位元の性質から、1_L は $\{\mathfrak{m}_{b,k}^{b_0}\}$ に関する単位元にもなることが分かるので、(b_0,b)

が次の意味で Maurer-Cartan 方程式の弱い意味での解になっていれば、$\mathfrak{m}^{b_0}_{b,1}$ は余境界準同型を与えることがわかる。

$$\mathfrak{m}^{b_0}_{b,0}(1) = \sum_k \mathfrak{m}^{b_0}_k(b^{\otimes k}) \in \Lambda_+ \cdot 1_L \tag{6}$$

ここで詳しく述べることはできないが、filter 付き A_∞-代数のホモトピーの枠組みを用いて、Maurer-Cartan 方程式の解の集合、弱い意味での Maurer-Cartan 方程式の解の集合に gauge 同値関係を入れることができ、gauge 同値類全体を $\mathcal{MC}(L)$, $\mathcal{MC}_{\mathrm{weak}}(L)$ ができる。弱い意味での Maurer-Cartan 方程式の解の定義から、L の Floer 理論的 potential 関数

$$\mathfrak{PO}^L : \mathcal{MC}_{weak}(L) \to \Lambda_+$$

を、(b_0, b) に対して、$\mathfrak{m}^{b_0}_{b,1}(1) = \mathfrak{PO}^L(b_0, b)1_L$ を満たすものとして定義することができる (値は gauge 同値類にしかよらない)。

内点のついた境界付き安定写像のモデュライを用いた bulk 変形 について手短に説明する。

$\mathfrak{q}_{k,\ell;\beta} : \Omega^\bullet(X)^{\otimes\ell}\Omega^\bullet(L)^{\otimes k} \to \Omega^\bullet(L)$ を

$$\mathfrak{q}_{k,\ell;\beta}(\otimes_j = 1^\ell \eta_j \otimes \otimes_{i=1}^k \xi_i) = (ev_0)_!(ev_1^{+*}\eta_1 \wedge \cdots \wedge ev_\ell^{+*}\eta_\ell \wedge ev_1^*\xi_1 \wedge \cdots \wedge ev_k^*\xi_k)$$

とし、$\mathfrak{q}_{k,\ell} = \sum_\beta T^{\int_\beta \omega}\mathfrak{q}_{k,\ell;\beta}$ と定義する。$\mathfrak{b} \in \Omega^\bullet(X;\Lambda_+)$ に対して、

$$\mathfrak{m}^{\mathfrak{b}}_k(\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_k) = \sum_\ell \mathfrak{q}_{k,\ell}(\mathfrak{b}^{\otimes\ell} \otimes \xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_k)$$

とすると、$\mathfrak{m}^{\mathfrak{b}}_k$ は $\Omega^\bullet(L;\Lambda_0)$ 上に filter 付き A_∞-代数の構造を定めることが分かる。これを $\mathfrak{b}$ による bulk 変形という。Maurer-Cartan 方程式、その（弱い意味での）解、potential 関数などは、bulk 変形を行った後の filter 付き A_∞-代数に対しても考えられ、$\mathcal{MC}_{\mathfrak{b},weak}(L)$, $\mathfrak{PO}^L_{\mathfrak{b}}$ などが同様に定義される。また、全ての構造を Λ_0-係数の常 cohomology 上に移すことができる。

この時、次が成り立つ。

定理 1. L_0, L_1 を 閉 symplectic 多様体 (X,ω) の clean intersection を持つ Lagrange 部分多様体の相対的 spin 対[8]とする。$\mathfrak{b} \in H^*(X;\Lambda_+)$ と、$\mathfrak{b}$ で bulk 変形された L_i の Maurer-Cartan 方程式が弱い意味での解 $b_i \in H^{odd}(L;\Lambda_0)$, $i = 0, 1$ で、$\mathfrak{PO}^{L_0}_{\mathfrak{b}}(b_0) = \mathfrak{PO}^{L_1}_{\mathfrak{b}}(b_1)$ を満たすものが存在する時、$H^\bullet(L_0 \cap L_1;\Lambda_0)$ 上に Floer の δ を $\mathfrak{b}$, b_0, b_1 を用いて変形した $\delta^{b_0,b_1}_{\mathfrak{b}}$ が定義でき、$(H^\bullet(L_0 \cap L_1;\Lambda_0), \delta^{b_0,b_1}_{\mathfrak{b}})$ は複体となる。

