曲面の写像類群の線型性問題の視覚化について

笠原　泰　(高知工科大学)*

概　要

高種数の曲面の写像類群に関する基本的な未解決問題に, 線型性問題がある. 本稿では, 写像類群の線型性に関する既知の結果を概観した後, 筆者が「線型性問題の視覚化」と呼ぶ, 閉曲面および１点穴開き曲面の写像類群が線型となるための, ある意味幾何的な必要十分条件 [17] について紹介したい.

1. 序

1.1. 写像類群とその線型性問題

向き付け可能な曲面 (2次元多様体) に対し, 向きを保つ同相写像のイソトピー類全体の成す群を, その曲面の写像類群という. 考える曲面の型や, 考えるイソトピーの種類に応じて写像類群にはいくつかの変種がある. 以下, これらを単に写像類群という. 写像類群は低次元トポロジーの他, 幾何的群論, 代数幾何, 数論, 数理物理などとも関連を持ち, 現在までに様々な観点から活発に研究されている.

しかし, 古くからある基本的な問題である線形性, すなわち 或る体上の忠実な有限次元線型表現の存在問題については, 曲面の型が単純な場合を除き, 未解決のまま残っている. ここで, 群の線型表現が忠実とは, 対応する線型変換群への準同型が単射であることをいう. 以下, 群は体 K 上の忠実な有限次元線形表現を持つとき, K 線型ということにする.

1.2. 既知の結果

Σ_g で種数 g の有向閉曲面を表す. その写像類群 $\mathcal{M}_g$ は定義により, Σ_g の向きを保つ同相写像のイソトピー類全体の成す群である. 種数 g の１点穴開き曲面 $\Sigma_{g,*}$ を, Σ_g と固定された基点 $* \in \Sigma_g$ の組と定める. $\Sigma_{g,*}$ の写像類群 $\mathcal{M}_{g,*}$ を, 基点を保つ Σ_g の向きを保つ同相写像のイソトピー類全体の成す群として定める. 但しイソトピーは常に基点を固定し続けるもののみを考える.

種数 $g=1$ の場合, $\mathcal{M}_1$ と $\mathcal{M}_{1,*}$ は共に $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ と同型であることが古典的に知られている. 従ってこれらの写像類群は $\mathbb{Q}$ 線型である. 種数 $g=2$ の場合は, 2000 年になって $\mathcal{M}_2$ の線型性が初めて確立された (Korkmaz [20], Bigelow–Budney [5]). これは, 先だって Bigelow [4], Krammer [23] により確立した, Artin 組みひも群 B_n の線型性と, B_n と穴開き球面の写像類群との関係, および $\mathcal{M}_2$ と 6 点穴開き球面の写像類群の関係を記述する Birman–Hilden 理論 [7] を組み合わせることで示された.

$\mathcal{M}_{2,*}$ の線型性は, $g \geq 3$ に対する $\mathcal{M}_g$ および $\mathcal{M}_{g,*}$ の線型性と同様に未解決である.

1.3. 高種数の難しさについて

1.3.1. Lawrence 表現の不存在

比較のため, まず組みひも群 B_n の有限次元線型表現である Lawrence 表現 [24] を思い出す. 2次元円板 D^2 に対し, n 個の内点からなる部分集合 P_n を固定する. D^2 と P_n の組

* 〒782-8502 高知県香美市土佐山田町 高知工科大学 共通教育教室
e-mail: kasahara.yasushi@kochi-tech.ac.jp

を D_n とかく. D_n の写像類群, すなわち n 点穴開き円板の写像類群は, P_n を集合として固定する D^2 の向きを保つ同相写像で, 境界上恒等写像であるもののイソトピー類全体の成す群として定義される. ただし, イソトピーは, P_n と境界の点を常に固定するもののみを考える. すると, D_n の写像類群は, 組みひも群 B_n と同一視できる. $\mathcal{C}_m(D_n)$ で $D^2 \setminus P_n$ の m 点配置空間 (順序なし) を表す. $\mathcal{C}_m(D_n)$ の1次コホモロジー群には B_n が自然に作用し, その不変部分は,

$$H^1(\mathcal{C}_m(D_n);\mathbb{Z})^{B_n} \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (m=1); \\ \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} & (m\geq 2) \end{cases}$$

である ([24]). この不変部分に対応する $\mathcal{C}_m(D_n)$ のアーベル被覆の m 次ホモロジー群は, 被覆変換群 $\mathbb{Z}$ $(m=1)$ または $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ $(m\geq 2)$ の $\mathbb{Z}$ 係数の群環を基礎環とする, B_n の有限次元線型表現を定める. $m=1$ のとき, この表現は Burau 表現と一致し, $n=3$ の場合忠実であることが知られていた (Magnus–Peluso [26]). Bigelow と Krammer が示したのは, $m=2$ の場合に得られる線型表現が忠実ということであった.

