ポリヘドラルプロダクトのホモトピー論

岸本　大祐　(京都大学)*

1. はじめに

ポリヘドラルプロダクトは,（抽象）単体複体によって定まる直積空間の部分空間たちの和集合として与えられる空間である．この構成は，ウェッジやジョインなど，ホモトピー論において基本的な空間の構成法を組み合わせ的に拡張したものであり，その雛形は古くに現れていた．([27, 1] 参照）単体複体を用いた現在の定式化は，Davis-Januszkiewicz [8] による擬トーラス多様体に関する仕事において，モーメントアングル複体とDavis-Januszkiewicz 空間と呼ばれる単体複体により定まる空間が導入された後，それらの一般化としてBahri-Bendersky-Cohen-Gitler [2] により与えられた．

定義より，ポリヘドラルプロダクトのトポロジーは，単体複体の組み合わせ情報により支配されるため，そのホモトピー不変量は単体複体の組み合わせ不変量を与える．特に，あるポリヘドラルプロダクトのコホモロジーは，単体複体のStanley-Reisner環やその導来代数と同型であることが知られており（[8, 3] 参照），Stanley-Reisner環の情報をもとに，ポリヘドラルプロダクトのホモトピー型を決定するという研究が行われてきた．([2, 16, 17, 13, 15] 参照）また，最近では，Kätthanの仕事 [25] に見られるように，ポリヘドラルプロダクトに関する結果を，単体複体の組み合わせ論へと拡張することも行なわれており，ポリヘドラルプロダクトのホモトピー論と組み合わせ論との相互作用は，より興味深い展開を見せている．

2013年のトポロジーシンポジウムにおいて入江幸右衛門氏（大阪府立大学）がポリヘドラルプロダクトの分解について講演された後，いくつか重要な進展があったので，本講演ではこの進展を中心に，以下の項目について解説する：(i) ポリヘドラルプロダクトとStanley-Reisner環，(ii) ファットウェッジフィルトレーションとホモトピー分解，(iii) Golod性とsequentially Cohen-Macaulay性，(iv) 今後の課題．ポリヘドラルプロダクトにはトーリックトポロジーとのつながりという重要な側面があるが，今回はそれに関して具体的には触れないことにする．本講演の内容は入江幸右衛門氏との共同研究にもとづいている．

2. ポリヘドラルプロダクトとStanley-Reisner環

2.1. ポリヘドラルプロダクトの定義

まず，ポリヘドラルプロダクトを定義しよう．以下，K を頂点集合が $[m]=\{1,\ldots,m\}$ である（抽象）単体複体とし，$(\underline{X},\underline{A})$ を空間対の族 $\{(X_i,A_i)\}_{i\in[m]}$ とする．部分集合 $\sigma\subset[m]$ に対して，$X_1\times\cdots\times X_m$ の部分空間

$$D(\sigma)=Y_1\times\cdots\times Y_m,\quad Y_i=X_i\ (i\in\sigma),\ A_i\ (i\notin\sigma)$$

を対応させることで，単体複体 K は部分空間配置を定める．(実際は K の極大面だけで定まるが，K を考えるほうが便利である．）その和としてポリヘドラルプロダクトは定

2010 Mathematics Subject Classification: 55P15, 05E45, 52B22
キーワード：polyhedral product, moment-angle complex, Stanley-Reisner ring, Golodness
* 〒606-8502 京都府京都市左京区北白川追分町　京都大学 大学院理学研究科
e-mail: kishi@math.kyoto-u.ac.jp
web: https://www.math.kyoto-u.ac.jp/~kishi/

義される：

$$\mathcal{Z}_K(\underline{X}, \underline{A}) = \bigcup_{\sigma \in K} D(\sigma)$$

特に重要なポリヘドラルプロダクトは，$\mathcal{Z}_K(C\underline{X}, \underline{X})$，$\mathcal{Z}_K(\underline{X}, *)$ であり，本講演では $\mathcal{Z}_K(C\underline{X}, \underline{X})$ を扱う．

例 2.1 任意の i で $(X_i, A_i) = (\mathbb{R}, 0)$ のとき，部分空間配置 $\{D(\sigma)\}_{\sigma \in K}$ を K が定める座標空間配置という．定義より，その和は $\mathcal{Z}_K(\mathbb{R}, 0)$ である．K の Alexander 双対を

$$K^\vee = \{\tau \subset [m] \,|\, [m] - \tau \notin K\}$$

で定めると，K が定める座標空間配置の補空間は $\mathcal{Z}_{K^\vee}(\mathbb{R}, \mathbb{R}-0) \simeq \mathcal{Z}_{K^\vee}(D^1, S^0)$ となる．この部分空間配置の複素化を考えると，その補空間は $\mathcal{Z}_{K^\vee}(\mathbb{C}, \mathbb{C}-0) \simeq \mathcal{Z}_{K^\vee}(D^2, S^1)$ である．ポリヘドラルプロダクト $\mathcal{Z}_K(D^2, S^1), \mathcal{Z}_K(D^1, S^0)$ は特に重要であり，それぞれモーメントアングル複体，実モーメントアングル複体と呼ばれ，$\mathcal{Z}_K, \mathbb{R}\mathcal{Z}_K$ で表される．

