深谷圏とミラー対称性予想

太田 啓史　（名古屋大学多元数理科学研究科）

以下、深谷賢治氏（Simons Center for Geometry and Physics）、Yong-Geun Oh 氏（Center for Geometry and Physics, IBS）、小野薫氏（京大数理研）との一連の共同研究および Mohammed Abouzaid 氏（Columbia 大）との共同研究に基づく。

1. Quick review of A_∞ algebra associated to Lagrangian submanifold

1.1. Coefficient ring/field. まず、今後我々が使う係数環とその商体を導入する。R を単位元をもつ可換環とする。T を不定元として

$$\Lambda^R = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i T^{\lambda_i} \;\middle|\; a_i \in R, \lambda_i \in \mathbb{R}, \lim_{i\to\infty} \lambda_i = +\infty \right\}$$

とおき、これを R 上の普遍ノビコフ体と呼ぶ [FOOO3]。Λ^R には

$$v_T(\sum_{i=0}^{\infty} a_i T^{\lambda_i}) = \inf_{a_i \neq 0} \lambda_i, \quad v_T(0) = +\infty$$

により非アルキメデス的付値 v_T が入り、$\Lambda_0^R = \{x \in \Lambda^R \mid v_T(x) \geq 0\}$ とおけば、これは付値環となり R 上の普遍ノビコフ環と呼ぶ。この原稿では Remark 1.2 (1) 以外 $R = \mathbb{C}$ とし、その場合 Λ, Λ_0 などと書く。Λ_0 は局所環になり実際

$$\Lambda_+ = \{x \in \Lambda_0 \mid v_T(x) > 0\}$$

は Λ_0 の唯一の極大イデアルであり、$\Lambda_0/\Lambda_+ \cong \mathbb{C}$ となる。後の議論では、$\lambda_i \in \mathbb{R}$ は擬正則円盤のシンプレクティック面積を表し、係数を $\Lambda_0/\Lambda_+ \cong \mathbb{C}$ に還元することは定値写像のみが寄与する古典的描像を考えることに対応する。また、付値 v_T を用いて Λ には T-進位相が入りそれによる種々の完備化を考える必要がある場合があるが、ここでは省略する。（例えば、Remark 2.8 (1) および [FOOO10] を参照。）

1.2. A_∞ algebra associated to L. 以下特に断らぬ限り、(X, ω) を $2n$ 次元コンパクト[1]シンプレクティック多様体とし、$L \subset X$ を向きづけられた相対スピン[2]な閉ラグランジアン部分多様体とする。L の $\mathbb{C}$ 係数微分形式全体の空間を $\Omega(L)$ とし、$\Omega(L, \Lambda) = \Omega(L) \otimes \Lambda$, $\Omega(L, \Lambda_0) = \Omega(L) \otimes \Lambda_0$ とおく。

Theorem 1.1. [FOOO3, FOOO4] 上のような任意のラグランジアン部分多様体 L に対し、$\Omega(L, \Lambda_0)$ 上に 1_L を単位元[3]とするフィルター付き A_∞ 代数の構造が入る。係数を $\Lambda_0/\Lambda_+ \cong \mathbb{C}$ に還元すると L のドラーム DGA と A_∞ 代数としてホモトピー同値。

Partially supported by JSPS Grant-in-Aid for Scientific Research 15H02054. Version:20160528. 2016 年 7 月 7 日トポロジーシンポジウム予稿。

[1] コンパクトでなくても $\mathbb{C}^n$ などある種の凸性をもつものなら可。

[2] L が相対スピンであるとは $\exists st \in H^2(X; \mathbb{Z}_2)$ s.t $st|_L \equiv w_2(L)$ をみたすこと。L に境界をもつ擬正則円盤のモジュライ空間に向きが入るために必要 [FOOO4, Chapter 8]。

[3] 1_L は L 上恒等的に 1 である定数関数。$\mathbf{e}$ が単位元であるとは $\mathfrak{m}_2(\mathbf{e}, x) = (-1)^{\deg x}\mathfrak{m}_2(x, \mathbf{e}) = x$, $\mathfrak{m}_k(\cdots, \mathbf{e}, \cdots) = 0$ $(k \neq 2)$ を満たすこと。

すなわち、$k = 0, 1, 2, \ldots$ に対し、次数 $+1$ の写像の列

$$\mathfrak{m}_k \ : \ \underbrace{\Omega^*(L;\Lambda_0)[1] \otimes \cdots \otimes \Omega^*(L;\Lambda_0)[1]}_{k \text{ times}} \longrightarrow \Omega^*(L;\Lambda_0)[1]$$

が存在し次の関係式 (A_∞ 関係式) を満たす

$$\sum_{k_1+k_2=k+1} \sum_i (-1)^\epsilon \mathfrak{m}_{k_1}(x_1, \ldots, \mathfrak{m}_{k_2}(x_i, \ldots, x_{i+k_2-1}), \ldots, x_k) = 0. \tag{1.1}$$

但し $\epsilon = \deg' x_1 + \cdots + \deg' x_{i-1}$（$\deg' = \deg + 1$）。以下符号は割愛する。フィルトレイションは $\mathcal{F}^\lambda \Lambda := \{x \in \Lambda \mid v_T(x) \geq \lambda\}$ から引き起こされるものを入れる。

Remark 1.2. (1) [FOOO3, FOOO4] では、L の $\Lambda_0^{\mathbb{Q}}$ 係数の特異チェイン複体のある部分複体上に A_∞ 代数の構造を構成した。横断正則性の問題を解決するために、そこでは種数 0 の境界付き安定写像の種々のモジュライ空間の倉西構造の多価摂動を用いた。ここでは CF-摂動（continuous family of perturbation）を用いてドラームモデルで話をする。CF-摂動は、一部 [FOOO4, FOOO7] でも導入していたが、[FOOO17, FOOO19] でより一般的な状況でも使い易いように整備した。CF-摂動を使うと、[FOOO3, FOOO4] で行っていた込み入った帰納的な構成が簡明になったり、また marked points の巡回対称性が得られ marked points の忘却写像がよい振る舞いをするようになるため、ドラームモデルでは単位元の存在[4]が従う [Fu2]。（その代わり係数は $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ となる。一方、CF-摂動ではなく [FOOO3, FOOO4] の議論を用いれば、X がある条件（spherically positive[5]）をみたせば多価ではなく一価摂動で A_∞ 代数を構成することができ、そのときは係数を $\Lambda_0^{\mathbb{Z}}$ あるいは $\Lambda_0^{\mathbb{Z}_2}$ にとることができる [FOOO13]。）なお、モース複体上に A_∞ 代数を構成することもできる [FOOO5]。

(2) どのモデルを使うにせよ、A_∞ 構造は一旦はチェンレベル（微分形式レベル）で構成される。一旦チェイン上に構成できれば、障害理論やホモロジー摂動と呼ばれる一般的な方法（[Ka], [KS] など）を用いてコホモロジー $H^*(L;\Lambda_0)$ 上に A_∞ 構造を作ることができる。これを [FOOO3, FOOO4] では canonical model と呼んだ。canonical model に移れば、特異チェインモデルの場合でも L の基本類 $\mathbf{e} := PD[L] \in H^0(L;\Lambda_0)$ は A_∞ 代数の単位元になる [FOOO3, Theorem A]。