同様の構成を, 境界成分を1つもつ, 種数 $g\geq 1$ のコンパクト有向曲面 $\Sigma_{g,1}$ と, その写像類群 $\mathcal{M}_{g,1}$ に対して考える. ここに, $\mathcal{M}_{g,1}$ は $\Sigma_{g,1}$ の向きを保つ同相写像で境界上恒等写像であるもの全体の, 境界上の各点を動かさないイソトピーによる商として得られる群を表す. すると $m\geq 1$ に対し, $\mathcal{M}_{g,1}$ 加群として

$$H_1(\mathcal{C}_m(\Sigma_{g,1});\mathbb{Z}) \cong H_1(\Sigma_{g,1};\mathbb{Z})\oplus\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

(但し $\mathcal{M}_{g,1}$ の $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ への作用は自明) となることから (*c.f.* Scott [29], Bellingeri [3]), 得られる $\mathcal{M}_{g,1}$ の線型表現は, $\mathcal{C}_m(\Sigma_{g,1})$ の高々2重被覆の m 次ホモロジー群となり, $\mathcal{C}_m(\Sigma_{g,1})$ そのものの m 次ホモロジーと比較して, 情報が大きく増えることが期待できない. また, 後者の定める $\mathcal{M}_{g,1}$ の線型表現のカーネルは, m についてすべて併せると, $\mathcal{M}_{g,1}$ の Jonhnson filtration と一致することが知られている (Moriyama [27]).

1.3.2. Aut (F_n) との比較

F_n で階数 n の自由群, Aut (F_n) で F_n の自己同型群を表す. Aut (F_2) が線型であることは, B_4 の線型性から従う (Krammer [22]). この場合を除いた $n\geq 3$ に対し, Aut (F_n) は線型でないことが Formanek–Procesi [11] により示されている. 一方, $\mathcal{M}_{g,1}$ は F_{2g} と同型な $\Sigma_{g,1}$ の基本群に作用し, Dehn–Nilsen 型定理によれば, $\mathcal{M}_{g,1}$ はこの作用を介して Aut (F_{2g}) の比較的大きな部分群と見なせる:

$$\mathcal{M}_{g,1} \cong \{f\in \mathrm{Aut}\,(F_{2g})\,;\, f(\zeta)=\zeta\}$$

但し, ζ は F_{2g} の適当な自由生成系 $a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g$ に対し, $\zeta=[a_1,b_1][a_2,b_2]\cdots[a_g,b_g]$. しかし, Formanek–Procesi の手法を直接用いても, $g\geq 2$ に対して $\mathcal{M}_{g,1}$ の非線型性を導くことはできないことが Brendle–Tehrani-Hamidi [8] により確認されている.

1.3.3. 位相群の格子問題

最近になり, 閉曲面 または一般個数の穴開き曲面の写像類群で, 第2可算公理をみたす局所コンパクト連結位相群の格子[1] となるものが Kida [19] により完全に決定されている.

[1]局所コンパクト位相群 G の格子とは, G の離散部分群 Γ で, 商空間 G/Γ が, G の左かけ算による作用で不変な, 正則 Borel 確率測度を持つものをいう.

それによれば, 種数 $g \geq 1$ のとき, そのような格子となり得るのは $\mathcal{M}_1 \cong \mathcal{M}_{1,*} \cong \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ に限る. なお, 同じ結果によれば, 5点以上の穴開き球面の写像類群もそのような格子になることを禁止されているが, 他方, 上に引用した Korkmaz [20], Bigelow–Budney [5] によれば, 穴開き球面の写像類群はすべて線型である.

1.4. 低次元表現の分類

関連する話題として, 写像類群の低い次元をもつ複素線型表現の分類結果を紹介する. B_n に対しては, $n-1$ 次元までの既約表現は, $n = 4, 5, 6$ で生じる有限個の例外を除き, 1次元アーベル表現か, $n-1$ 次元の被約 Burau 表現の特殊化の composition factor と共役なものに限ること, また, すべての例外は Iwahori–Hecke 環表現となることが Formanek [9] により示されている. B_n の n 次元既約表現についても, Formanek 他 [10] により, 分類が完成している.