例 2.2 射影 $(CX_i, X_i) \to (\Sigma X_i, *)$ は写像

$$\mathcal{Z}_K(C\underline{X}, \underline{X}) \to \mathcal{Z}_K(\Sigma \underline{X}, *) \tag{1}$$

を誘導する．$K = \partial \Delta^{[m]}$ のときを考える．ここで，$\Delta^{[m]}$ は頂点集合を $[m]$ とする単体である．$m = 2$ のとき，この写像は Whitehead 積 $X_1 * X_2 \to \Sigma X_1 \vee \Sigma X_2$ であり，$m > 2$ のとき，Porter [27] はこの写像を高次 Whitehead 積と呼んだ．したがって，一般の K に対して，写像 (1) は高次 Whitehead 積の一般化と考えられる．

ポリヘドラルプロダクトは $\mathcal{Z}_K(C\underline{X}, \underline{X})$，$\mathcal{Z}_K(\underline{X}, *)$ は次のホモトピーファイブレーションにより，相互補完的に結びつけられている．

$$\mathcal{Z}_K(C\Omega\underline{X}, \Omega\underline{X}) \to \mathcal{Z}_K(\underline{X}, *) \xrightarrow{\text{incl}} X_1 \times \cdots \times X_m \tag{2}$$

また，ファイバーの包含写像は (1) において $\underline{X}$ を $\Omega\underline{X}$ に置き換えたものを経由する．

2.2. Stanley-Reisner 環

単体複体 K の可換環 R 上の Stanley-Reisner 環は

$$R[K] = R[v_1, \ldots, v_m]/(v_{i_1} \cdots v_{i_k} \,|\, \{i_1, \ldots, i_k\} \notin K)$$

により定義される．便宜上，v_i の次数は 2 とする．定義より次の同型をただちに得る．

$$H^*(\mathcal{Z}_K(BS^1, *); R) \cong R[K] \tag{3}$$

したがって，$\mathcal{Z}_K(BS^1, *)$ と関係する空間によって，$R[K]$ の導来代数を実現できる．例えば，$R[K]$ のコホモロジーは $\Omega\mathcal{Z}_K(BS^1, *)$ のコホモロジーと同型である．本講演で重要なのは次の同型である．

命題 2.3 (Baskakov-Buchstaber-Panov [3]) 次の環同型が存在する．

$$H^*(\mathcal{Z}_K; R) \cong \mathrm{Tor}^*_{R[v_1, \ldots, v_m]}(R[K], R)$$

ただし，右辺の積は Koszul 分解から誘導される．

この同型は，チェインレベルでの同型を具体的に記述することで，Baskakov-Buchstaber-Panov [3] により得られたが，ホモトピーファイブレーション (2) の Eilenberg-Moore スペクトル系列に同型 (3) を代入することでも理解出来る．同型 (3) と命題 2.3 の同型を通してポリヘドラルプロダクトの性質を類推し，証明する，もしくは，ポリヘドラルプロダクトの性質を単体複体の組み合わせ論へと還元するのが本研究の大きな目的である．

注 2.4 ポリヘドラルプロダクトは Stanley-Reisner 環だけではなく，群のグラフ積を基本群で実現する．例えば，グラフ Γ に対して，$\mathcal{Z}_\Gamma(B\mathbb{Z}/2,*)$ の基本群は right-angled Coxeter 群と同型であり，ホモトピーファイブレーション (2) により，$\mathbb{R}\mathcal{Z}_\Gamma$ の基本群はその交換子群と同型であることがわかる．このつながりに焦点をあてたポリヘドラルプロダクトの研究も興味深い．([10, 9, 29, 30] 参照)

3. ファットウェッジフィルトレーションとホモトピー分解

3.1. BBCG 分解

Hochster は加群同型

$$\mathrm{Tor}^*_{R[v_1,\dots,v_m]}(R[K],R)\cong\bigoplus_{I\subset[m]}\widetilde{H}^*(K_I;R)$$

を示した．ただし， $K_I=\{\sigma\in K\,|\,\sigma\subset I\}$．(Hochster はさらに，環構造もこの同型を通して組み合わせ的に記述している.) この同型を実現するポリヘドラルプロダクトの性質が知られており，それが次の BBCG 分解である．

定理 3.1 (Bahri-Bendersky-Cohen-Gitler [2]) 次のホモトピー同値が存在する．

$$\Sigma\mathcal{Z}_K(C\underline{X},\underline{X})\simeq\Sigma\bigvee_{\emptyset\neq I\subset[m]}|\Sigma K_I|\wedge\widehat{X}^I$$