(3) 構成には種数 0 の境界付き安定写像のモジュライ空間を用いるが、一気に A_∞ 構造を構成するのではない。安定写像のエネルギーを用いたある半順序集合を考えることが擬正則写像の Gromov コンパクト性定理から可能であり、それに関する帰納的な構成を行う。帰納的なステップを進めるところではホモトピー的な議論（障害理論）を組み合わせて A_∞ 構造を構成する [FOOO4]。

(4) 以上の構成で技術的に基礎となるのは倉西構造の理論による仮想基本チェインの方法である。[FOOO3, FOOO4] で書かれたことの更に詳細な記述が必要ならば [FOOO15]、特に [FOOO16], [FOOO18] をご覧頂きたい。また、[FOOO17, FOOO19] は CF-摂動を基軸に、倉西構造の理論を公理化、パッケージ化して使い易いように再構築するものである。

1.3. **Weak Maurer-Cartan equation, potential function and Floer cohomology.** $(C, \mathfrak{m})$ を Theorem 1.1 の filtered A_∞ 代数とする。$b \in C[1]^0$ を用いて A_∞

[4]特異チェインモデルでは L の基本サイクルはホモトピー単位元。単位元までは言えない [FOOO3, FOOO4]。

[5]定値でない任意の J-holomorphic map $u : S^2 \to X$ は $c_1(TX)[u] > 0$ となるような ω-compatible almost complex structure J が存在するもの。例えば Fano 多様体（$-K_X$ が豊富）。

代数は以下のように変形できる[6]。

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}_k^b(x_1,\ldots,x_k) &= \sum_{\ell_0,\ldots,\ell_k}\mathfrak{m}_{k+\sum\ell_i}(\underbrace{b,\ldots,b}_{\ell_0},x_1,\underbrace{b,\ldots,b}_{\ell_1},\ldots,\underbrace{b,\ldots,b}_{\ell_{k-1}},x_k,\underbrace{b,\ldots,b}_{\ell_k})\\ &= \mathfrak{m}(e^bx_1e^bx_2\ldots x_{k-1}e^bx_ke^b)\end{aligned}$$

とおと、$\mathfrak{m}_k^b$ はまた A_∞ 構造を定める。但し

$$e^b := 1+b+b\otimes b+\cdots+b\otimes\cdots\otimes b+\cdots$$

とおいた。さて、A_∞ 関係式 (1.1) において、$\mathfrak{m}_0\neq 0$ ならば、一般には $(\mathfrak{m}_1)^2=0$ とはならないことに注意する。そこで、$\mathfrak{m}_k$ を変形して $(\mathfrak{m}_1^b)^2=0$ なるための b の条件を求めよう。A_∞ 代数の単位元 1_L を用いると次の定義に至る。

Definition 1.3. $b\in C[1]^0$ に対し、

$$\mathfrak{m}(e^b)(=\mathfrak{m}_0^b(1)) = c_b1_L,\qquad \text{for } \exists c_b\in\Lambda_0$$

を **weak Maurer-Cartan 方程式**といい、その解の集合を $\mathcal{MC}_{\rm weak}(L)$ とおく[7]。$\mathcal{MC}_{{\rm weak}(L)}\neq\emptyset$ の時、L を weakly unobstructed という。更にこの時、

$$\mathfrak{PO}_L\ :\ \mathcal{MC}_{\rm weak}(L)\longrightarrow\Lambda_0$$

を $\mathfrak{m}(e^b)=\mathfrak{PO}_L(b)1_L$ で定義し、$\mathfrak{PO}_L$ を L **のポテンシャル関数**と呼ぶ[8]。

次の補題は単位元の定義および $\mathfrak{m}_k^b$ に対する A_∞ 関係式より直ちに従う。

Lemma-Definition 1.4. L が *weakly unobstructed* ならば、任意の $b\in\mathcal{MC}_{\rm weak}(L)$ に対し、$\mathfrak{m}_1^b\circ\mathfrak{m}_1^b=0$ が成り立つ。このとき、

$$HF((L,b);\Lambda_0) := H(\Omega(L;\Lambda_0),\mathfrak{m}_1^b) \tag{1.2}$$

とおき、これを (L,b) の **Floer cohomology** とよぶ。

weak Maurer-Cartan 元が２つある場合、次が成り立つ。

Proposition 1.5.

$$\delta_{b_1,b_0}(x) := \sum_{k_1,k_0\geq 0}\mathfrak{m}_{k_1+k_0+1}(\underbrace{b_1,\cdots,b_1}_{k_1},x,\underbrace{b_0,\cdots,b_0}_{k_0})$$

とおく。もし $b_i\in\mathcal{MC}_{\rm weak}(L)$ ならば、

$$(\delta_{b_1,b_0}\circ\delta_{b_1,b_0})(x) = (\mathfrak{PO}_L(b_1)-\mathfrak{PO}_L(b_0))x \tag{1.3}$$

が成り立つ[9]。特に $\mathfrak{PO}_L(b_1)=\mathfrak{PO}_L(b_0)$ ならば、$\delta_{b_1,b_0}\circ\delta_{b_1,b_0}=0$.

1.4. **bulk deformations.** Subsections 1.2, 1.3 にでてきた様々なもの（A_∞ 代数, $\mathcal{MC}_{\rm weak}(L)$, $\mathfrak{PO}_L$ など）を、シンプレクティック多様体 X の各サイクル $\mathbf{b}$ により変形することができる [FOOO3, Subsection 3.8.5]。これを我々は**バルク変形**と呼んだ。以下の話もみな、バルク変形した族の話として捉えることができる。ここでは紙数の関係で割愛する。バルク変形を用いた応用として、[FOOO7], [FOOO9], [FOOO10], [FOOO14] をあげておく。[FOOO10] については Remark 2.8 (3) を参照。

[6] $v_T>0$ のところで先の T-進位相を用い、$v_T=0$ のところでは通常の $\mathbb{C}$ の位相を用いる。

[7] 正確にはそのゲージ同値類の集合。[FOOO3, Chapter 4] を参照。また、$\mathfrak{m}(e^b)=0$ を Maurer-Cartan 方程式という。

[8] Maslov 指数が２未満の擬正則円盤がない状況（例えば Theorem 2.3 (1) の状況）で、canonical model におけるポテンシャル関数の一般的表示は [FOOO9, Appendix 1] に与えてある。

[9] δ_{b_1,b_0} は $\mathfrak{PO}_L$ の行列因子化を与える。

2. Toric case

前節までの結果を受けて次が基本問題となるが、それを解決するためには、いかんせんすべての擬正則円盤のモジュライを解析しないといけないので一般にはいずれもなかなか難しい問題である。

Problem 2.1. シンプレクティック多様体 X とその相対スピンなラグランジアン部分多様体 L が与えれたとき、

(1) L に付随する A_∞ 代数構造を決定せよ。
(2) L はいつ weakly unobstructed になるかを判定せよ。
(3) (2) のときそのポテンシャル関数を計算し、Floer cohomology を計算せよ[10]。