[8] L_0, L_1 がそれぞれ spin 構造を与えられている状況ならばこの条件を満たす。symplectic 微分同相写像に対する Floer 複体の構成を含む形に定式化しようとすると、それでは足りないので、このように条件を書いた。

この cohomology を $HF^{\bullet}_{\mathfrak{b}}((L_1,b_1),(L_0,b_0);\Lambda_0))$ と書く。Hamilton 微分同相写像 $\phi=\phi^1_H$ から、L_1 と $\phi(L_1)$ の filter 付き A_∞-代数の同型を構成することができる。従って、L_1 の Maurer-Cartan 方程式の (弱い意味での) 解 b_1 から、$\phi(L_1)$ のそれ $\phi_*(b_1)$ が得られる。しかし、$HF^{\bullet}_{\mathfrak{b}}((L_1,b_1),(L_0,b_0);\Lambda_0))$ から $HF^{\bullet}_{\mathfrak{b}}((\phi(L_1),\phi_*b_1),(L_0,b_0);\Lambda_0))$ への同型は一般に得られない。これは、Λ_0 上で考えているからで、Λ_0 加群としての torsion に違いが現れる。このことは、Lagrange 部分多様体の displacement energy と呼ばれる量の評価に応用することができる ([FOOO6])。Λ_0 から、Λ に係数拡大すれば、$HF^{\bullet}_{\mathfrak{b}}((L_1,b_1),(L_0,b_0);\Lambda)$ から $HF^{\bullet}_{\mathfrak{b}}((L_1,b_1),(L_0,b_0);\Lambda)$ への同型が得られる。従って、Λ-係数の Floer cohomology が消えていなければ、その交叉をなくすことはできない。

bulk 変形を許して Maurer-Cartan 方程式に解があるかどうかの十分条件を一つ挙げておく[9]

定理 2. L を (X,ω) の Lagrange 部分多様体で spin 構造を持つものとする。包含写像の誘導する常 cohomology の写像 $H^\bullet(X;\mathbb{C})\to H^\bullet(L;\mathbb{C})$ が単射であれば、ある $\mathfrak{b}\in H^\bullet(X;\Lambda_+)$ が存在して、$\mathfrak{b}$ で bulk 変形された filter 付き A_∞-代数の Maurer-Cartan 方程式は解をもつ。

この定理の証明には、$\mathfrak{p}_{k,\ell}: H^\bullet(X;\Lambda_+)^{\otimes\ell}\otimes\otimes H^\bullet(L;\Lambda_0)^{\otimes k}\to H^\bullet(X;\Lambda_0)$ なる operator が用いられる。これは、$\mathfrak{m}_{k,\ell}$ の場合と異なり、最後にファイバー積分を内点での evaluation map に関して取ることで得られる。

bulk 類 $\mathfrak{b}$ を決めた深谷圏の対象は、Lagrange 部分多様体と Mauere-Cartan 方程式の弱い意味での解の gauge 同値類の組で、射の空間は、potential 関数の値が一致している場合のみ 0 ではなく、bulk 類とそれぞれの Maurer-Cartan 方程式の弱い意味での解を用いて上記のように定義される Floer 複体 (cohomology level では Floer cohomology) である。$\mathfrak{m}$ は filter 付き A_∞-圏の構造を与え、$\mathfrak{p},\mathfrak{q}$ は それぞれ $\hat{\mathfrak{p}}: HH_*(Fuk_{\mathfrak{b}}(X,\omega))\to QH^*_{\mathfrak{b}}(X;\Lambda_0)$, $\hat{\mathfrak{q}}: QH^*_{\mathfrak{b}}(X;\Lambda_0)\to HH^*(Fuk_{\mathfrak{b}}(X,\omega))$ を与える。ここで、 $QH^*_{\mathfrak{b}}$ は $\mathfrak{b}$ で bulk 変形された量子 cohomology 環、HH^*, HH_* は Hochschild cohomology, Hochschild homology を表し、前者は open-closed map 後者は closed-open map とも呼ばれる。(次節で応用を述べるのに必要なので、言葉のみここに記したが、太田氏の予稿、講演で扱ってもらえるのではないかと思う。)

