閉曲面上のハミルトン微分同相写像に対する C^∞ Closing Lemma

浅岡正幸

京都大学大学院理学研究科

1 Closing Lemma

X を位相空間，$\mathrm{Homeo}(X)$ を X 上の同相写像の全体のなす群とする．$f \in \mathrm{Homeo}(X)$ と整数 n に対して，$f^n \in \mathrm{Homeo}(X)$ を $f^0 = \mathrm{Id}_X$ (X 上の恒等写像)，$n \geq 1$ に対して，$f^n = f \circ f_{n-1}$, $f^{-n} = (f^n)^{-1}$ で定める．$x \in X$ に対して，集合 $\mathcal{O}(x, f) = \{f^n(x) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ を f による x の**軌道**という．

$x \in X$ が $f(x) = x$ をみたすとき，x は f の**不動点**であるという．また，ある $n \geq 1$ に対して $f^n(x) = x$ となるとき，x は f の**周期点**であるという．$\mathrm{Fix}(f)$, $\mathrm{Per}(f)$ でそれぞれ，f の不動点全体，周期点全体のなす集合を表わす．Lefschetz の不動点定理を思い出すまでもなく，$\mathrm{Fix}(f)$, $\mathrm{Per}(f)$ がどのような集合であるか，その周りで f がどのような振舞いをしているかは，f の挙動を知る上で最も重要なことの一つである [1]．しかし，X がコンパクト集合の場合でも，一般に f は周期点を持つとは限らない．

Example 1.1 (rigid rotation). $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ とする．$\theta \in \mathbb{R}$ に対して，$R_\theta \in \mathrm{Homeo}(S^1)$ を，$R_\theta([x]) = [x + \theta]$ で定める ($[x]$ は $x \in \mathbb{R}$ が代表する S^1 の元)．θ が有理数 q/p のときは，$\mathrm{Per}(R_\theta) = \mathrm{Fix}(R_\theta^p) = S^1$．しかし，$\theta$ が無理数のときは，R_θ は周期点を持たない．

周期性よりも弱い回帰性を持つ点の集合を定義しよう．$x \in X$ に対して，$\alpha(x, f)$, $\omega(x, f)$ をそれぞれ，点列 $(f^{-n}(x))_{n \geq 0}$, $(f^n(x))_{n \geq 0}$ の集積点全体のなす集合とする．集合 $\overline{\bigcup_{x \in X} \alpha(x, f) \cup \omega(x, f)}$ を f の極限集合と言い [2]，$L(f)$ で表わす．$x \in L(f)$ であることは，任意の x の近傍 U に対して，$y \in X$ で $U \cap \mathcal{O}(y, f)$ が無限集合となるものがあることと同値である．X がコンパクト

[1] 時間発展を研究対象とする力学系理論において，不動点や不変集合，不変測度といった時間発展しないものを中心的な役割を果たすことに，筆者は諧謔のようなものを感じるときがある．

[2] $\overline{S}$ で $S \subset X$ の閉包を表わす．

ならば，$L(f)$ は空集合ではない．$x \in X$ が**非遊走点**であるとは，任意の x の近傍 U に対して $n \geq 1$ で $U \cap f^n(U) \neq \emptyset$ をみたすものが存在することを言う．f の非遊走点全体を $\Omega(f)$ で表わす．これらの集合はみな f-不変で，

$$\mathrm{Fix}(f) \subset \mathrm{Per}(f) \subset L(f) \subset \Omega(f)$$

という包含関係が常に成り立つ．

Example 1.2. R_θ を Example 1.1 で定義した S^1 上の回転写像とすると，すべての $\theta \in \mathbb{R}$ に対して，$L(f) = \Omega(f) = S^1$.