問題 (2) については一般的な状況でいくつかの十分条件が知られている [FOOO3, Chapter 3] が、ここでは省略する。

この節の目的は X が射影的なトーリック多様体で、そのラグランジアン部分多様体としてトーラス軌道の場合に上記問題に答えることである。[FOOO6], [FOOO7], [FOOO10] の結果である[11]。

$\dim_{\mathbb{C}} X = n$ とする。X のモーメント写像を π、その像を P とする。

$$\pi \ : \ X \to P \subset \mathbb{R}^n$$

像 P は実 n 次元の凸多面体であることが知られている[12]。$u \in \mathrm{Int}\ P$ に対し $L(u) := \pi^{-1}(u)$ とおくと、これは丁度 T^n 作用の軌道であり、T^n と微分同相なラグランジアン部分多様体となる。ここではラグランジアントーラスファイバーと呼ぶ。

Proposition 2.2. [FOOO6]

(1) 任意の $u \in \mathrm{Int}\ P$ に対し、$L(u)$ は *weakly unobstructed*。
(2)
$$\frac{H^1(L(u); \Lambda_0)}{H^1(L(u); 2\pi\sqrt{-1}\mathbb{Z})} \subset \mathcal{MC}_{\mathrm{weak}}(L(u)).$$

以下、ポテンシャル関数 $\mathfrak{PO}_{L(u)}$ を Proposition 2.2 (2) の左辺に制限したものも同じ $\mathfrak{PO}_{L(u)}$ で書くことにする。いま、$\mathbf{e}_i = PD(T^{i-1} \times \mathrm{pt} \times T^{n-i}) \in H^1(T^n; \mathbb{Z})$ とおくと、任意の $H^1(L(u); \Lambda_0)$ の要素は $\sum_{i=1}^n x_i(u)\mathbf{e}_i$ と書けるので $x_1(u), \dots, x_n(u)$ は $H^1(L(u); \Lambda_0)$ の座標を与える。

$$y_i(u) = e^{x_i(u)}$$

とおくと、これは商空間

$$\frac{H^1(L(u); \Lambda_0)}{H^1(L(u); 2\pi\sqrt{-1}\mathbb{Z})} \cong (\Lambda_0/2\pi\sqrt{-1}\mathbb{Z})^n$$

の座標を与え、ポテンシャル関数 $\mathfrak{PO}_{L(u)}$ は $y_i(u)$ の関数とみれる。

いま、X のモーメント写像の像 P があるアファイン関数 ℓ_j を用いて

$$P = \{u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n \mid \ell_j(u) \geq 0, \ j = 1, \dots, m\}$$

で与えられているとする。ここで、j 番めの面の（内向き）法ベクトル

$$v_j = (v_{j1}, \dots, v_{jn}) := \left(\frac{\partial \ell_j}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial \ell_j}{\partial u_n}\right) \in \mathbb{Z}^n$$

[10]例えば、Floer cohomology の非消滅が分かるとシンプレクティック幾何に（ミラー対称性予想とは別に）いろいろ顕著な応用が得られる。例えば、[FOOO6], [FOOO7], [FOOO9], [FOOO12], [FOOO14] などをみられたい。

[11]それらのサーベイである [FOOO11] も参照。

[12]例えば、$X = \mathbb{C}P^n$ で標準的なケーラー構造の場合、P は標準 n 単体。

は整数ベクトルである。このとき、以下が成り立つ。

Theorem 2.3. [CO][FOOO6][FOOO7]

(1) X がトーリック *Fano* 多様体のとき

$$\mathfrak{PO}_{L(u)}(y_1(u),\ldots,y_n(u)) = \sum_{j=1}^{m} y_1(u)^{v_{j1}} \ldots y_n(u)^{v_{jn}} T^{\ell_j(u)}.$$

(2) X が *Fano* でないとき

$$\mathfrak{PO}_{L(u)}(y_1(u),\ldots,y_n(u)) = \sum_{j=1}^{m} y_1(u)^{v_{j1}} \ldots y_n(u)^{v_{jn}} T^{\ell_j(u)} + \text{extra terms}^{13}.$$

上の定理の $\mathfrak{PO}_{L(u)}(y_1(u),\ldots,y_n(u))$ は u に依っている関数であるが、更に

$$y_i = y_i(u)T^{u_i}$$

とおくと、ポテンシャル関数は u によらないことがわかる。これを $\mathfrak{PO}_X$ と書く。

$$\mathfrak{PO}_X \ : \ (\Lambda \setminus 0)^n \to \Lambda.$$

Example 2.4. $X = \mathbb{C}P^n$ のとき、$u \in \mathrm{Int}P$ に対し

$$\mathfrak{PO}_{L(u)}(y_1(u),\ldots,y_n(u)) = y_1(u)T^{u_1} + \cdots + y_n(u)T^{u_n} + \frac{T^{1-u_1-\cdots-u_n}}{y_1(u)\cdots y_n(u)}$$

$$\mathfrak{PO}_{\mathbb{C}P^n}(y_1,\ldots,y_n) = y_1 + \cdots + y_n + \frac{T}{y_1\cdots y_n}.$$

トーラスファイバー $L(u)$ の場合、$\mathfrak{PO}_X$ の臨界点の条件式は $\mathfrak{m}_1^b = 0$ を導くことがわかるので、$(L(u),b)$ の Floer cohomology は消えない[14]。実際、次の定理のように $\mathfrak{PO}_X$ の臨界点を調べることにより、Floer cohomology が消えないラグランジアントーラスファイバーを完全に決定することができる。すなわち、

$$\mathcal{M}(X) := \left\{(u,b) \;\middle|\; u \in \mathrm{Int}\ P, b \in \frac{H^1(L(u);\Lambda_0)}{H^1(L(u);2\pi\sqrt{-1}\mathbb{Z})},\ HF((L(u),b);\Lambda) \neq 0\right\}$$

$$\mathrm{Crit}(\mathfrak{PO}_X) := \left\{\vec{y} = (y_1\ldots,y_n) \in (\Lambda\setminus 0)^n \;\middle|\; y_i\frac{\partial \mathfrak{PO}_X}{\partial y_i}(\vec{y}) = 0\ \forall i\ , v_T(\vec{y}) \in \mathrm{Int}\ P\right\} \tag{2.1}$$

とおいたとき、次が成り立つ。

Theorem 2.5. [FOOO6, FOOO10] $\vec{y} = (y_1,\ldots,y_n)$ とかく。

(1) $\vec{y} \mapsto (u,b) = (v_T(\vec{y}), \sum_i \log(y_i T^{-v_T(y_i)})\mathbf{e}_i)$ は次の全単射を導く。

$$\mathrm{Crit}(\mathfrak{PO}_X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(X).$$

(2) $\mathfrak{PO}_X$ が *Morse* のとき、$\#\mathcal{M}(X) = \sum b_k(X)$[15].