種数 $g \geq 1$ の場合, 穴開きなら穴同士の入れ替えを許さない写像類群のみを考えることで, Franks–Handel [12] は, 次元が $2g-1$ 以下の複素線型表現が, すべて写像類群のアーベル化を経由することを示した. 続いて Korkmaz [21] は, アーベル化を経由しない $2g$ 次元の複素線型表現は, g が十分大きいとき symplectic 表現と共役であることを示した. ここで, symplectic 表現とは, $\mathcal{M}_g$ の Σ_g の1次ホモロジー群への作用が誘導する線型表現

$$\mathcal{M}_g \to \mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})$$

および, この準同型と, すべての境界成分を2次元円板で塞ぎ, すべての穴を忘れることで得られる $\mathcal{M}_g$ への自然な全射準同型との合成をいう.

さらに Korkmaz は同じ手法により, 種数 $g \geq 3$ の写像類群が 次元 $3g-3$ 以下の忠実複素線型表現を持たないことを示している.

2. 線型性問題の視覚化

2.1. 動機

$\mathcal{M}_g$ および, $\mathcal{M}_{g,*}$ の線型性は, 上に見た通りかなり微妙な問題であり, 高種数についても ad-hoc に解決するものならば, いつ解決してもおかしくないと言えるが, 系統的なアプローチは見当たらない. そこで, 線型性問題を写像類群に固有の幾何的な問題として言い換えてみることを考えた. それにより, 解決に手が届きそうな写像類群の新しい問題を見出すこと, またその延長上に線型性問題解決のアプローチが見えてくることを期待したい.

$\Sigma_{g,n}$ で種数 $g \geq 1$, 境界成分の個数が $n \geq 0$ であるコンパクト有向曲面, $\mathcal{M}_{g,n}$ でその写像類群を表す. $\mathcal{M}_{g,n}$ は $\Sigma_{g,n}$ の向きを保つ同相写像で境界上恒等写像であるもののイソトピー類全体の成す群である. 但し, イソトピーは境界上の点を動かさないものとする. $\mathcal{S}$ で $\Sigma_{g,n}$ 内の本質的単純閉曲線のイソトピー類全体を表す. ここに, 単純閉曲線が本質的とは, 1点とホモトープでなく, どの境界成分とも平行でないことをいう. また, 単純閉曲線自体は曲面の部分集合と見なし, 従ってその向きは考えない. 写像 $\iota\colon \mathcal{S} \to \mathcal{M}_{g,n}$ を $c \in \mathcal{S}$ に対し c に沿った (右手)Dehn ツイスト $t_c \in \mathcal{M}_{g,n}$ を対応させる写像として定める. $\mathcal{S}$ の元として異なる, 二つの単純閉曲線に沿った Dehn ツイスト

の, $\mathcal{S}$ への作用は一致しない. 従って, ι は単射である. また, 写像類群の基本的性質として, 任意の $f \in \mathcal{M}_{g,n}$, および $c \in \mathcal{S}$ に対し,

$$f\iota(c)f^{-1} = \iota(f(c)) \tag{2.1}$$

が成り立つことが知られている.

筆者の出発点となったのは, 未だ忠実かどうかわかっていない, Iwahori–Hecke 環に由来する $\mathcal{M}_2$ の線型表現である, 種数 2 の Jones 表現 ([15], [16]) の忠実性を検討する中で発見した, 次の事実である:

補題 2.1 ([17])**.** $g \geq 1$ かつ $n \geq 0$ とする. 任意の群準同型 $\varphi\colon \mathcal{M}_{g,n} \to G$ に対し, $\operatorname{Ker}\varphi$ が $\mathcal{M}_{g,n}$ の中心 $Z(\mathcal{M}_{g,n})$ に含まれるための必要十分条件は, 合成写像

$$\varphi \circ \iota\colon \mathcal{S} \to G$$

が単射となることである.

証明は, 性質 (2.1) に加え, $\mathcal{S}$ に自明に作用する $\mathcal{M}_{g,n}$ の元全体は $Z(\mathcal{M}_{g,n})$ と一致すること, 二つの単純閉曲線に沿った Dehn ツイストの $\mathcal{S}$ への作用が一致すれば, 元の曲線も互いにイソトープになることによる. □

注意 2.2. $g \geq 1$ に対し, 写像類群の中心 $Z(\mathcal{M}_{g,n})$ の構造は, 次の通り完全に決定されている ([28]). $n = 0$ の場合: $g \geq 3$ のとき, 自明; $g = 1, 2$ のとき, 超楕円的対合が生成する位数 2 の巡回群. $(g, n) = (1, 1)$ の場合: 境界に沿った「半ツイスト」が生成する無限巡回群. それ以外の場合: 各境界成分に沿った Dehn ツイストたちが生成する階数 n の自由アーベル群.