(X, d) がコンパクト距離空間の場合には，

$$d_{C^0}(f, g) = \sup_{x \in X} \left[d(f(x), g(x)) + d(f^{-1}(x), g^{-1}(x)) \right]$$

として $\mathrm{Homeo}(X)$ 上の C^0**-距離**を定めれば，$\mathrm{Homeo}(X)$ は位相群の構造を持つ．回転写像の例では，θ を有理数 q/p で近似することで，R_θ を周期点が豊富にある写像 $R_{p/q}$ で (C^0 位相で) 近似できる．では，一般の場合も $f \in \mathrm{Homeo}(X)$ を周期点が豊富にある写像で近似できるだろうか．その疑問への一つの解答が次の C^0 closing lemma である．

Theorem 1.3 (C^0 closing lemma)**.** M をコンパクトな位相多様体 [3]，f を M からそれ自身への同相写像とする．$x_* \in \Omega(f)$ に対して，f に C^0 位相で収束する写像列 $(f_k)_{k \geq 1}$ と x_* に収束する M の点列 $(x_n)_{k \geq 1}$ で，すべての $k \geq 1$ について $x_k \in \mathrm{Per}(f_k)$ となるものが存在する．言い換えれば，$\Omega(f)$ の点の軌道を写像を C^0-摂動することで「閉じる」ことができる．

証明は簡単である．与えられた $\epsilon > 0$ に対して，x_* を中心とする半径が $\epsilon/2$ よりも小さい球体 U を考える．必要ならば ϵ をより小さいものに取り変えることで，U はある座標近傍に入っているとしてよい．$x_* \in \Omega(f)$ なので，$N \geq 1$ で，$f^n(U) \cap U = \emptyset$ $(0 \leq n \leq N-1)$，かつ，$U \cap f^N(U) \neq \emptyset$ となるものがある．$x_k \in f^{-N}(U) \cap U \neq \emptyset$ を取り，$y_k = f^N(x_k)$ とすると，$y_k \in U$ である．$h \in \mathrm{Homeo}(X)$ に対して，$\mathrm{supp}(h) = \overline{\{x \in X \mid h(x) \neq x\}}$ を h の**台**と言う．$h_k \in \mathrm{Homeo}(X)$ で $h_k(y_k) = x_k$，かつ，$\mathrm{supp}(h_k) \subset U$ であるものを取り，$f_k = h_k \circ f$ と置けば，$d_{C^0}(f_k, f) = d_{C^0}(h_k, \mathrm{Id}_M) < \epsilon$．また，$f^n(U) \cap \mathrm{supp}(h_k) = \emptyset$ $(n = 1, \ldots, N-1)$ であることから，

$$f_k^N(x_k) = (h_k \circ f)^N(x_k) = h_k \circ f^N(x_k) = h_k(y_k) = x_k.$$

すなわち，$x_k \in \mathrm{Per}(f_k)$ となり，Theorem 1.3 が証明できた．

C^0 closing lemma の系として次を示すのはそれほど難しくない [4]

[3]証明を見ればわかるようにコンパクト性は重要でない．

[4]後述する Pugh による C^1 general density theorem の証明 ([16]) を見よ．

Theorem 1.4 (C^0 general density theorem)**.** M をコンパクトな位相多様体とする．このとき，

$$\{f \in \mathrm{Homeo}(M) \mid \overline{\mathrm{Per}(f)} = \Omega(f)\}$$

は $\mathrm{Homeo}(M)$ の residual な部分集合 [5]．

M をコンパクトな (境界を持つかもしれない) 多様体とする．$1 \leq r \leq \infty$ に対して，M からそれ自身への C^r 級微分同相写像の全体のなす群 $\mathrm{Diff}^r(M)$ は C^r 位相という自然な位相を持つ．Pugh は $r = 1$ の場合に次を示した．

Theorem 1.5 (C^1 closing lemma [15, 16])**.** $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ と $x_* \in \Omega(f)$ に対して，f に C^1 位相で収束する写像列 $(f_k)_{k\geq 1}$ と x_* に収束する M の点列 $(x_n)_{k\geq 1}$ で，すべての $k \geq 1$ について $x_k \in \mathrm{Per}(f_k)$ となるものが存在する．