3. 応用例: コンパクトトーリック多様体の Lagrange トーラス軌道

[10]この節では (X,ω) をコンパクトケーラートーリック多様体とする。複素射影空間とその上の Fubini-Study 形式やその直積はその例である。複素次元を n とする。コンパクトトーラス $T=T^n$ は複素構造とケーラー計量を保って作用し、ケーラー形式に関して Hamilton 的な作用である。即ち、moment 写像 $\pi: X\to Lie^*(T)\cong\mathbb{R}^n$

[9]他にも、anti-symplectic involution の不動点集合として現れる Lagrange 部分多様体について、Maslov 数の条件をつければ Maurer-Cartan 方程式の解の存在を示すことができる [FOOO9]。

[10]この節に関する文献は [FOOO2, FOOO3, FOOO4] である。survey として [FOOO5] もある。

があって、π と線形な射影 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ の合成として得られる関数の Hamilton ベクトル場たちにより、T の作用は生成される。複素余次元 1 の部分集合 (部分トーラス作用の不動点集合の和集合で、toric divisors と呼ばれる) の補集合では T は 自由に作用する。従って、一般的な T-軌道には、自由かつ推移的に作用していて、Lagrange 部分多様体となることも分かる。$\exp : Lie(T) \to T$ を exponential map とすると、$\pi_1(T) = \exp^{-1}(id) \subset Lie(T)$ なので、$Lie(T)$ 及びその双対である $Lie^*(T)$ に それぞれ lattice N, M が定まる。$P = \pi(X)$ は 各頂点に集まる辺の原始的ベクトルが lattice M の基となる $\mathbb{R}^n$ の中の凸多面体である。$u \in \overset{\circ}{P}$ を P の内点とすると、$L(u) = \pi^{-1}(u)$ が Lagrange トーラス軌道 (Lagrange トーラスファイバーと呼ぶ) となる。$H_1(L(u);\mathbb{Z})$, $H^1(L(u);\mathbb{Z})$ はそれぞれ N, M と自然に同一視される。$L(u)$ が T の自由な軌道であることを用いて、次のことが示される。

定理 3. $H^1(L(u);\Lambda_0/2\pi\sqrt{-1}\mathbb{Z}) \subset \mathcal{MC}_{weak}(L(u))$

$L(u)$ の potential 関数を $H^1(L(u);\Lambda_0/2\pi\sqrt{-1}\mathbb{Z})$ に制限したものの、先頭項たち' は P の余次元 1 の面に対応し、P の情報を用いて記述できる。N のベクトル $\vec{v}_j, j = 1,\dots,m$ と実数 λ_j を用いて $M_{\mathbb{R}} = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ 上のアフィン関数 $\ell_j(u) = \langle \vec{v}_j, u\rangle - \lambda_j$ があって、

$$P = \{u \in M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} | \ell_j(u) \geq 0\}$$

と表される。M に $\mathbb{Z}$-基底をとり固定し、それに関して、$H^1(L(u);\Lambda_0/2\pi\sqrt{-1}\mathbb{Z})$ の座標を $(y_1(u),\dots,y_n(u)) \in (\Lambda_0 \setminus \Lambda_+)^n$ とすると、$\mathfrak{PO}^{L(u)}$ への先頭項の寄与は、

$$\mathfrak{PO}_0^{L(u)}(y_1(u),\dots,y_n(u)) = \sum_{j=1}^{m} y_1(u)^{v_{1j}} \cdot \cdots \cdot y_n(u)^{v_{nj}} T^{\ell_j(u)}$$

であることが分かる。 ここで、v_{ij} は $\vec{v}_j$ の先ほど取り固定した M の基底の双対基底に関する成分である。X が Fano 的即ち、 $c_1(X)$ があるケーラー類の正数倍になるとき、(bulk 変形がなければ) potential 関数は $\mathfrak{PO}_0^{L(u)}$ と一致する。一般には高次の項が現れるが、そのときでも $\mathfrak{PO}_0^{L(u)}$ は重要な情報を持っている。