以下, 基礎体 K を固定しておく.

2.2. 閉曲面の場合

補題 2.1 を使うと, $\mathcal{M}_{g,n}$ の線型性問題を, 中心を除いて「視覚化」できる.

$K[\mathcal{S}]$ で, コンパクト曲面 $\Sigma_{g,n}$ 内の本質的単純閉曲線のイソトピー類の成す集合 $\mathcal{S}$ を基底とする K 上のベクトル空間を表す. $\mathcal{M}_{g,n}$ の $\mathcal{S}$ への自然な作用により, $K[\mathcal{S}]$ は $\mathcal{M}_{g,n}$ 加群の構造を持つ. 説明のために, 次を導入しておく.

定義 2.3. 体 K 上のベクトル空間 M の成す $\mathcal{M}_{g,n}$ 加群と, $\mathcal{M}_{g,n}$ 同変な全射準同型

$$p\colon K[\mathcal{S}] \to M$$

の組を $\Sigma_{g,n}$ の ($\mathcal{S}$ 型) 曲線加群という.

射影 p が明らかなときは, 単に曲線加群 M などということにする.

注意 2.4. (1) $\mathcal{M}_{g,n}$ 加群として, $M \cong K[\mathcal{S}]/\operatorname{Ker} p$ であり, $\operatorname{Ker} p$ の元は有限個の $\mathcal{S}$ の元の形式的有限和だから, 結局, 曲線加群とは $K[\mathcal{S}]$ に単純閉曲線の有限和を関係子 (「スケイン型」関係子) として得られる $\mathcal{M}_{g,n}$ 加群のことである.

(2) これまでに知られている, $\operatorname{Ker} p$ の $\mathcal{M}_{g,n}$ 生成元を直接指定することで定義された有限次元曲線加群としては, ただ一つ Luo が [25] で構成したものがあるのみである.

(3) すべての $\mathcal{M}_{g,n}$ 加群が曲線加群の構造を持つわけではない. たとえば, $n = 0$ として, K の標数が 2 でなければ, $\mathcal{M}_g$ 加群 $H_1(\Sigma_g; K)$ は Σ_g の曲線加群の構造を持ち得ない. この場合, より強く $\mathcal{M}_g$ 同変な準同型 $K[\mathcal{S}] \to H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z})$ は 0 写像に限る.

さて, $\mathcal{M}_{g,n}$ の任意の有限次元線型表現は, $\Sigma_{g,n}$ の有限次元曲線加群を誘導することを観察しておく. 有限次元ベクトル空間 V を表現空間とする線型表現 $\rho : \mathcal{M}_{g,n} \to \mathrm{GL}(V)$ に対し, $\rho \circ \iota(\mathcal{S})$ の生成する $\operatorname{End}(V)$ の K 部分空間を M_ρ で表す. $\rho(f)$ による共役作用により $\operatorname{End}(V)$ を $\mathcal{M}_{g,n}$ 加群と見なす. すると, 性質 (2.1) により, M_ρ は $\operatorname{End}(V)$ の $\mathcal{M}_{g,n}$ 部分加群となる. さらに, $p_\rho : K[\mathcal{S}] \to M_\rho$ を $\rho \circ \iota$ の線形な拡張として定めれば, M_ρ は $\Sigma_{g,n}$ の有限次元曲線加群となる.

この構成と, 補題2.1を基礎として, 次を示すことができる.

定理 2.5 ([17]). $\mathcal{M}_{g,n}$ が, K 上の有限次元線型表現で, カーネルが中心に含まれるようなものを持つための必要十分条件は, $\Sigma_{g,n}$ の有限次元曲線加群

$$p : K[\mathcal{S}] \to M$$

で, p の $\mathcal{S}$ への制限が単射となるものが存在することである.

注意2.2で述べた通り, $n = 0$ かつ $g \geq 3$ ならば, $\mathcal{M}_{g,n}$ の中心は自明である. 従って, 定理は直ちに次を導く.