Corollary 1.6 (C^1 density theorem [16])**.**

$$\{f \in \mathrm{Diff}^1(M) \mid \overline{\mathrm{Per}(f)} = \Omega(f)\}$$

は $\mathrm{Diff}^1(M)$ の residual な部分集合．

C^1 closing lemma の証明の基本方針は同相写像の場合と同じであるが，h が半径 δ の球体に台を持ち，h と Id_M の C^1-距離が ϵ 以下のときには，$d_{C^0}(h, \mathrm{Id}_M) = O(\delta\epsilon)$ となり [6]．そのため，x_* のまわりの摂動だけでは周期軌道を得ることを期待できない．そこで，x_* を適切に選びなおして $x_*, f(x_*), \ldots, f^{[1/\epsilon]}(x_*)$ を中心とした半径 δ の球体における摂動が互いに干渉しあわないようにし，それらでの摂動によって x_* を $\delta\epsilon \cdot (1/\epsilon) = \delta$ くらい動かす，というのが Pugh のアイデアである．Pugh の方法は体積を保つ C^1 微分同相写像や，C^1 Hamiltonian 微分同相写像に対しても有効であり，これらに対しても C^1 closing lemma が証明されている ([17])．

$r \geq 2$ の場合には，半径 δ の球体に台を持ち，h と Id_M の C^1-距離が ϵ 以下であるような $h \in \mathrm{Diff}^r(M)$ については，$d_{C^0}(h, \mathrm{Id}_M) = O(\delta^r\epsilon)$ となり，一般には δ が制御できないために C^1 の場合の Pugh のアイデアではうまく行かない．実際，次に見るように，$r \geq 2$ の flow の場合にはいくつかの状況で反例が構成されている．多様体 M 上の flow Φ に対しても，同相写像の場合と同様に周期点集合 $\mathrm{Per}(\Phi)$, 非遊走点集合 $\Omega(f)$ が定義される．次の Gutierrez の例は，C^0 や C^1 の場合とは異なり，小さな台を持つ C^2-摂動では一般には新たに周期軌道を作ることができないことを示している．

[5] 位相空間 $\mathcal{V}$ の部分集合 $\mathcal{R}$ が **residual** であるとは，$\mathcal{V}$ の稠密開部分集合の列 $(\mathcal{U}_k)_{k\geq 1}$ で，$\bigcap_{k\geq 1} \mathcal{U}_k \subset \mathcal{R}$ となるものがあることを言う．Baire の定理より，このとき $\mathcal{R}$ は $\mathcal{V}$ の稠密部分集合となる．

[6] 例えば M が 1 次元の場合は簡単な計算からわかる．

Theorem 1.7 (Guttierez [4])**.** 2 次元トーラス $\mathbb{T}^2$ 上の C^∞ 級ベクトル場 X で，次をみたすものが存在する：

1. X の零点集合を S，X が生成する flow を Φ としたとき，$\Omega(\Phi) \setminus S \neq \emptyset$.
2. 任意のコンパクト集合 $K \subset \mathbb{T}^2 \setminus S$ に対して，台が K に含まれるような C^2 ベクトル場 Y が 0 に C^2 位相で十分近ければ，$X+Y$ が生成する flow は K を通る周期軌道を持たない.

一方，Herman は，Hamiltonian flow という設定においては，Pugh-Robinson による C^1 closing lemma ([17]) とは対照的に，$r \geq 7$ に対して C^r closing lemma が成り立たないことを示した．Hamiltonian flow は体積を保存するため，Poincaré の回帰定理 [7] より，$\Omega(f)$ は多様体全体となることに注意する．

Theorem 1.8 (Herman [6, 7][8])**.** $\mathbb{T}^3$ を 3 次元トーラスとし，$\mathbb{T}^3 \times [0,1]$ 上の関数 H を $H_0(x,s) = s$ で定める．$\mathbb{T}^3 \times [-1,1]$ 上の symplectic 形式 ω と，$C^7(\mathbb{T}^3 \times [-1,1])$ における H_0 の C^7-近傍 $\mathcal{U}$ で，次をみたすものが存在する：$H \in \mathcal{U}$ が生成する $(\mathbb{T}^3 \times [-1,1], \omega)$ 上の Hamiltonian flow を Φ_H とすると，すべての $c \in [-1/2, 1/2]$ に対して，$\mathrm{Per}(\Phi_H) \cap H^{-1}(c) = \emptyset$.