---

[13] X が Fano のときはマスロフ指数が 2 の正則円盤を分類することができ、ポテンシャル関数を上のように明示的に書き下すことができる [CO] が、Fano でないと $c_1(TX)[C] \leq 0$ なる有理曲線 C が存在することに対応してバブルが起こり、その効果として T のベキが大きくなる項が余分に出てきて、ポテンシャル関数は一般には無限和となる。詳しくは [FOOO7, Theorem 3.5] を参照。

[14] 実際、$\mathfrak{m}_1^b = 0$ ゆえ、加群として $H(T^n;\Lambda)$ と同型になる。

[15] 一般には、$\#\mathcal{M}(X) \leq \sum b_k(X)$.

Example 2.6. $X = \mathbb{C}P^n$ とすると Example 2.4 より $\mathfrak{PO}_{\mathbb{C}P^n}(y_1, \ldots, y_n) = y_1 + \cdots + y_n + \frac{T}{y_1 \cdots y_n}$ ゆえ、臨界点は $\zeta_{n+1} = e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{n+1}}$ を 1 の原始 $(n+1)$ 乗根としたとき

$$\vec{y}_k = \left(\zeta_{n+1}^k T^{\frac{1}{n+1}}, \ldots,\ \zeta_{n+1}^k T^{\frac{1}{n+1}}\right) \in (\Lambda \setminus 0)^n, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

よって、$v_T(\vec{y}_k) = (\frac{1}{n+1}, \ldots, \frac{1}{n+1})$ で

$$\mathcal{M}(X) = \left\{ \left(\left(\frac{1}{n+1}, \ldots, \frac{1}{n+1} \right), \vec{y}_k \right) \;\middle|\; k = 0, 1, \ldots, n \right\}$$

ゆえ[16]$HF(\left(L((\frac{1}{n+1}, \ldots, \frac{1}{n+1})), \vec{y}_k\right); \Lambda) \cong \Lambda^{2^n}$.

Theorem 2.5 より更に詳しく次の定理が得られる。

Theorem 2.7. [FOOO10] 任意の射影的トーリック多様体 X に対し、次の環同型が存在する。

$$ks \;:\; QH(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Jac}(\mathfrak{PO}_X)\,. \tag{2.2}$$

ここで $QH^*(X)$ は X の量子コホモロジー環を表す。

Remark 2.8. (1) (2.2) の右辺は $\mathfrak{PO}_X$ の（Λ_0 上定義される）ヤコビ環である。Theorem 2.3 で述べたように X が Fano の場合は $\mathfrak{PO}_X$ はローラン多項式になるので普通のヤコビ環でよいが、X が Fano でないと $\mathfrak{PO}_X$ は一般には無限級数になるので通常のヤコビ環の定義ではなく、ある種の T 進位相に関する完備化およびヤコビイデアルの閉包をとる必要がある。詳しくは [FOOO10] をご覧頂きたい。

(2) 同型射 ks は小平-スペンサー写像の類似で後 (3.7) で述べる閉開写像 $\mathfrak{q}$ を用いて幾何学的に陽に与えられる。X がトーリック Fano 多様体の場合は、例えば A. Givental, V. Batyrev など色々な人々によって（色々な場合に）上の同型は示されているが、具体的に同型射を与えて示すというより両辺を計算して同型を示すというものであり、我々の証明とは全く異なる。

(3) 左辺がシンプレクティックサイドで右辺が複素幾何サイドでこの同型はミラー対称性の一種である。[FOOO10, Chapter 3] では環同型だけでなくより詳しく、バルク変形（Subsection 1.4）の空間 $H^*(X; \Lambda_0)$ に入るフロベニウス多様体構造（平坦構造 [Sa]）のレベルでの同型も証明している。[FOOO11] も参照。

3. Fukaya category

Section 1 では一つのラグランジアン部分多様体に対して A_∞ 代数が構成されることを述べた。ここではいくつかのラグランジアン部分多様体の族に対して深谷圏とよばれる A_∞ 圏が構成されることを述べる。深谷圏のアイデアは [Fu1] に遡る。

3.1. A_∞ category $\mathcal{L}$.

Theorem 3.1. [AFOOO1] シンプレクティック多様体 X の有限個の *weakly unobstructed* なラグランジアン部分多様体 L_i とその *weak Maurer Cartan* 元 $b_i \in \mathcal{MC}_{\mathrm{weak}}(L)$ の対の集合を $\mathbf{L} = \{(L_i, b_i)\}$ とおく[17]。ここで L_i たちは互いに横断的に交わると仮定する。このとき、$\mathbf{L}$ を対象の集合とするフィルター付き A_∞ 圏 $\mathcal{L}$ が存在する。これを $\mathbf{L}$ の**深谷圏**という。

[16]本当は $\mathcal{M}(X)$ の第 2 成分は Theorem 2.5 (1) のように y_i 座標を $x_i(u)$ 座標で書き換えるべきであるが表示を簡単にするため、y_i 座標のまま表記する。以下同様。

[17]相対スピン構造を考える際の $st \in H^2(X; \mathbb{Z}_2)$ は $st|_{L_i} \equiv w_2(L_i)$ $\forall i$ をみたす。

すなわち、$\mathcal{L}$ の対象は (L_i, b_i) で、対象 (L_i, b_i) を以下では i と略記するとき、射の空間は

$$CF(i,j) = \begin{cases} \bigoplus_{p \in L_i \cap L_j} \Lambda \cdot p & \text{if } L_i \neq L_j, \\ \Omega(L_i; \Lambda) & \text{if } L_i = L_j \end{cases} \tag{3.1}$$

であり、$\vec{\kappa} = (\kappa_0, \ldots, \kappa_k)$ とおくとき写像の族

$$\mathfrak{m}_{\vec{\kappa}} \ : \ B_{\vec{\kappa}} CF(\mathcal{L}) := CF(\kappa_0, \kappa_1) \otimes \cdots \otimes CF(\kappa_{k-1}, \kappa_k) \to CF(\kappa_0, \kappa_k) \tag{3.2}$$

で A_∞ 関係式

$$\sum_{\vec{\kappa}_1, \vec{\kappa}_2} \pm \mathfrak{m}_{\vec{\kappa}_1}(\cdots, \mathfrak{m}_{\vec{\kappa}_2}(\cdots, \cdots), \cdots) = 0 \tag{3.3}$$

をみたすものが存在する。

$\mathfrak{m}_{\vec{\kappa}}$ の構成には $\vec{\kappa}$ を境界条件とする種数 0 の境界付き安定写像のモジュライ空間を用いるが、Theorem 1.1 に比べ新たな技術的問題は現れない。倉西構造の理論をパッケージ化した [FOOO17, FOOO19] の命題を用いれば始めから証明をやり直す必要はない程度である。

3.2. **Hochschild (co)homology of $\mathcal{L}$.** A_∞ 圏 $\mathcal{L}$ に対して、その（$\mathcal{L}$ 自身を係数とする）Hochschild (co)homology を導入する。まず、以下で用いる一般的な記号の説明を行う。Λ 加群 C に対し、$B_k C = \underbrace{C \otimes \cdots \otimes C}_{k \text{ times}}$ および $BC = \bigoplus_{k=0}^{\infty} B_k C$ とおく。($ただし $B_0 C = \Lambda_0$) BC には次の余積 $\Delta : BC \to BC \otimes BC$ により余結合的余代数の構造が入る。

$$\Delta(x_1 \otimes \cdots \otimes x_k) = \sum_{i=0}^{k} (x_1 \otimes \cdots \otimes x_i) \otimes (x_{i+1} \otimes \cdots \otimes x_k).$$