系 2.6 ([17]). 種数 $g \geq 3$ の閉曲面の写像類群 $\mathcal{M}_g$ が K 線型となるための必要十分条件は, Σ_g の有限次元曲線加群 $p : K[\mathcal{S}] \to M$ で, p の $\mathcal{S}$ への制限が単射となるものが存在することである.

2.3. 1点穴開き曲面の場合

$g \geq 2$ とする. 前節と同様の, 線型性問題の視覚化を, $\mathcal{M}_{g,*}$ について考える.

この場合, 写像類群が自然に作用し, 部分集合として自身が含む幾何的対象として, $\mathcal{S}$ の他に曲面群 $\pi_1(\Sigma_g, *)$ がある. これは, いわゆる Birman 完全列 [6] により記述される:

$$1 \to \pi_1(\Sigma_g, *) \xrightarrow{i} \mathcal{M}_{g,*} \xrightarrow{j} \mathcal{M}_g \to 1 \tag{2.2}$$

ここに, j は基点を忘れることで得られる準同型. また, i は, Σ_g の基点付きループに, それを基点のイソトピーと見なしたときの, 包囲イソトピーの結果生じる $\Sigma_{g,*}$ の同相写像の, 逆写像のイソトピー類を対応させる準同型である. 性質 (2.1) に対応して, 任意の $f \in \mathcal{M}_{g,*}$, $\gamma \in \pi_1(\Sigma_g, *)$ に対し,

$$f \cdot i(\gamma) \cdot f^{-1} = i(f_* \gamma) \tag{2.3}$$

が成り立つ. 但し, f_* は f の $\pi_1(\Sigma_g,*)$ への自然な作用を表す.
次が補題2.1の対応物を与える:

補題 2.7 ([17])**.** *$\mathcal{M}_{g,*}$ の任意の群準同型 $\rho:\mathcal{M}_{g,*}\to G$ が単射となるための必要十分条件は, $\rho\circ i$ が単射となることである.*

証明. ρ が $\pi_1(\Sigma_g,*)$ 上で単射と仮定して, $\mathrm{Ker}\,\rho=\{1\}$ を示せばよい. $f\in\mathrm{Ker}\,\rho$ とすると, 性質 (2.3) により, 任意の $\gamma\in\pi_1(\Sigma_g)$ に対し, $\rho(i(\gamma))=\rho(f)\rho(i(\gamma))\rho(f^{-1})=\rho(fi(\gamma)f^{-1})=\rho(i(f_*\gamma))$. よって, 仮定により, $f_*\gamma=\gamma$ がすべての $\gamma\in\pi_1(\Sigma_g,*)$ に対して成り立つ. Dehn–Nilsen 型定理により, $\mathcal{M}_{g,*}$ の $\pi_1(\Sigma_g,*)$ への作用は忠実であるから, $f=1\in\mathcal{M}_{g,*}$ を得る. □

以下, 準同型 i により, 曲面群 $\pi_1(\Sigma_g,*)$ を $\mathcal{M}_{g,*}$ の部分群と見なす. 補題 2.7により, 写像類群 $\mathcal{M}_{g,*}$ の線型性は, Σ_g の基本群の有限次元忠実線型表現で, $\mathcal{M}_{g,*}$ に拡張するものの存在と同値であることがわかった. 当然, 次の問題は $\pi_1(\Sigma_g,*)$ の有限次元線形表現が, $\mathcal{M}_{g,*}$ の線型表現に拡張するのはどのような場合か, ということである. しかし, これに直接答えるのはかなり難しいと考えられるので, まず曲面群の変形空間 (*c.f.* Goldman [13]) の言葉を用いてわかることを考える.

曲面群 $\pi_1(\Sigma_g,*)$ から群 G への群準同型全体を $\mathrm{Hom}\,(\pi_1(\Sigma_g,*),G)$ とかく. この集合には G が, G 自身への共役作用を後から合成することにより作用する. この作用による商集合を

$$X_G=\mathrm{Hom}\,(\pi_1(\Sigma_g,*),G)\,/G$$

とかき, $\pi_1(\Sigma_g,*)$ の変形空間という. $\phi\in\mathrm{Hom}\,(\pi_1(\Sigma_g,*),G)$ が代表する X_G の元を $[\phi]$ と書く.
$f\in\mathcal{M}_{g,*}$ とする. 準同型 $\phi:\pi_1(\Sigma_g,*)\to G$ に対し, 準同型 $\phi\circ f_*^{-1}$ を対応させることにより, $\mathcal{M}_{g,*}$ の $\mathrm{Hom}\,(\pi_1(\Sigma_g,*),G)$ への作用が定まる. これは, 自然に $\mathcal{M}_{g,*}$ の X_G への作用に落ち, $\pi_1(\Sigma_g,*)$ の X_G への作用は自明なので, 結局 $\mathcal{M}_g$ が Birman 完全列 (2.2) を介して X_G に作用する.