closing lemma を発展させた Mañé の C^1 ergoding closing lemma [13] や，林や Bonatti-Crovisier の C^1 connecting lemma [5, 2] は，C^1 級力学系の研究には欠かせないものとなっている．その一方で，上で見たように C^2 級以上の滑らかさでは Pugh のアイデアを使うことができず，いくつかの状況では反例もあるために，力学系の回帰性が例外的に統制しやすい閉曲面上の flow の場合 (Peixoto [14, Lemma 4]) を除いて，$r \geq 2$ の場合の C^r closing lemma は力学系理論における最も有名な未解決問題の一つであり続けている [9].

2　3 次元 Reeb flow に対する C^∞ closing lemma

2015 年に，より滑らかな力学系に対する closing lemma についての画期的な結果が入江 [10] によって与えられた．本節ではその結果を述べ，次節で証明のあらましを述べる．

$(2n+1)$ 次元の多様体 M 上の 1-形式 λ が**接触形式**であるとは，$\lambda \wedge (d\lambda)^n$ がすべての点で 0 でないことを言い，このとき，組 (M, λ) を**接触多様体**という．

Example 2.1. symplectic 多様体 (X, ω) と V の余次元 1 部分多様体 M について，M の近傍で定義されたベクトル場 X で，$\mathcal{L}_X \omega = \omega$, かつ，すべての

[7] 例えば，[8] の 1.4 節 Theorem 3. などを参照.
[8] Hofer-Zehnder[8] の 4.5 節にも読みやすい証明がある.
[9] Smale による「21 世紀の数学の問題」[18] にも挙げられている.

$x \in M$ で $X(x) \notin T_xM$ となるものがあるとき，$\lambda = \iota_X\omega$ は M 上の接触形式となることが知られており[10]，このとき，M は**接触型超曲面**と呼ばれる．例えば，$\mathbb{R}^{2n}$ 上の標準的な symplectic 形式 $\omega_0 = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i$ について，$\mathbb{R}^{2n}$ のコンパクト凸領域の境界となっているような余次元 1 部分多様体 M はこの条件をみたし，$(M, \iota_X\lambda)$ は $(2n-1)$ 次元接触多様体となる[11].

(M, λ) が接触多様体であるとき，M 上のベクトル場 X_λ で $\iota_X\lambda = 1$, $\iota_X(d\lambda) = 0$ となるものがただ一つ存在する．このベクトル場を λ の **Reeb ベクトル場**と呼ぶ．また，それが生成する flow を **Reeb flow** といい，Φ_λ と書く．上の symplectic 多様体 $V(V, \omega)$ の接触型超曲面 M の場合には，正則値 c の逆像が M となるような V 上の滑らかな関数 H の Hamiltonian ベクトル場 X_H を考えると，X_H は Reeb ベクトル場 X_λ の正の定数倍となる．すなわち，この状況では (M, λ) の Reeb flow と H の Hamiltonian flow の $H^{-1}(c)$ への制限は時間の取り替えを除いて一致する．Reeb flow のもう一つの重要な例は，測地流である．完備な Riemann 多様体 (M, g) の接束 TM には余接束 T^*M 上の自然な symplectic 構造から誘導される symplectic 構造が入る．単位接束 $SM = \{v \in TM \mid \|v\| = 1\}$ は TM の接触型超曲面となり，SM 上の Reeb flow Φ_λ が定まるが，Φ_λ は**測地流**，すなわち，$t \mapsto \Phi^t(v)$ を M に落したものが v を初期値とする測地線であるような flow と一致することが知られている．