ただし，$\widehat{X}^I=\bigwedge_{i\in I}X_i$ である．

注 3.2 BBCG 分解には酷似した先行結果 [23, 24] がある．また，これらの結果は [18] により，一般化されている．

次の問題を考えよう．

問題 3.3 BBCG 分解にもとづいて，ポリヘドラルプロダクトのホモトピー型を記述せよ．

最も安直なアプローチは,「BBCG 分解のサスペンションをはずす」というものであり，これを出発点として，ポリヘドラルプロダクトのホモトピー論は発展してきた．もちろん，任意の単体複体に対してサスペンションははずせないので，はずせる可能性のある単体複体を見つける必要がある．その際に利用されるのが，単体複体の Golod 性という組み合わせ代数構造であり，これに関しては次節で述べる．今までにいくつかの Golod 性をもつ単体複体のクラスに対して，サスペンションははずされてきたが（[13, 16, 15] 参照），それぞれアドホックな手法で行われており，ポリヘドラルプロダクトの本質的な性質を理解するまでには至っていなかった．さらに，Bahri-Bendersky-Cohen-Gitler

によるBBCG分解の証明は，ポリヘドラルプロダクトをサスペンションすることで得られる性質にもとづいているため，(サスペンション抜きの）ポリヘドラルプロダクト自体の構造とBBCG分解のつながりが明確ではない．よって，次の問題を考えよう．

問題 3.4 BBCG分解を誘導するポリヘドラルプロダクトの構造を発見し，調べよ．

3.2. ファットウェッジフィルトレーション

空間族$\underline{X} = \{X_i\}_{i\in[m]}$に対して$k$次ファットウェッジは

$$T^k(\underline{X}) = \{(x_1, \dots, x_m) \in X_1 \times \cdots \times X_m \,|\, x_i \text{のうち}\, m-k\, \text{個は基点}\}$$

で定められる，直積空間$X_1 \times \cdots \times X_m$の部分空間であり，フィルトレーション

$$* = T^0(\underline{X}) \subset T^1(\underline{X}) \subset \cdots \subset T^{m-1}(\underline{X}) \subset T^m(\underline{X}) = X_1 \times \cdots \times X_m$$

を与える．このフィルトレーションはサスペンションすると分裂し，直積空間の標準的な分解を与える：

$$\Sigma(X_1 \times \cdots \times X_m) = \Sigma \bigvee_{i=1}^{m} T^i(\underline{X})/T^{i-1}(\underline{X}), \quad T^i(\underline{X})/T^{i-1}(\underline{X}) = \bigvee_{I\subset[m],\,|I|=i} \widehat{X}^I.$$

([21, 19] 参照）この分解がBBCG分解の根底にあるので，次のフィルトレーションを導入する．

定義 3.5 $\mathcal{Z}_K^i(C\underline{X}, \underline{X}) = \mathcal{Z}_K(C\underline{X}, \underline{X}) \cap T^i(C\underline{X})$とするとき，フィルトレーション

$$* = \mathcal{Z}_K^0(C\underline{X}, \underline{X}) \subset \mathcal{Z}_K^1(C\underline{X}, \underline{X}) \subset \cdots \subset \mathcal{Z}_K^m(C\underline{X}, \underline{X}) = \mathcal{Z}_K(C\underline{X}, \underline{X})$$

を$\mathcal{Z}_K(C\underline{X}, \underline{X})$のファットウェッジフィルトレーション（FWF）という．

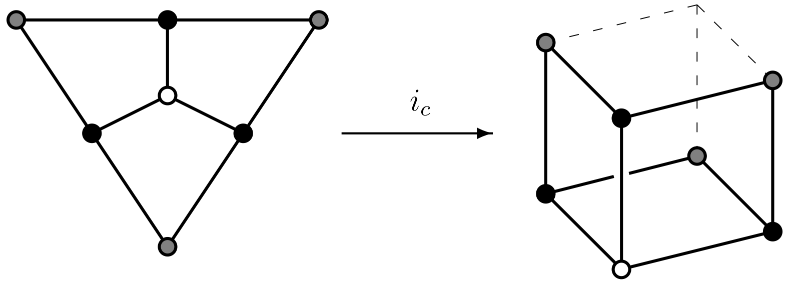
FWFの構造を明らかにする上で，$\mathcal{Z}_K(C\underline{X}, \underline{X})$のコーンパラメータを抜き出したポリヘドラルプロダクト$\mathbb{R}\mathcal{Z}_K$（$= \mathcal{Z}_K(D^1, S^0)$）が重要な役割を果たす．$\mathbb{R}\mathcal{Z}_K^i = \mathcal{Z}_K^i(D^1, S^0)$とする．部分集合$\sigma \subset [m]$に対して，立方体$(D^1)^m$の頂点

$$v_\sigma = \{(x_1, \dots, x_m) \in (D^1)^m \,|\, x_i = -1\ (i \in \sigma), +1\ (i \notin \sigma)\}$$