$\Delta^{n-1} : BC \to (BC)^{\otimes n}$ を

$$\Delta^{n-1} = (\Delta \otimes \underbrace{id \otimes \cdots \otimes id}_{n-2}) \circ (\Delta \otimes \underbrace{id \otimes \cdots \otimes id}_{n-3}) \circ \cdots \circ \Delta.$$

により定義すると $\mathbf{x} \in B_k C$ は

$$\Delta^{n-1}(\mathbf{x}) = \sum_c \mathbf{x}_c^{(n;1)} \otimes \cdots \otimes \mathbf{x}_c^{(n;n)} \tag{3.4}$$

と書き表すことができる。ここで、c は $\mathbf{x}$ を n 個のテンソル積の形に分割するやり方を指定する添字の集合を走る。

Lemma-Definition 3.2. 以下で定義される $(CH_*(\mathcal{L}), \partial_H)$ は複体をなす。これを A_∞ 圏 $\mathcal{L}$ の Hochschild chain complex といい、そのホモロジーを $HH_*(\mathcal{L})$ と書き、$\mathcal{L}$ の **Hochschild homology** という。$\vec{\kappa} = (\kappa_0, \ldots, \kappa_k)$ としたとき

$$\begin{aligned} CH_*(\mathcal{L}) &:= \bigoplus_{\vec{\kappa}} CF(\kappa_0, \kappa_1) \otimes \cdots \otimes CF(\kappa_k, \kappa_0) \\ \partial_H(\mathbf{x}) &:= \sum_c \pm \mathbf{x}_c^{(3;1)} \otimes \mathfrak{m}(\mathbf{x}_c^{(3;2)}) \otimes \mathbf{x}_c^{(3;3)} + \sum_c \pm \mathfrak{m}(\mathbf{x}_c^{(3;3)} \otimes \mathbf{x}_c^{(3;1)}) \otimes \mathbf{x}_c^{(3;2)}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Lemma-Definition 3.3. 以下で定義される $(CH^*(\mathcal{L}), \delta_H)$ は複体をなす。これを A_∞ 圏 $\mathcal{L}$ の Hochschild cochain complex といい、そのホモロジーを $HH^*(\mathcal{L})$ と書き、$\mathcal{L}$ の **Hochschild cohomology** という。$\vec{\kappa} = (\kappa_0, \ldots, \kappa_k)$ としたとき

$$\begin{aligned} CH^*(\mathcal{L}) &:= \prod_{\vec{\kappa}} \mathrm{Hom}(CF(\kappa_0,\kappa_1)\otimes\cdots\otimes CF(\kappa_{k-1},\kappa_k), CF(\kappa_0,\kappa_k)) \\ \delta_H(\varphi)(\mathbf{x}) &:= \sum_c \pm\mathfrak{m}(\mathbf{x}_c^{(3;1)}\otimes\varphi(\mathbf{x}_c^{(3;2)})\otimes\mathbf{x}_c^{(3;3)}) + \sum_c \pm\varphi(\mathbf{x}_c^{(3;1)}\otimes\mathfrak{m}(\mathbf{x}_c^{(3;2)})\otimes\mathbf{x}_c^{(3;2)}). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Remark 3.4. Hochschild homology は Hochschild cohomology 上の加群の構造を自然にもつ（キャップ積）。

Lemma-Definition 3.5. $\varphi, \psi \in HH^*(\mathcal{L})$ に対し

$$m_2(\varphi,\psi) := \sum \pm\mathfrak{m}(\cdots, \varphi(\cdots), \cdots, \psi(\cdots), \cdots)$$

と定義すると、これは $HH^*(\mathcal{L})$ に結合的な積を定めるこれにより、$HH^*(\mathcal{L})$ は環構造をもつ。

3.3. **Open-closed, closed-open maps.** 我々は [FOOO3, Theorem 3.8.9, Theorem 3.8.32] において各ラグランジアン部分多様体 $L \subset X$ に対して、種数 0 境界付き安定写像のモジュライ空間の interior marked point, boundary marked point をそれぞれ出力点として用いることにより次の写像を構成した。

$$\begin{aligned} \mathfrak{p} &: HF(L,b) \to QH^*(X) \quad \text{s.t. } \mathfrak{p} \equiv i_! \mod \Lambda_+ \\ \mathfrak{q} &: QH^*(X) \to HF(L,b) \quad \text{s.t. } \mathfrak{q} \equiv i^* \mod \Lambda_+. \end{aligned} \tag{3.7}$$

ここで $i :\hookrightarrow X$ は包含写像で $i_!$ は Gysin 写像。 mod Λ_+ は係数を $\Lambda_0/\Lambda_+ \cong \mathbb{C}$ に還元することを意味する。最近では $\mathfrak{p}$ を開閉写像、$\mathfrak{q}$ を閉開写像と呼び $\mathcal{OC}, \mathcal{CO}$ などと書く[18]人が多いようである。これを深谷圏 $\mathcal{L}$ の場合に一般化することは直接的である。

Proposition 3.6. [AFOOO1] 次の Λ 加群の射 $\widehat{\mathfrak{p}}, \widehat{\mathfrak{q}}$ で、$\mathcal{L} = \{(L,b)\}$（対象が唯一）のとき (3.7) の $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ に一致するものが存在する。

$$\begin{aligned} \widehat{\mathfrak{p}} &: HH_*(\mathcal{L}) \to QH^*(X) \\ \widehat{\mathfrak{q}} &: QH^*(X) \to HH^*(\mathcal{L}). \end{aligned} \tag{3.8}$$

更に、$\widehat{\mathfrak{q}}$ は環準同型射になり、$\widehat{\mathfrak{p}}$ は $QH^*(X)$-加群の射となる。

Remark 3.4 により、$HH_*(\mathcal{L})$ は $HH^*(\mathcal{L})$-加群と思えるが、更に (3.8) の環準同型射 $\widehat{\mathfrak{q}} : QH^*(X) \to HH^*(\mathcal{L})$ を経由することで $\widehat{\mathfrak{p}}$ を $QH^*(X)$-加群の射とみることができる、というのが最後の主張である。

射 $\widehat{\mathfrak{p}}$ と $\widehat{\mathfrak{q}}$ は次の意味で互いに双対である。

Proposition 3.7. [AFOOO1] 任意の $x \in QH^*(X)$ と $\mathbf{y} \in HH_*(\mathcal{L})$ に対し

$$\langle \widehat{\mathfrak{q}}(x), \mathbf{y}\rangle_{HH} = \pm\langle x, \widehat{\mathfrak{p}}(\mathbf{y})\rangle_{PD_X}$$

が成り立つ。ここで、$\langle\cdot,\cdot\rangle_{HH}$ は Hochschild cohomology と Hochschild homology の自然な pairing で、$\langle\cdot,\cdot\rangle_{PD_X}$ は X の Poincaré pairing を表す。