補題 2.8 ([17])**.** *もし, 準同型 $\phi:\pi_1(\Sigma_g,*)\to G$ が $\mathcal{M}_{g,*}$ の準同型*

$$\mathcal{M}_{g,*}\to G$$

に拡張するならば, $[\phi]\in X_G$ は $\mathcal{M}_g$ の X_G への作用の大域的不動点である.

証明. 諸定義と, 性質 (2.3) を組み合わせればよい. □

一般に, $\phi\in\mathrm{Hom}\,(\pi_1(\Sigma_g,*),G)$ に対し, $\phi(\pi_1(\Sigma_g,*))$ の G における中心化群は自明とは限らないこともあり, 補題2.8の逆は成り立たないように思われる. しかし, それにもかかわらず, $G=\mathrm{GL}(n,K)$ の場合, $X_{\mathrm{GL}(n,K)}$ への $\mathcal{M}_g$ 作用の任意の大域的不動点から, $\mathcal{M}_{g,*}$ の線型表現を, 次のようにして構成できる.

まず, 任意の線型表現 $\phi : \pi_1(\Sigma_g, *) \to \mathrm{GL}(n, K)$ に対し, ϕ の像による共役作用は線型表現 $\mathrm{Ad}\,\phi : \pi_1(\Sigma_g, *) \to \mathrm{GL}(\mathrm{End}\,(n, K))$ を定める. V_ϕ で, $\phi(\pi_1(\Sigma_g, *))$ が生成する $\mathrm{End}\,(n, K)$ の K 部分空間をあらわすと, これは明らかに $\mathrm{Ad}\,\phi$ による $\pi_1(\Sigma_g, *)$ の作用で不変である. $\mathrm{Ad}\,\phi$ の作用を V_ϕ に制限して得られる線型表現を

$$\mathcal{A}\,\phi : \pi_1(\Sigma_g, *) \to \mathrm{GL}(V_\phi)$$

で表す. さらに, もし $[\phi] \in X_{\mathrm{GL}(n,K)}$ が $\mathcal{M}_g$ 作用の大域的不動点ならば, $f \in \mathcal{M}_{g,*}$ の V_ϕ への線形作用が

$$\phi(\gamma) \mapsto \phi(f_*\gamma) \quad (\gamma \in \pi_1(\Sigma_g, *))$$

により well-defined に定まり, しかもこの対応は, $\mathcal{A}\,\phi$ を拡張する線型表現

$$\Psi : \mathcal{M}_{g,*} \to \mathrm{GL}(V_\phi)$$

を定めることがわかる.

さて, 明らかに

$$\mathrm{Ker}\,\mathcal{A}\,\phi = \{\gamma \in \pi_1(\Sigma_g, *)\,;\,[\gamma, \pi_1(\Sigma_g, *)] \subset \mathrm{Ker}\,\phi\}$$

である. また, $\pi_1(\Sigma_g, *)$ の中心は自明なので, 補題 2.7 により, 特に ϕ が忠実ならば, Ψ も忠実である. また, $V_\phi \subset \mathrm{End}\,(n, K)$ なので, $\dim V_\phi \leq n^2$ が成り立つ.

以上をまとめれば次を得る:

定理 2.9 ([17])**.** $g \geq 2$ とする. 1点穴あき写像類群 $\mathcal{M}_{g,*}$ が K 線型となるための必要十分条件は, ある n に対して $X_{\mathrm{GL}(n,K)}$ への $\mathcal{M}_g$ 作用が, $\pi_1(\Sigma_g, *)$ の忠実線型表現で代表される大域的不動点を持つことである. さらに, もしそのような大域的不動点が存在すれば, $\mathcal{M}_{g,*}$ は K 上の高々 n^2 次元の忠実線型表現を持つ.

結果から言えることをいくつか確認しておく.

注意 2.10. Goldman [13] で述べられている通り, 曲面群の変形空間への写像類群の作用に関する最近の力学系的研究によれば, この作用は, (適当な位相と測度の下で), 真性不連続と, エルゴード性の複雑な混じり合いであることが明らかになってきている. 定理 2.9 は, $\mathcal{M}_{g,*}$ の忠実線型表現は変形空間の中の真性不連続領域と正反対の場所にしかあり得ないことを主張している. 他方, たとえ写像類群の変形空間への作用が完全にエルゴード的であったとしても, 大域的不動点が1点存在することを禁止するには足りない.