を対応させることで，単体$\Delta^{[m]}$の重心細分を立方体$(D^1)^m$に区分線形的に埋め込むことができる：

$$i_c \colon |\mathrm{Sd}\,\Delta^{[m]}| \to (D^1)^m, \quad \sigma \mapsto v_\sigma.$$

この埋め込みは，$m = 3$のときは次のように描くことができる．



さらに，この埋め込みは，次の埋め込みへ拡張される：

$$\mathrm{Cone}(i_c)\colon |\mathrm{Cone}(\mathrm{Sd}\,\Delta^{[m]})| \to (D^1)^m$$

したがって，$\mathrm{Sd}\,K, \mathrm{Cone}(\mathrm{Sd}\,K)$ はそれぞれ $\mathrm{Sd}\,\Delta^{[m]}, \mathrm{Cone}(\mathrm{Sd}\,\Delta^{[m]})$ の部分複体なので，埋め込み

$$i_c\colon |\mathrm{Sd}\,K| \to (D^1)^m, \quad \mathrm{Cone}(i_c)\colon |\mathrm{Cone}(\mathrm{Sd}\,K)| \to (D^1)^m \tag{4}$$

を得る．この埋め込みを詳しく調べると次がわかる．

補題 3.6 (Iriye-Kishimoto [17]) 埋め込み (4) は対の同相

$$(|\mathrm{Cone}(\mathrm{Sd}\,K)|, |\mathrm{Sd}\,K|) \to (\mathbb{R}\mathcal{Z}_K, \mathbb{R}\mathcal{Z}_K^{m-1})$$

を与える．

上で与えられた写像 $|\mathrm{Sd}\,K| \to \mathbb{R}\mathcal{Z}_K^{m-1}$ を φ_K と書く．ここで重要なのは，φ_K は埋め込み i_c の制限なので，組み合わせ的かつ明示的に与えられているということである．定義より，$\mathbb{R}\mathcal{Z}_K^i = \bigcup_{I\subset[m],\,|I|=i} \mathbb{R}\mathcal{Z}_{K_I}$ なので，次がすぐにわかる．

定理 3.7 (Iriye-Kishimoto [17]) $\mathbb{R}\mathcal{Z}_K^i$ は写像

$$\varphi_{K_I}\colon |\mathrm{Sd}\,K_I| \to \mathbb{R}\mathcal{Z}_{K_I}^{i-1}$$

で $\mathbb{R}\mathcal{Z}_K^{i-1}$ $(\supset \mathbb{R}\mathcal{Z}_{K_I}^{i-1})$ にコーンをはって得られる．ただし，$I \subset [m]$ は $|I| = i$ をみたすものすべてをはしる．特に，$\mathbb{R}\mathcal{Z}_K$ の FWF はコーン分解である．

ここで，一般の $\mathcal{Z}_K(C\underline{X}, \underline{X})$ にもどろう．$\mathbb{R}\mathcal{Z}_K$ を $\mathcal{Z}_K(C\underline{X}, \underline{X})$ のコーンパラメータの空間だとみなすことで，写像

$$\mathbb{R}\mathcal{Z}_K \times X_1 \times \cdots \times X_m \to \mathcal{Z}_K(C\underline{X}, \underline{X})$$

がつくれ，対の同相写像

$$(\mathbb{R}\mathcal{Z}_K, \mathbb{R}\mathcal{Z}_K^{m-1}) \times (X_1 \times \cdots \times X_m, T^{m-1}(\underline{X})) \to (\mathcal{Z}_K(C\underline{X}, \underline{X}), \mathcal{Z}_K^{m-1}(C\underline{X}, \underline{X}))$$

を誘導することがわかる．よって，$\mathcal{Z}_K^i(C\underline{X}, \underline{X}) = \bigcup_{I\subset[m],\,|I|=i} \mathcal{Z}_{K_I}(C\underline{X}_I, \underline{X}_I)$ なので，定理 3.7 から次がわかる．ここで，$\underline{X}_I = \{X_i\}_{i\in I}$ である．

定理 3.8 (Iriye-Kishimoto [17]) 対の同相写像

$$\coprod_{\substack{I\subset[m]\\|I|=i}} \Phi_{K_I}\colon \coprod_{\substack{I\subset[m]\\|I|=i}} (|\mathrm{Cone}(\mathrm{Sd}\,K_I)|, |\mathrm{Sd}\,K_I|) \times (\underline{X}^I, T^{i-1}(\underline{X}_I)) \to (\mathcal{Z}_K^i(C\underline{X}, \underline{X}), \mathcal{Z}_K^{i-1}(C\underline{X}, \underline{X}))$$

が存在する．ただし，$\underline{X}^I = \prod_{i\in I} X_i$ である．特に，$\mathcal{Z}_K(C\underline{X}, \underline{X})$ の FWF は Fox [11] の意味でカテゴリー列である．