[18]確かにその方がネーミングとしてはセンスがよいと思う。

Remark 3.8. (1) 上の双対性は直感的には当たり前の式なのであるが、$\widehat{\mathfrak{p}}, \widehat{\mathfrak{q}}$ を構成する際の摂動の取り方がそれぞれで異なるのでそれらをつなげる議論が必要となる。

(2) X が Liouville 多様体（特に非コンパクト）の場合に S. Ganatra は同様の双対性を示した [Ga]。我々の場合は X がコンパクトなので、$QH^*(X)$ 上に Poincaré pairing があり (1) の摂動の問題をクリアすれば後は容易であるのに対し、彼の場合は非コンパクトゆえその部分は易しくない。(量子コホモロジーの代わりにシンプレクティックコホモロジー $SH^*(X)$ を考える。一方、彼の場合は、Liouville 多様体内の完全なラグランジアン部分多様体を扱っており bubble が起こらずにその点は我々に比べて易しい。)

3.4. **Trace map.** 深谷圏 $\mathcal{L}$ の射の空間 $CF(i,j)$ に次により内積を入れる。

$$\langle \cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{L}} := \begin{cases} \pm\langle \cdot,\cdot\rangle_{PD_L} & \text{if } L_i = L_j \\ \pm 1 & \text{if } p_i, p_j \in L_i \cap L_j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

いま、$\mathcal{L}, \mathcal{U}$ ($\mathcal{L} = \mathcal{U}$ も可) をシンプレクティック多様体 X のラグランジアン部分多様体のなす深谷圏とし、$\mathcal{L} \cup \mathcal{U}$ の対象のラグランジアン部分多様体は互いに横断的に交わると仮定する。このとき、$\mathcal{L} \cup \mathcal{U}$ にも A_∞ 圏の構造と内積が入る。

Definition 3.9. [AFOOO1][FOOO10] Λ 双線形写像

$$Z \ : \ CH_*(\mathcal{L}) \times CH_*(\mathcal{U}) \to \Lambda$$

を $\mathbf{x} \in CH_*(\mathcal{L})$, $\mathbf{y} \in CH_*(\mathcal{U})$ に対し、

$$Z(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{c_1,c_2} \sum_{f_1,f_2} \pm \langle \mathfrak{m}(\mathbf{x}^{(2;1)}_{c_1}, f_1^\vee, \mathbf{y}^{(2;2)}_{c_2}), f_2^\vee \rangle \langle \mathfrak{m}(\mathbf{y}^{(2;1)}_{c_2}, f_1, \mathbf{x}^{(2;2)}_{c_1}), f_2 \rangle \tag{3.9}$$

と定める。ここで $\sum_{f_1,f_2}$ は $f_1 \in U_{\upsilon(c_2;2)} \cap L_{\kappa(c_1;1)}, f_2 \in L_{\kappa(c_1;2)} \cap U_{\upsilon(c_2;1)}$ なる f_1, f_2 をわたる。ただし、$\kappa(c_1;1)$, $\kappa(c_1;2)$, $\upsilon(c_2;1)$, $\upsilon(c_2;2)$ は

$$\mathbf{x}^{(2;1)}_{c_1} = x_1^{c_1} \otimes \cdots \otimes x^{c_1}_{a(c_1)}, \quad \mathbf{y}^{(2;1)}_{c_2} = y_1^{c_2} \otimes \cdots \otimes y^{c_2}_{b(c_2)}$$

と表したとき、

$$x_1^{c_1} \in CF(L_{\kappa(c_1;1)}, L_{\kappa'}), \quad x^{c_1}_{a(c_1)} \in CF(L_{\kappa''}, L_{\kappa(c_1;2)}),$$
$$y_1^{c_2} \in CF(U_{\upsilon(c_2;1)}, U_{\upsilon'}), \quad y^{c_2}_{b(c_2)} \in CF(U_{\upsilon''}, U_{\upsilon(c_2;2)})$$

となるような対象の添字である。また、$f_1 \in U_{\upsilon(c_2;2)} \cap L_{\kappa(c_1;1)}$ のとき $f_1^\vee$ は点として f_1 と同じであるが $f_1^\vee \in L_{\kappa(c_1;1)} \cap U_{\upsilon(c_2;2)}$ とみている。右辺の内積は $\mathcal{L} \cup \mathcal{U}$ 上の内積 $\langle \cdot,\cdot \rangle_{\mathcal{L}\cup\mathcal{U}}$ を表す。

このとき、直接計算により次がわかる。

Lemma-Definition 3.10. $\mathbf{x} \in CH_*(\mathcal{L})$, $\mathbf{y} \in CH_*(\mathcal{U})$ に対し、

$$Z(\delta_H \mathbf{x}, \mathbf{y}) + \pm Z(\mathbf{x}, \delta \mathbf{y}) = 0$$

が成り立つ。よって

$$Z \ : \ HH_*(\mathcal{L}) \times HH_*(\mathcal{U}) \to \Lambda$$

を引き起こす。これを **Trace map** とよぶ。

Theorem 3.11. [AFOOO1][FOOO10] 任意の $\mathbf{x} \in HH_*(\mathcal{L})$, $\mathbf{y} \in HH_*(\mathcal{U})$ に対し、

$$Z(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \langle \widehat{\mathfrak{p}}_{\mathcal{L}}(\mathbf{x}), \widehat{\mathfrak{p}}_{\mathcal{U}}(\mathbf{y}) \rangle_{PD_X} \tag{3.10}$$

が成り立つ。この等式はしばしば **Cardy relation** と呼ばれる。ここで $\widehat{\mathfrak{p}}_{\mathcal{L}}, \widehat{\mathfrak{p}}_{\mathcal{U}}$ は $\mathcal{L}, \mathcal{U}$ における $\widehat{\mathfrak{p}}$ 写像を表す。

双対性 Proposition 3.7 を用いると

$$Z(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \langle \widehat{\mathfrak{q}}_{\mathcal{U}} \circ \widehat{\mathfrak{p}}_{\mathcal{L}}(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle_{HH(\mathcal{U})}. \tag{3.11}$$

Theorem 3.11 の証明には、**アニュラスからの安定写像**のモジュライ空間を用いる。アニュラスからの安定写像のモジュライを使った議論は、既に [Ab], [FOOO10] にある。

Remark 3.12. (1) [FOOO10, Definition 1.3.22] では A_∞ 代数の場合（深谷圏で対象が一つの場合）に Trace map を導入した。深谷圏への一般化は直接的である。性質 (3.10) は [FOOO10, Theorem 3.4.1. Proposition 3.5.2, Remark 3.10.18 もみよ] に相当し、これはコンパクトトーリック多様体の場合に小平スペンサー写像[19]

$$ks \ : \ QH^*(X) \to \mathrm{Jac}(\mathfrak{PO}_X)$$

が $QH^*(X)$ および $\mathrm{Jac}(\mathfrak{PO}_X)$ 上の内積を保つという重要な結果を導き [FOOO10, Chapter 3]、Remark 2.8 (3) で述べたフロベニウス多様体構造の同型を示すキーとなる。

(2) D. Shklyarov は独立に、proper smooth dg 圏に対して Trace map を構成した [Shk]。N. Sheridan はそれを A_∞ 圏の場合に直接的に一般化している [Sh]。