これまでのことは、T-不変な bulk 変形をしても成り立つ。(実は、$\mathfrak{b}$ は不変微分形式ではなく、T-不変なサイクルを用いて、モデュライ空間を制約して $\mathfrak{q}_{k,\ell}$ を定義する。それにより、定理 3 と同様のことを示すことができる。)

定理 4. $\mathfrak{b}$ を T-不変なサイクルとする。$\mathfrak{b}$ により bulk 変形された potential 関数 $\mathfrak{PO}_{\mathfrak{b}}^{L(u)}$ が $(\Lambda_0 \setminus \Lambda_+)^n$ に臨界点 $\mathbf{y}(u)$ を持つことと、$\mathbf{y}(u)$ に対応した Maurer-Cartan 方程式の弱い意味での解 $b_{\mathbf{y}(u)}$ を用いて定義される Bott-Morse 型の Floer cohomology $HF_{\mathfrak{b}}^{\bullet}((L(u), b_{\mathbf{y}(u)}), (L(u), b_{\mathbf{y}(u)}))$ が消えないことは同値である。またこの時、Floer cohomology は Novikov 環 (あるいは Novikov 体) 係数の $L(u)$ の常 cohomology と加群として同型になる。

これまでは、個々の $L(u)$ に対して potential 関数を考えていたが、$y_i = u_i(u)T^{u_i}$, $i = 1, \ldots, n$, と変数を置き換えてみる。ここで、u_i は u の先ほど決めた M の基底に関する成分である。すると、$\mathfrak{PO}_{\mathfrak{b}}^{L(u)}(y_1(u), \ldots, y_n(u))$ を $y_1, \ldots, y_n$ を用いて表すと、それは u によらないことが分かる。そこでそれを $\mathfrak{PO}_{\mathfrak{b}}^X$ と書き、トーリック多様体 X の potential 関数と呼ぶことにする。この関数の定義域が何になるかは注意が必要で、$\vec{v}_T^{-1}(\overset{\circ}{P}) \subset (\Lambda \setminus \{0\})^n$ をその定義域と定義する。ここで、$\vec{v}_T$ は $v_T : (\Lambda \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}$ を (M に定めた基底のベクトルに対応して) n 個並べたものである。特に、そこでは $\mathfrak{PO}_{\mathfrak{b}}^X$ やその形式的な方向微分が T-進の意味で収束することは境界付き安定写像の Gromov コンパクト性から従う。

potential 関数 $\mathfrak{PO}_{\mathfrak{b}}^X$ の Jacobi 環を定義することができる (P あるいは その内部に対応した strict convergence power series ring を potential 関数の方向微分の生成するイデアルの然るべき閉包で割ったものとして定義する) 。それを $Jac(\mathfrak{PO}_{\mathfrak{b}}^X)$ と書く。

定理 5. $\mathfrak{q}$ を用いて、環としての同型 $QH_{\mathfrak{b}}^*(X; \Lambda_0) \to Jac(\mathfrak{PO}_{\mathfrak{b}}^X)$ が得られる。

特に、$\mathfrak{PO}_{\mathfrak{b}}^X$ は $\vec{v}_T^{-1}(\overset{\circ}{P})$ に重複度を込めて、$\sum_p b_p(X)$ の臨界点を持つことが分かる。($b_p(X)$ は X の p-次の Betti 数) $\mathfrak{PO}_{\mathfrak{b}}^X$ の臨界点 $\mathbf{y}$ に対して、$u_{\mathbf{y}} = \vec{v}_T(\mathbf{y})$, $b_{\mathbf{y}} = \vec{\log}(T^{-u_{\mathbf{y}}}\mathbf{y})$ とすると、$HF_{\mathfrak{b}}^\bullet((L(u_{\mathbf{y}}, b_{\mathbf{y}})), (L(u_{\mathbf{y}}, b_{\mathbf{y}})))$ は消えないことが分かる。ここで、$\vec{\log}$ は成分毎に ゼロでない定数項から始まる $c_0 +$ T の正べきの項たちの log をとったもの。これにより、$\mathfrak{b}$ で bulk 変形された深谷圏の非自明な対象が Lagrangian トーラス軌道とその上の Maurer-Cartan 方程式の弱い意味での解の組として得られる。