上記の通り，φ_{K_I} は組み合わせ的かつ明示的に与えられている．今，Φ_{K_I} は φ_{K_I} を用いて定められるので，定理 3.8 はポリヘドラルプロダクトと K の組み合わせ論とを直接結びつけることがわかる．これにより，ポリヘドラルプロダクトのホモトピー論と組み合わせ論とのつながりがより強くなり，ポリヘドラルプロダクトに対するより深い組み合わせ論的考察が可能となる．例えば，FWF を用いると，K の組み合わせ情報から BBCG 分解のサスペンションはずしを行うことができる．(次節参照)

$\mathbb{R}\mathcal{Z}_K$ とは異なり，一般に $\mathcal{Z}_K(C\underline{X},\underline{X})$ の FWF がコーン分解であるとは示せないが，各 X_i が co-H 空間なら，高次 Whitehead 積を用いて FWF がコーン分解であることが示せる．この事実をモーメントアングル複体の場合に記しておく．$\mathcal{Z}_K^i = \mathcal{Z}_K \cap T^i(D^2)$ とする．

定理 3.9 (Iriye-Kishimoto [17]) $I \subset [m], |I| = i$ に対して写像

$$\bar{\varphi}_{K_I}\colon |K_I| * S^{i-1} \to \mathcal{Z}_{K_I}^{i-1}$$

が存在し，$\mathcal{Z}_K^i$ は $\mathcal{Z}_K^{i-1}$（$\supset \mathcal{Z}_{K_I}^{i-1}$）に $\bar{\varphi}_{K_I}$ でコーンをはって得られる．ただし，$I \subset [m]$ は $|I| = i$ をみたすものすべてをはしる．特に，$\mathcal{Z}_K$ の FWF はコーン分解である．

3.3. ホモトピー分解

まず，BBCG 分解が FWF から得られることを見る．James [21] の retractile argument（もしくはその一般化である [18]）より，$\mathcal{Z}_K(C\underline{X},\underline{X})$ の FWF はサスペンドすると分裂する，すなわち，

$$\Sigma\mathcal{Z}_K(C\underline{X},\underline{X}) \simeq \Sigma\bigvee_{i=1}^{m}\mathcal{Z}_K^i(C\underline{X},\underline{X})/\mathcal{Z}_K^{i-1}(C\underline{X},\underline{X})$$

となることがわかる．さらに，定理 3.8 より，

$$\mathcal{Z}_K^i(C\underline{X},\underline{X})/\mathcal{Z}_K^{i-1}(C\underline{X},\underline{X}) = \bigvee_{I\subset[m],\ |I|=i}|\Sigma K_I| \wedge \widehat{X}^I$$

となるので，BBCG 分解を得る．したがって，FWF は我々が調べるべき対象であることがわかる．よって，定理 3.8 から，写像 Φ_K を調べることで，BBCG 分解のサスペンションをはずすということを理解できると期待される．さらに，Φ_K は φ_K を用いて定義されることから，φ_K を調べることで BBCG 分解のサスペンションはずしを理解できると期待される．実際，次のことが証明できる．任意の $I \subset [m]$ で $\varphi_{K_I} \simeq *$ となるとき，$\mathbb{R}\mathcal{Z}_K$ の FWF は自明であるという．

定理 3.10 (Iriye-Kishimoto [17]) $\mathbb{R}\mathcal{Z}_K$ の FWF が自明のとき，次のホモトピー同値がある：

$$\mathcal{Z}_K(C\underline{X},\underline{X}) \simeq \bigvee_{\emptyset\neq I\subset[m]}|\Sigma K_I| \wedge \widehat{X}^I$$

この定理の逆の主張が一般に成り立つかどうかは未だに解決されておらず，かなり難しい問題だと思われる．しかし，各 X_i が co-H 空間の場合は，BBCG 分解のサスペンションがはずれることと，FWF が自明となることの同値性が証明できる．したがって，モーメントアングル複体に関して次が成り立つ．

定理 3.11 (Iriye-Kishimoto [17]) 次の条件は同値である.

1. $\mathcal{Z}_K$ の FWF は自明である.
2. $\mathcal{Z}_K$ は co-H 空間である.
3. 次のホモトピー同値がある：

$$\mathcal{Z}_K \simeq \bigvee_{\emptyset \neq I \subset [m]} \Sigma^{|I|+1}|K_I|$$