4. Generation critera

M. Abouzaid は [Ab] において、X が Liouville 多様体で完全ラグランジアン部分多様体のなす深谷圏について、その生成元の判定条件を与えた。この場合は Remark 3.8 (2) でも触れたように、バブルが起こらずそれにともなうモジュライ空間の解析は容易になる。ここでは、これまでの我々の結果を用いて、一般のコンパクトシンプレクティック多様体 X と完全とは限らないコンパクトラグランジアン部分多様体のなす深谷圏の場合に判定条件を与える。

X をコンパクトシンプレクティック多様体とし、そのある有限個の weakly unobstructed かつ互いに横断的に交わるラグランジアン部分多様体の族 $\{L_i\}$ とその weak Maurer-Cartan 元 $\{b_i\}$ の対の集合 $\mathbf{L} = \{(L_i, b_i)\}$ から Theorem 3.1 により得られる深谷圏を $\mathcal{L}$ とする。$1_X \in QH^0(X)$ を量子コホモロジー環の単位元とする。1_X は X の基本類のポアンカレ双対である。

Theorem 4.1. [AFOOO1] 上の状況で、深谷圏 $\mathcal{L}$ は条件

$$1_X \in \mathrm{Image}\ (\widehat{\mathfrak{p}} \ : HH_*(\mathcal{L}) \to QH^*(X)) \tag{4.1}$$

をみたしていると仮定する。このとき、任意の（別の）*weakly unobstructed* なラグランジアン部分多様体 U とその *weak Maurer-Cartan* 元 b_U で $HF((U,b_U);\Lambda) \neq 0$ をみたすものに対し、$(L,b) \in \mathbf{L}$ が存在し、

$$\mathfrak{PO}_L(b) = \mathfrak{PO}_U(b_U)$$

が成り立つ。

証明には、Subsection 3.4 で導入した Trace map Z を用い、Theorem 3.11 が本質的に用いられる。

さて、$\lambda := \mathfrak{PO}_L(b) = \mathfrak{PO}_U(b_U)$ とおく。

$$\mathbf{L}_\lambda := \{(L,b) \in \mathbf{L} \mid \mathfrak{PO}_L(b) = \lambda\}$$

とおき、$\mathbf{L}_\lambda$ がなす $\mathcal{L}$ の A_∞ 部分圏を $\mathcal{L}_\lambda \subset \mathcal{L}$ とする。また、

$$\mathcal{U}_\lambda = \mathcal{L}_\lambda \cup \{(U, b_U)\}$$

[19] [FOOO10, Theorem 1.1.1] より ks は環同型写像。

とおくと Theorem 4.1 より包含写像が引き起こす自然な関手

$$I_\lambda \,:\, \mathfrak{L}_\lambda \longrightarrow \mathfrak{U}_\lambda$$

が存在する。このとき、

Theorem 4.2. [AFOOO1] I_λ は次の導来圏の同値を引き起こす[20]:

$$I_\lambda \;:\; D^\pi(\mathfrak{L}_\lambda) \xrightarrow{\sim} D^\pi(\mathfrak{U}_\lambda). \tag{4.2}$$

すなわち、$\mathfrak{PO}_L(b)$ の値が λ である対象のなす導来圏の中では、新たな対象 (U, b_U) は不要であり、条件 (4.1) をみたす深谷圏 $\mathfrak{L}_\lambda$ があれば十分ということである。その意味で条件 (4.1) は深谷圏の生成を意味する条件を与える。条件 (4.1) は更に次の条件と同値である。

Theorem 4.3. [AFOOO1] 条件 (4.1) は次の (1) または (2) と同値。

(1) $\widehat{\mathfrak{p}}$ は全単射
(2) $\widehat{\mathfrak{q}}$ は全単射。

すなわち、条件 (4.1) をみたす深谷圏 $\mathfrak{L}$ は、シンプレクティック多様体 X の量子コホモロジーの情報をすべてもっているということになる。従って、次が基本問題となる。

Problem 4.4. シンプレクティック多様体 X が与えられたとき、条件 (4.1) をみたす深谷圏 $\mathfrak{L}$ を見つけよ。

次節では X が射影的なトーリック多様体の場合にその例をあげる。

5. Example

X を射影的なトーリック多様体とし、以下 Section 2 の記号をそのまま用いる。(2.1) で定義した $\mathrm{Crit}(\mathfrak{PO}_X)$ を用いて

$$\mathfrak{L} := \{(L(u), \vec{y}) \mid \vec{y} \in \mathrm{Crit}(\mathfrak{PO}_X)\} \tag{5.1}$$

とおく。Theorem 2.5 より、任意の $(L(u), \vec{y}) \in \mathfrak{L}$ に対し、$HF((L(u), \vec{y}); \Lambda) \neq 0$ であることに注意。このとき、

Theorem 5.1. [AFOOO2] $\mathfrak{L}$ は条件 (4.1) をみたす。特に、$\mathfrak{L}$ は X の深谷圏（の導来圏）を生成する。

Proof. 写像 $\mathcal{I} \,:\, HH^*(\mathfrak{L}) \to \mathrm{Jac}(\mathfrak{PO}_X)$ を構成し、可換図式

$$\begin{tikzcd} QH^*(X) \arrow[r, "\widehat{\mathfrak{q}}"] \arrow[dr, "ks"'] & HH^*(\mathfrak{L}) \arrow[d, "\mathcal{I}"] \\ & \mathrm{Jac}(\mathfrak{PO}_X) \end{tikzcd}$$

を得る。Theorem 2.7 より小平-スペンサー写像 ks は同型ゆえ、$\widehat{\mathfrak{q}}$ は単射。双対性 Proposition 3.7 より $\widehat{\mathfrak{q}}$ は全射。 $\square$

---

[20] A_∞ 圏の twisted complex から三角圏を作り（シフト、射の錐を繰り返して得られるものを加える)、その後ベキ単完備化をとったものを D^π と書く。ホモロジー的ミラー対称性予想を考える際に必要。例えば [Sei] を参照。

Example 5.2. (Example 2.6 の続き) $X = \mathbb{C}P^n$ のとき、$\mathfrak{PO}_{\mathbb{C}P^n}(y_1, \ldots, y_n)$ の臨界点は、ζ_{n+1} を 1 の原始 $(n+1)$ 乗根として

$$\vec{y}_k = (\zeta_{n+1}^k T^{\frac{1}{n+1}}, \ldots, \zeta_{n+1}^k T^{\frac{1}{n+1}}), \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

で与えられた。

$$\mathcal{L} = \left\{ \left(L\left(\frac{1}{n+1}, \cdots, \frac{1}{n+1}\right), \vec{y}_k \right) \;\middle|\; k = 0, 1, \ldots, n \right\}$$

とおくと、これが $\mathbb{C}P^n$ の深谷圏の生成元を与える[21]。このとき、$\mathfrak{PO}_{\mathbb{C}P^n}$ は Morse で

$$\mathfrak{PO}_{\mathbb{C}P^n}(\vec{y}_k) = (n+1)\zeta_{n+1}^k T^{\frac{1}{n+1}}$$