注意 2.11. 補題 2.8 の帰結を $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ の場合に観察しておくことも興味を引くかもしれない. 曲面群 $\pi_1(\Sigma_g, *)$ の忠実 $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ 表現の, よく知られた源泉として, Σ_g の双曲構造がある. つまり, 双曲構造に付随するホロノミー表現が単射準同型 $\phi : \pi_1(\Sigma_g, *) \to \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ を与える. そのような表現が代表する変形空間 $X_{\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})}$ の点は, $\mathcal{M}_g$ 作用に関して有限 stabilizer を持ち, これは丁度対応する双曲的曲面の向きを保つ等長変換群と一致する. 従って, 補題 2.8 により, このような ϕ は決して準同型 $\mathcal{M}_{g,*} \to \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ に拡張しないことがわかる.

注意 2.12. 1.4節で述べた通り, $\mathcal{M}_{g,*}$ は $3g-3$ 次元以下の複素忠実線型表現を持たない. このことを定理2.9 と合わせると, $n \leq \sqrt{3g-3}$ ならば, $X_{\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})}$ への $\mathcal{M}_g$ 作用は $\pi_1(\Sigma_g, *)$ の忠実表現で代表される大域的不動点を持たないことがわかる.

最後に, 関連する先行結果について付言する. これまでに, Birman完全列 (2.2) を用いて写像類群の線型性を直接言い換える, 定理 2.9のような結果は知られていなかったようである. しかし, 次に述べるように間接的な結果を指摘することができる. 線型性を持つ群が満たすべき性質に, residually finite, すなわち, 単位元以外の任意の元に対し, その群から有限群への準同型であって, その元を単位元以外の元に移すものが存在する, という性質がある. $\mathcal{M}_{g,*}$ がresidually finite であることはBaumslag [2] により示された. $\mathcal{M}_g$ がresidually finite であることは, 最初 Grossmann [14] によりBaumslagの方法を拡張することで示されたが, その後, Bass–Lubotzky [1] は, $\mathcal{M}_{g,*}$ がresidually finite であることと, $\mathcal{M}_g$ の $X_{\mathrm{GL}(n,K)}$ への作用の下で, 既約表現で代表される $X_{\mathrm{GL}(n,K)}$ のすべての点を, すべての n にわたって固定する写像類が $1 \in \mathcal{M}_g$ に限るということから概ね従うことを示している. (正確には $\mathcal{M}_g$ でなく, それを指数2の部分群として含む $\pi_1(\Sigma_g, *)$ の外部自己同型群.) これは上の定理2.9と対照を成している.

2.4. いくつかの問題

定理 2.5, 2.9に基づいて写像類群の線型性問題を解決するために基本的と思われる問題を挙げておきたい.

閉曲面の場合. 曲線加群 $p : K[\mathcal{S}] \to M$ が基礎体 K 上有限次元となるための必要十分条件は何か? また, $\mathrm{Ker}\, p$ が $\mathcal{M}_{g,n}$ 加群として有限生成となるための必要十分条件は何か?

1点穴開き曲面の場合. Birman完全列 (2.2) には自由群の自己同型の対応物

$$1 \to F_n \to \mathrm{Aut}\,(F_n) \to \mathrm{Out}\,(F_n) \to 1$$

が存在し, 定理 2.9の類似物が全く同じ理由で成り立つ. ここに $\mathrm{Out}\,(F_n)$ は F_n の外部自己同型を表す. $\mathrm{Aut}\,(F_n)$ は $n=2$ のとき線型で, $n \geq 3$ のとき線型でないことに, 変形空間への $\mathrm{Out}\,(F_n)$ 作用の力学系の言葉で別証明を与えよ.

3. 関連する話題

本稿に述べた議論の出発点となった, 補題 2.1 を用いると, 写像類群 $\mathcal{M}_{g,n}$ の任意の群準同型に対し, それが $\Sigma_{g,n}$ 内の単純閉曲線のあいだの幾何的交叉の有無をすべて判別できることが, その準同型のカーネルが中心 $Z(\mathcal{M}_{g,n})$ に含まれることと必要十分であることを示すことができる. 詳細については論文[18] を参照されたい.