4. Golod 性と sequentially Cohen-Macaulay 性

4.1. Golod 性

定理 3.10 が適用できる単体複体をさがそう．まず，BBCG 分解のサスペンションがはずれるとき，$\mathcal{Z}_K(C\underline{X}, \underline{X})$ はサスペンション空間となる．特に，命題 2.3 より，導来代数 $\mathrm{Tor}^*_{R[v_1,\ldots,v_m]}(R[K], R)$ は任意の可換環 R で積と（高次）Massey 積が自明となる．この性質は古くから可換環論で考えられてきた Golod 性と同値である．可換環のコホモロジーのポアンカレ級数に関してある（等号を含む）不等式が成り立つことが知られており，等号が成り立つとき，その可換環は Golod と呼ばれる．([12] 参照）Stanley-Reisner 環に限定すると，この不等式は，$\mathcal{Z}_K$ のパスループファイブレーションに付随する Eilenberg-Moore スペクトル系列の E_2 項と E_∞ 項の Poincaré 級数の間の不等式としても理解できる．したがって，Golod 性とこのスペクトル系列が E_2 項でつぶれることは同値である．さらに，このスペクトル系列の微分は，底空間 $\mathcal{Z}_K$ の積と（高次）Massey 積なので，命題 (2.3) から次を得る．

命題 4.1 (Golod [12]) $R[K]$ が Golod であることと，$\mathrm{Tor}^*_{R[v_1,\ldots,v_m]}(R[K], R)$ の積と（高次）Massey 積が全て消えることは同値である．

$R[K]$ が Golod のとき，K は R 上 Golod という．以上より，BBCG 分解のサスペンションをはずすには，K が任意の環上で Golod でなければならないことがわかった．

注 4.2 Golod 性の研究では，Berglund-Jöllenbeck [22, 4] の結果が広く使われてきたが，最近，Kätthan [26] により，Jöllenbeck [22] の結果は間違っていることが発見され，それに基づいて証明された Berglund-Jöllenbeck [4] の結果が成り立たないことが証明された．したがって，Golod 性に関する研究で，この結果を用いているものに関しては，注意を要する．

4.2. Sequentially Cohen-Macaulay 性

Golod 性は単体複体の Cohen-Macaulay 性や shellability と関連付けて研究されることが多い．単体複体 K が R 上 Cohen-Macaulay（CM）とは，$R[K]$ が CM であることをいう．つまり，任意の極大イデアル $\mathfrak{m}$ による局所化 $R_\mathfrak{m}$ に対して，

$$\dim R_\mathfrak{m} = \operatorname{depth} R_\mathfrak{m}$$

が成り立つことをいう．CM 性は可換環論において重要な概念であり，対応する単体複体の特徴づけが Stanley [28] により与えられている．定義から，CM 複体は純粋，つまり，極大面は同次元であることがわかる．Stanley [28] は，CM 性を非純粋な単体複体へと一般化した．

定義 4.3 単体複体 K が R 上 sequentially Cohen-Macaulay（SCM）とは，任意の i に対して，i 次元の面で生成される K の部分複体が R 上 CM であることをいう．

単体複体が CM であることと，純粋かつ SCM であることは同値である．SCM 複体のクラスには shifted，vertex-decomposable，shellable という興味深い部分クラスがある．定義は割愛するが，次の包含関係だけは述べておく．([28, 5, 6] 参照）

$$\text{shifted} \;\Rightarrow\; \text{vertex-decomposable} \;\Rightarrow\; \text{shellable} \;\Rightarrow\; \text{SCM}$$

双対 CM 複体（Alexander 双対が CM）が Golod であることは古くから知られており，これは次に拡張できる．

命題 4.4 (Stanley [28]) 単体複体が R 上双対 SCM（Alexander 双対が SCM）なら，R 上 Golod である．

したがって，双対 SCM 複体に対して BBCG 複体のサスペンションははずせると期待できる．実際，SCM 複体の部分クラスに関して，次が証明されている．

定理 4.5 (Iriye-Kishimoto [16], Grbić-Theriault [13]) K が shifted 複体（=双対 shifted 複体）のとき，BBCG 分解のサスペンションははずせる．

定理 4.6 (Grujić-Welker [15]) K が双対 vertex-decomposable 複体のとき，$\mathcal{Z}_K(D^n, S^{n-1})$ に関する BBCG 分解のサスペンションははずせる．

FWF を用いてこの問題を考えよう．K の極小非面とは，$[m]$ の部分集合 σ で，$\sigma \notin K$ だが，任意の $v \in \sigma$ に対して $\sigma - v \in K$ をみたすものである．$\widehat{K}$ を K にすべての極小非面を付け加えてできる単体複体とする．φ_K の組み合わせ的かつ明示的に定義を詳しくみることで次を得る．

補題 4.7 (Iriye-Kishimoto [17]) 写像 $\varphi_K\colon |\mathrm{Sd}\,K| \to \mathbb{R}\mathcal{Z}_K^{m-1}$ は $|\mathrm{Sd}\,\widehat{K}|$ を経由する．