入江 [10] は Reeb flow に関する closing lemma を次の形で証明した．

Theorem 2.2 (入江 [10]). (M, λ) を 3 次元閉接触多様体，f を M 上の恒等的に 0 ではない C^∞ 級非負関数とする．$s \in [0, 1]$ に対して，M 上の接触形式 λ_s を $\lambda_s = (1 + s \cdot f)\lambda$ で定め，その Reeb flow を Φ_{λ_s} と置くと，$s \in [0, 1]$ で，$\mathrm{Per}(\Phi_{\lambda_s}) \cap \mathrm{supp}(f) \neq \emptyset$ となるものが存在する．

$x \in M$ の近傍 U と，C^∞ 級 1-form のなす空間における λ の近傍 $\mathcal{U}$ に対して，f を $\mathrm{supp}(f) \subset U$, すべての $s \in [0, 1]$ に対して $\lambda_s \in \mathcal{U}$ となるように取れば，摂動の台が U に含まれるような Φ_λ のある摂動 $\Phi_{\lambda_s} \in \mathcal{U}$ が U を通る周期軌道を持つ．この意味で上の定理は，Reeb flow に対する C^∞ closing lemma (のかなり強い version) と見なすことができる．

Example 2.1 でも見たように，4 次元 symplectic 多様体の接触型超曲面上の Reeb flow はある Hamiltonianian flow の等エネルギー面への制限と同一視できる．Herman の反例から，単に Hamiltonian flow の制限であるだけでは closing lemma は成り立たない．つまり，Theorem 2.2 が成り立つためには，flow が Reeb flow であるという仮定が決定的に効いている．

Pugh が扱った C^1 の場合と同様に，closing lemma の系として general density theorem が得られる．

[10] $\mathcal{L}_X\omega$ は ω の X による Lie 微分，$\iota_X\lambda$ は内部積．
[11] この辺りのことについては [8] の 4.3 節を参照のこと．

Corollary 2.3 ([10])**.** (M, λ) を3次元閉接触多様体とする．

$$\{f \in C^\infty(M, \mathbb{R}) \mid \overline{\mathrm{Per}(\Phi_{e^f\lambda})} = M\}$$

は $C^\infty(M, \mathbb{R})$ の residual な部分集合．

測地流が単位接束上の Reeb flow であることを思い出すと，次を得ることができる．

Corollary 2.4 ([10])**.** (Σ, g) を2次元閉Riemann多様体とする．$f \in C^\infty(\Sigma, \mathbb{R})$ に対して，Riemann 計量 $e^f g$ に関する Σ 上のすべての閉測地線の和集合を $\Gamma(e^f g)$ としたとき，

$$\left\{f \in C^\infty(\Sigma, \mathbb{R}) \mid \overline{\Gamma(e^f g)} = \Sigma\right\}$$

は $C^\infty(\Sigma, \mathbb{R})$ の residual な部分集合．

測地流に対する C^1 closing lemma が証明されたのが2010年代に入ってから ([12]) であることを考えると，この測地流への応用は驚くべきものがある．

3 Embedded Contact Homology

本節では，Theorem 2.2 の証明のあらましを述べる．詳しいことは本人による優れた解説 [11] がすでにあるので，そちらを，もしくは論文 [10] を参照してほしい．入江が用いた手法は，Reeb flow に付随する enmedded contact homology (ECH) とよばれる不変量と接触形式が定める多様体の体積を結びつける Cristofaro-Gardiner-Hutchings-Ramos の結果 [3] に基づくものであり，Pugh が開発した C^1 closing lemma の証明とは全く異なる．