ゆえ、$(n+1)$ 個の臨界値は互いに異なる。また、C-H.Cho[Ch] の結果により、Floer cohomology $HF\left(\left(L\left(\frac{1}{n+1}, \ldots, \frac{1}{n+1}\right), \vec{y}_k\right)\right)$ は $\mathfrak{PO}_{\mathbb{C}P^n}$ のヘッシアンに associate した Clifford 代数と同型になる。C. Kassel[Ka] の結果（の A_∞ 版）によれば、Clifford 代数の Hochschild cohomology は 1 次元になる。よって $\mathcal{L}$ の Hochschild cohomology は 1 次元の直和に分解し

$$HH^*(\mathcal{L}) \cong \Lambda^{\oplus(n+1)}.$$

一方、$\mathbb{C}P^n$ の量子コホモロジー環は半単純で

$$QH^*(\mathbb{C}P^n) \cong \Lambda[y]/(y^{n+1} = T) \cong \Lambda^{\oplus(n+1)}$$

と直和分解することが知られている。よって、この場合は直接計算によっても同型

$$QH^*(\mathbb{C}P^n) \cong HH^*(\mathcal{L}) \cong \Lambda^{\oplus(n+1)}$$

を確認することができる。

References

[Ab] M. Abouzaid, *A geometric criterion for generating the Fukaya category*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. No. 112 (2010), 191–240.

[AFOOO1] M. Abouzaid, K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Quantum cohomology and split generation in Lagrangian Floer theory*, in preparation.

[AFOOO2] M. Abouzaid, K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Homological mirror symmetry for compact toric manifolds*, in preparation.

[Ch] C.-H. Cho, *Holomorphic disks, spin structures and the Floer cohomology of the Clifford torus*, Internat. Math. Res. Notices 35 (2004), 1803-1843.

[CO] C.-H. Cho and Y.-G. Oh, *Floer cohomology and disc instantons of Lagrangian torus fibers in Fano toric manifolds*, Asian J. Math. 10 (2006), 773–814.

[EL] J. D. Evans and Y. Lekili, *Floer cohomology of the Chiang Lagrangian*, Selecta Math. New Series 21, (2015), 1361–1404.

[Fu1] K. Fukaya, Morse homotopy, A^∞-categories, and Floer homologies, Proc. of the 1993 Garc Workshop on Geometry and Topology ed. by H. J. Kim, Lecture Notes series 18, Seoul Nat. Univ. (1993), 1–102.

[Fu2] K. Fukaya, *Cyclic symmetry and adic convergence in Lagrangian Floer theory*, Kyoto J. Math. 50 (2010), no. 3, 521–590.

[FOOO1] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Lagrangian intersection Floer theory-anomaly and obstruction,* Kyoto University preprint, 2000.

[FOOO2] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Lagrangian intersection Floer theory-anomaly and obstruction,* expanded version of [FOOO1], 2006 & 2007.

[21]他の生成元もありうる。例えば [EL] では $\mathbb{C}P^3$ の R. Chiang のラグランジアン部分多様体（とその上の 4 種の局所系を組にしたもの）が、有限体 $\mathbb{F}_5$ 上で生成元となることを示している。因に我々の $\left(L\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), \vec{y}_k\right)$ も $\mathbb{F}_5$ 上生成している。

[FOOO3] [22] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Lagrangian intersection Floer theory-anomaly and obstruction, Part I,* AMS/IP Studies in Advanced Math. vol. 46.1, International Press/ Amer. Math. Soc. (2009). MR2553465.

[FOOO4] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Lagrangian intersection Floer theory-anomaly and obstruction, Part II,* AMS/IP Studies in Advanced Math. vol. 46.2, International Press/ Amer. Math. Soc. (2009). MR2548482.

[FOOO5] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Canonical models of filtered A_∞-algebras and Morse complexes,* in 'New perspectives and challenges in symplectic field theory', 201–227, CRM Proc. Lecture Notes, 49, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2009).

[FOOO6] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Lagrangian Floer theory on compact toric manifolds I*, Duke Math. J. 151, (2010), no.1, 23–174.

[FOOO7] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Lagrangian Floer theory on compact toric manifolds II: bulk deformations*, Selecta Math. New Series 17, (2011), 609–711.

[FOOO8] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Anti-symplectic involution and Floer cohomology*, arXiv:0912.2646. To appear in Geometry and Topology.

[FOOO9] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Toric degeneration and non-displaceable Lagrangian tori in $S^2 \times S^2$*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2012), no. 13, 2942-2993.

[FOOO10] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Floer theory and mirror symmetry on compact toric manifolds*, Astérisque 376, (2016). arXiv:1009.1648.

[FOOO11] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Lagrangian Floer theory on compact toric manifolds: survey*, Surveys in Differential Geometry XVII (2012) 229–298.

[FOOO12] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Displacement of polydisks and Lagrangian Floer theory*, J. Symplectic Geom. 11 (2013), no 2, 231–268.

[FOOO13] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Lagrangian Floer theory over integers: spherically positive symplectic manifolds*, Pure and Applied Math. Quarterly 9, No 2, (Special Issue: In Honor of Dennis Sullivan), 189–289 (2013).

[FOOO14] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Spectral invariants with bulk, quasimorphisms and Lagrangian Floer theory*, submitted, arXiv:1105.5123.

[FOOO15] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Technical details on Kuranishi structure and virtual fundamental chain*, arXiv:1209.4410.

[FOOO16] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Shrinking good coordinate systems associated to Kuranishi structures*, arXiv:1405.1755. To appear in J. Symplectic Geom.

[FOOO17] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Kuranishi structure, Pseudo-holomorphic curve, and virtual fundamental chain: Part I*, arXiv:1503.0763.

[FOOO18] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Exponential decay estimates and smoothness of the moduli space of pseudoholomorphic curves*, submitted, arXiv:1603.07026.

[FOOO19] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Kuranishi structure, Pseudo-holomorphic curve, and virtual fundamental chain: Part II*, In preparation.

[Ga] S. Ganatra, *Symplectic cohomology and duality for the wrapped Fukaya category*, ArXiv1304.7312.

[Ka] T.V. Kadeišvili, *The algebraic structure in the homology of an A_∞-algebra,* Soobshch. Akad. Nauk Gruzin. SSR 108, (1982). 249–252.

[Ka] C. Kassel, *A Künneth formula for the cyclic cohomology of $\mathbb{Z}_2$-graded algebras*, Math. Ann. 275, 683–699 (1986).

[KS] M. Kontsevich and Y. Soibelman, *Homological mirror symmetry and torus fibrations*, in 'Symplectic Geometry and Mirror Symmetry' ed. by K. Fukaya et all. World Sci. Publishing, (2001). 203–263.

[Sa] K. Saito, *Period mapping associated to a primitive form*, Publ. R.I.M.S. 19 (1983), 1231 - 1261.

[Sei] P. Seidel, *Fukaya categories and Picard-Lefschetz theory*, Zurich Lectures in Advanced Mathematics. European Mathematical Society, (2008).

[Sh] N. Sheridan, *Formulae in noncommutative Hodge theory*, ArXiv1510.03795.

[Shk] D. Shklyarov, *Matrix factorizations and higher residue pairings*, ArXiv1306.4878.

[22] 2016 年に再版されるらしい。