したがって，$\varphi_K \simeq *$ を証明するには，可縮な単体複体 M で $K \subset M \subset \widehat{K}$ を見つければよい．K が $\mathbb{Z}/p$ 上双対 SCM 複体のとき，ホモロジーを調べると，$K \subset L \subset \widehat{K}$ をみたす単体複体 L で，$|L|_{(p)}$ が可縮なものが存在することがわかる．ここで，$-_{(p)}$ は素数 p での局所化を意味する．したがって，$(\varphi_K)_{(p)}$ は定値写像にホモトピックであり，これをすべての p で寄せ集めることにより，φ_K は定値写像にホモトピックであることがわかる．(詳しくは [17] 参照）一方，K が $\mathbb{Z}/p$ 上双対 SCM 複体のとき，任意の $I \subset [m]$ に対して K_I も双対 SCM 複体である．したがって，次を得る．

定理 4.8 (Iriye-Kishimoto [17]) K が $\mathbb{Z}$ 上双対 SCM 複体のとき，$\mathbb{R}\mathcal{Z}_K$ の FWF は自明である．

系 4.9 (Iriye-Kishimoto [17]) K が $\mathbb{Z}$ 上双対 SCM 複体のとき，BBCG 分解のサスペンションははずせる．

以上のように，FWF を用いると，単体複体 K の組み合わせ情報をポリヘドラルプロダクトへと直接結びつけることで，ポリヘドラルプロダクトのホモトピー型の本質的な理解につながる．

5. 今後の課題

最後に今後の課題をいくつかあげる．

問題 5.1 定理 3.10 の逆は成立するか？

定理 3.10 は同値性を主張しないが，定理 3.11 では，モーメントアングル複体に関して，FWF の自明性と BBCG 分解のサスペンションが外せることの同値性が証明されている．では，$\mathbb{R}\mathcal{Z}_K$ と $\mathcal{Z}_K$ のちがいはどこにあるのだろうか？最も大きな違いは，$\mathbb{R}\mathcal{Z}_K$ は単連結でないが，$\mathcal{Z}_K$ は単連結なことである．実際，定理 3.11 の証明では単連結性が重要な役割を果たしている．$\mathbb{R}\mathcal{Z}_K$ が単連結でないことから，定理 3.10 の逆は，LS カテゴリーに関する Ganea 予想と同様の困難さがあり，現在のところ，正しいのかどうかの予想すら立っていない．

写像 $\varphi_K\colon |\mathrm{Sd}\, K| \to \mathbb{R}\mathcal{Z}_K^{m-1}$ を調べる方法として補題 4.7 を，前節で示した．これ以外にも，φ_K のホモトピーファイバーを調べるというのが [17] では提示されている．また，その応用として neighborly 性の高い単体複体について考察されている．

定義 5.2 任意の $\sigma \subset [m], |\sigma| = k+1$ に対して $\sigma \in K$ となるとき，K を k-neighborly という．

定理 5.3 (Iriye-Kishimoto [17]) K が $\lceil \frac{\dim K}{2} \rceil$-neighborly のとき，$\mathbb{R}\mathcal{Z}_K$ の FWF は自明である．

さらに $\dim K = 1$[17] または閉曲面 [20] のときは neighborly 性，Golod 性，$\mathbb{R}\mathcal{Z}_K$ の FWF の自明性が同値であることが示された．([20] 参照）さらに，この結果は Kätthan [26] により，高次元多様体へと部分的に（同値性は含まない）拡張されている．これを受けて，次の問題をあげる．

問題 5.4 Golod 性，neighborly 性，$\mathbb{R}\mathcal{Z}_K$ の FWF の自明性が同値となる単体複体のクラスを見つけよ．

写像 (1) が高次 Whtehead 積の一般化であることは述べた．K が shfted 複体のときこの写像は高次 Whitehead 積（の合成）に他ならないことが [19] で示されている．([14] でも同様のことが考察されているが，致命的なミスがある.）

問題 5.5 BBCG 分解のサスペンションがはずせる単体複体 K に対して，写像 (1) が高次 Whitehead 積で表されることを示せ．

一般に写像 (1) は高次 Whtehead 積の合成ではない．したがって次の問題も重要である．

問題 5.6 写像 (1) のホモトピー作用素としての性質を調べよ．

K の n スケルトンを $K^{(n)}$ で表す．ポリヘドラルプロダクト $\mathcal{Z}_K(C\underline{X}, \underline{X})$ は K のスケルトンから得られるフィルトレーション

$$\mathcal{Z}_{K^{(0)}}(C\underline{X}, \underline{X}) \subset \mathcal{Z}_{K^{(1)}}(C\underline{X}, \underline{X}) \subset \cdots \subset \mathcal{Z}_{K^{(m-1)}}(C\underline{X}, \underline{X}) = \mathcal{Z}_K(C\underline{X}, \underline{X}) \tag{5}$$

をもち，FWF と

$$\mathcal{Z}_K^i(C\underline{X}, \underline{X}) \subset \mathcal{Z}_{K^{(i+1)}}(C\underline{X}, \underline{X})$$

により関係づけられる．このフィルトレーションはトーラス作用の観点からも重要であると考えられる．

問題 5.7 フィルトレーション (5) の性質を調べ，Stanley-Reisner 環のレゾリューションとの関係を明らかにせよ．

参考文献

[1] D. Anick, *Connections between Yoneda and Pontrjagin algebras* Algebraic topology, Aarhus, 1982, 331-350. Lecture Notes in Math. **1051**, Springer, Berlin, 1984.