参考文献

[1] H. Bass and A. Lubotzky, *Automorphisms of groups and of schemes of finite type*, Israel J. Math. **44** (1983), no. 1, 1–22.

[2] G. Baumslag, *Automorphism groups of residually finite groups*, J. London Math. Soc. **38** (1963), 117–118.

[3] P. Bellingeri, *On presentations of surface braid groups*, J. Algebra **274** (2004), no. 2, 543–563.

[4] S. J. Bigelow, *Braid groups are linear*, J. Amer. Math. Soc. **14** (2001), no. 2, 471–486.

[5] S. J. Bigelow and R. D. Budney, *The mapping class group of a genus two surface is linear*, Algebr. Geom. Topol. **1** (2001), 699–708 (electronic).

[6] J. S. Birman, *Mapping class groups and their relationship to braid groups*, Comm. Pure Appl. Math. **22** (1969), 213–238.

[7] J. S. Birman and H. Hilden, *Isotopies of homeomorphisms of Riemann surfaces and a theorem about Artin's braid group*, Ann. of Math. **97** (1973), 424–439.

[8] T. E. Brendle and H. Hamidi-Tehrani, *On the linearity problem for mapping class groups*, Algebr. Geom. Topol. **1** (2001), 445–468.

[9] E. Formanek, *Braid group representations of low degree*, Proc. London Math. Soc. (3) **73** (1996), no. 2, 279–322.

[10] E. Formanek, W. Lee, I. Sysoeva, and M. Vazirani, *The irreducible complex representations of the braid group on n strings of degree $\leq n$*, J. Algebra Appl. **2** (2003), no. 3, 317–333.

[11] E. Formanek and C. Procesi, *The automorphism group of a free group is not linear*, J. Algebra **149** (1992), no. 2, 494–499.

[12] J. Franks and M. Handel, *Triviality of some representations of* $\mathrm{MCG}(S_g)$ *in* $GL(n, \mathbb{C})$, $\mathrm{Diff}(S^2)$ *and* $\mathrm{Homeo}(\mathbb{T}^2)$, Proc. Amer. Math. Soc. **141** (2013), no. 9, 2951–2962.

[13] W. M. Goldman, *Mapping class group dynamics on surface group representations*, Problems on mapping class groups and related topics, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 74, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006, pp. 189–214.

[14] E. K. Grossman, *On the residual finiteness of certain mapping class groups*, J. London Math. Soc. (2) **9** (1974/75), 160–164.

[15] V. F. R. Jones, *Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials*, Ann. of Math. (2) **126** (1987), no. 2, 335–388.

[16] Y. Kasahara, *An expansion of the Jones representation of genus 2 and the Torelli group*, Algebr. Geom. Topol. **1** (2001), 39–55.

[17] ———, *On visualization of the linearity problem for mapping class groups of surfaces*, Geom. Dedicata **176** (2015), 295–304.

[18] ———, *Geometric intersection in representations of mapping class groups of surfaces*, 2016, preprint, arXiv:1504.03052v3.

[19] Y. Kida, *Measure equivalence rigidity of the mapping class group*, Ann. of Math. (2) **171** (2010), no. 3, 1851–1901.

[20] M. Korkmaz, *On the linearity of certain mapping class groups*, Turkish J. Math. **24** (2000), no. 4, 367–371.

[21] ———, *The symplectic representation of the mapping class group is unique*, 2011, preprint, arXiv:1108.3241.

[22] D. Krammer, *The braid group B_4 is linear*, Invent. Math. **142** (2000), no. 3, 451–486.

[23] ———, *Braid groups are linear*, Ann. of Math. (2) **155** (2002), no. 1, 131–156.

[24] R. J. Lawrence, *Homological representations of the Hecke algebra*, Comm. Math. Phys. **135** (1990), no. 1, 141–191.

[25] F. Luo, *On non-separating simple closed curves in a compact surface*, Topology **36** (1997), no. 2, 381–410.

[26] W. Magnus and A. Peluso, *On a theorem of V. I. Arnol'd*, Comm. Pure Appl. Math. **22** (1969), 683–692.

[27] T. Moriyama, *The mapping class group action on the homology of the configuration spaces of surfaces*, J. Lond. Math. Soc. (2) **76** (2007), no. 2, 451–466.

[28] L. Paris and D. Rolfsen, *Geometric subgroups of mapping class groups*, J. Reine Angew. Math. **521** (2000), 47–83.

[29] G. P. Scott, *Braid groups and the group of homeomorphisms of a surface*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **68** (1970), 605–617.