ここで、定理 5 の同型が、Hochschild cohomology を経由していることに注意して、次の [AFOOO] の定理を適用する。

定理 6. (1) (X, ω) を閉 symplectic 多様体とする。深谷圏の有限個の対象の生成する部分 filter 付き A_∞-圏 $\mathcal{L}$ への $\hat{\mathfrak{p}}$ の制限の像に $QH_{\mathfrak{b}}^*(X; \Lambda_0)$ の単位元を含めば、$\mathcal{L}$ (の対象) は、深谷圏を分裂生成する。

(2) $\mathfrak{p}$ と $\mathfrak{q}$ は双対である。

従って、コンパクトケーラートーリック多様体の ($\mathfrak{b}$ で bulk 変形された) 深谷圏は、$\mathfrak{PO}_{\mathfrak{b}}^X$ の臨界点に対応する対象により分裂生成されることが分かる。定理 5 とある pairings の両立性などの話題は太田氏の講演で触れられることと思う。

今述べたこと以外にも、トーリック多様体の中の Lagrange トーラス軌道のお互いに Hamilton 微分同相で写り合わない連続族で、どれも Hamilton 微分同相写像で自分自身から交叉を外せない例の構成、あるいは (S^2, ω) 2つの直積の中の Lagrange トーラスで同じようなものの構成 (この場合、トーラス軌道としてはそのようなものはない)[FOOO7] や、それを用いた、Hamilton 微分同相写像群の Calabi quasimorphisms

の本質的にどの２つも異なる連続族の構成 [FOOO10] など、この節で述べた理論が関わる応用がある。

References

[AFOOO] M. Abouzaid, K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Quantum cohomology and split generation in Lagrangian Floer theory*, in preparation.

[F] A. Floer, *Morse theory for Lagrangian intersections*, J. Differential Geom. **28**(1988), 513-547.

[F2] A. Floer, *Holomorphic spheres and symplectic fixed points*, Comm. Math. Phys. **120**(1989), 576-611.

[FOOO1] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Lagrangian intersection Floer theory, anomaly and obstruction, Part I and II*, AMS/IP Studies in Advanced Math., **46-1,2**, Amer. Math. Soc. and International Press, 2009.

[FOOO2] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Lagrangian Floer theory on compact toric manifolds, I*, Duke Math. J. **151**(2010), 23-174.

[FOOO3] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Lagrangian Floer theory on compact toric maniflds, II*, Selecta Math. (N.S.) **17**(2011), 609-711.

[FOOO4] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Lagrangian Floer theory and mirror symmetry on compact toric manifolds*, Astérisque **376**, Société Mathématique de France, 2016.

[FOOO5] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Lagrangian Floer theory on compact toric manifolds, survey*, In Surveys in Differential Geometry Vol. XVII, International Press, 2012, 229-298. 231-268.

[FOOO6] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Displacement of polydisks and Lagrangian Floer theory*, J. Symplectic Geom. **11**(2013), 231-268.

[FOOO7] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Toric degeneration and non-displaceable Lagrangian tori in $S^2 \times S^2$*, IMRN **2012**, 2942-2993.

[FOOO8] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Lagrangian Floer theory over integers: spherically positive symplectic manifolds*, Pure Appl. Math. Q. **9**(2013), 189-289.

[FOOO9] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Anti-symplectic involution and Floer cohomology*, accepted for publication in Geometry and Topology.

[FOOO10] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Spectral invariants with bulk, quasi-homomorphisms and Lagrangian Floer theory*. preprint arXiv:1105.5123.

[FO] K. Fukaya and K. Ono, *Arnold conjecture and Gromov-Witten invariant*, Topology 38 (1999), 933–1048.

[LT] G. Liu and G. Tian, *Floer homology and Arnold conjecture*, J. Differential Geom., **49**(1998), 1-74.

[Oh] Y.-G. Oh, *Floer cohomology of Lagrangian intersections and pseudo-holomorphic disks, I, II*, Comm. Pure Appl. Math. **46**(1993), 949-994, 995-1012.