[2] A. Bahri, M. Bendersky, F.R. Cohen, and S. Gitler, *The polyhedral product functor: a method of decomposition for moment-angle complexes, arrangements and related spaces*, Advances in Math. **225** (2010), 1634-1668.

[3] I.V. Baskakov, V.M. Buchstaber, and T.E. Panov, *Cellular cochain algebras and torus actions*, Russian Math. Surveys **59** (2004), no. 3, 562-563.

[4] A. Berglund and M. Jöllenbeck, *On the Golod property of Stanley-Reisner rings*, J. Algebra **315** (2007), 246-273.

[5] A. Björner and M.I. Wachs, *Shellable nonpure complexes and posets. I*, Trans. AMS **348** (1996), 1299-1327; *Shellable nonpure complexes and posets. II*, Trans. AMS **349** (1997), 3945-3975.

[6] A. Björner, M. Wachs, and V. Welker, *On sequentially Cohen-Macaulay complexes and posets*, Israel J. Math. **169** (2009), 295-316.

[7] V.M. Buchstaber and T.E. Panov, *Torus actions and their applications in topology and combinatorics*, University Lecture Series **24**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.

[8] M.W. Davis and T. Januszkiewicz, *Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions*, Duke Math. J. **62** (1991), 417-451.

[9] M.W. Davis and P.H. Kropholler, *Criteria for asphericity of polyhedral products: corrigenda to "Right-angularity, flag complexes, asphericity"*, Geom. Dedicata **179** (2015), 39-44.

[10] M.W. Davis and M. Kahle, *Random graph products of finite groups are rational duality groups*, J. Topol. 7 (2014), no. 2, 589-606.

[11] R.H. Fox, *On the Lusternik-Schnirelmann category*, Ann. of Math. (2) **42** (1941), 333-370.

[12] E.S. Golod, *On the homologies of certain local rings*, Soviet Math. Dokl. **3** (1962), 745-748.

[13] J. Grbić and S. Theriault, *The homotopy type of the polyhedral product for shifted complexes*, Advances in Math. **245** (2013), 690-715.

[14] J. Grbić and S. Theriault, *Higher Whitehead products in toric topology*, arXiv:1011.2133.

[15] V. Grujić and V. Welker, *Discrete Morse theory for moment-angle complexes of pairs* (D^n, S^{n-1}), Monatsh. Math. **176** (2015), no. 2, 255-273.

[16] K. Iriye and D. Kishimoto, *Decompositions of polyhedral products for shifted complexes*, Advances in Math. **245** (2013), 716-736.

[17] K. Iriye and D. Kishimoto, *Fat wedge filtrations and decomposition of polyhedral products*, arXiv:1412.4866v3.

[18] K. Iriye and D. Kishimoto, *Decompositions of suspensions of spaces involving polyhedral products*, Algebr. Geom. Topol. **16** (2016), 825-841.

[19] K. Iriye and D. Kishimoto, *Polyhedral products for shifted complexes and higher Whitehead products*, arXiv:1505.04892.

[20] K. Iriye and D. Kishimoto, *Golodness and polyhedral products for two dimensional simplicial complexes*, arXiv: 1506.08970.

[21] I.M. James, *On H-spaces and their homotopy groups*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **11** (1960), 161-179.

[22] M. Jöllenbeck, *On the multigraded Hilbert and Poincaré series of monomial rings*, J. Pure Appl. Algebra **207**, No. 2, (2006), 261-298.

[23] Y. Kamiyama and S. Tsukuda, *The configuration space of the n-arms machine in the Euclidean space*, Topology Appl. **154** (2007), 1447-1464.

[24] Y. Kamiyama and S. Tsukuda, *On the homology of configuration spaces of arachnoid mechanisms*, Houston J. Math. **34** (2008), 483-499.

[25] L. Kätthan, *The Golod property for Stanley-Reisner rings in varying characteristic*, to appear in J. Pure Appl. Alg.

[26] L. Kätthan, *A non-Golod ring with a trivial product on its Koszul homology*, arXiv:1511.04883.

[27] T. Porter, *Higher-order Whitehead products*, Topology **3** (1965), 123-135.

[28] R.P. Stanley, *Combinatorics and commutative algebra*, Second edition. Progress in Mathematics **41**, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1996.

[29] M. Stafa, *On the fundamental group of certain polyhedral products*, J. Pure Appl. Alg. **219** (2015), no 6, 2279-2299.

[30] M. Stafa, *Polyhedral products, flag complexes and monodromy representations*, arXiv:1604.05504.