(M, λ) を3次元閉接触多様体，Φ_λ を λ の Reeb flow とする．$x \in \mathrm{Per}(\Phi_\lambda)$ について，T をその (最小) 周期，すなわち，$T = \min\{t > 0 \mid \Phi_\lambda^t(x) = x\}$ とすると，$(D\Phi_\lambda^T)_x : T_xM \to T_xM$ は Φ_λ の軌道方向に固有値1の固有ベクトルを持つ．また，Φ_λ は体積形式 $\lambda \wedge d\lambda$ を保つため，$\det(D\Phi_\lambda^T)_x = 1$ である．従って，$(D\Phi_\lambda^T)_x$ の残りの二つの固有値は (a) ともに実数で，その絶対値は一方が1より大きく，他方は1より小さい, (b) ともに絶対値1の互いに異なる複素数で，一方が他方の複素共役，(c) ともに1，または，ともに -1，のいずれかとなる．周期点 x は，(a) のとき**双曲型**，(b) のとき**楕円型**といい，すべての周期点がこれらの二つの場合のいずれかであるとき，Φ_λ は**非退化**であるという．以下，簡単のため，Φ_λ が非退化な場合であると仮定する [12]．

Φ_λ の周期軌道の全体を $\mathcal{P}(M, \lambda)$ と書くことにする [13]. $\gamma \in \mathcal{P}(M, \lambda)$ に対して，$[\gamma]$ で γ が代表する $H_1(M, \mathbb{Z})$ の元を，$\mathcal{A}(\gamma)$ で γ の最小周期を表わす．正

[12] generic な接触形式に対して，Reeb flow は非退化になることが知られている．
[13] 周期点集合ではなく $\{\mathcal{O}(x, \Phi_\lambda) \mid x \in \mathrm{Per}(\Phi_\lambda)\}$.

の整数の全体を $\mathbb{Z}_+$ と書き，$\mathbb{Z}_+ \times \mathcal{P}(M,\lambda)$ の有限部分集合 $\Gamma = \{(m_i,\alpha_i)\}_{i\in I}$ で次をみたすものを **ECH 生成元**と呼ぶ：

1. $i \neq j$ ならば，$\alpha_i \neq \alpha_j$.
2. α_i が双曲型周期軌道ならば，$m_i = 1$.

ECH 生成元 $\alpha = \{(m_i,\alpha_i)\}_{i\in I}$ に対して，$[\alpha] = \sum_{i\in I} m_i[\alpha_i]$, $\mathcal{A}(\alpha) = \sum_{i\in I} m_i\mathcal{A}(\alpha_i)$ と定める．空集合も ECH 生成元で，$[\emptyset] = 0$, $\mathcal{A}(\emptyset) = 0$ である．Φ_α が非退化であるという仮定から，$L > 0$ に対して，$\mathcal{A}(\alpha) < L$ となる ECH 生成元は有限個であることがわかる．$\Gamma \in H_1(M,\mathbb{Z})$ と $L > 0$ に対して，$[\alpha] = \Gamma$, $\mathcal{A}(\alpha) < L$ をみたす ECH 生成元たちが生成する自由 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-加群を $\mathrm{ECC}^L(M,\lambda,\Gamma)$ と書く．直積 $M \times \mathbb{R} = \{(x,t) \mid x \in M, t \in \mathbb{R}\}$ は symplectic 形式 $d(e^t\lambda)$ を持つので，それに適合した $M \times \mathbb{R}$ 上の概複素構造 J でよい性質のものを取ると，J-正則曲線を使って，$\partial_J^2 = 0$ をみたす準同型 $\delta_J : ECC^L(M,\lambda,\Gamma) \to ECC^L(M,\lambda,\Gamma)$ を定めることができる．さらに，そのホモロジー群 $\mathrm{ECH}^L(M,\lambda,\Gamma)$ は J の取り方によらないことや，L についての帰納極限 $\varinjlim \mathrm{ECH}^L(M,\lambda,\Gamma)$ が λ ではなく，それが定める平面場 $\xi = \mathrm{Ker}\,\lambda$ のみに依存することも示すことができる．そこでこれを $\mathrm{ECH}(M,\xi,\Gamma)$ と書く．

$L > 0$ に対して，$\iota^L : \mathrm{ECH}^L(M,\lambda,\Gamma) \to \mathrm{ECH}(M,\xi,\Gamma)$ を自然な準同型とする．$\sigma \in \mathrm{ECH}(M,\xi,\Gamma) \setminus \{0\}$ に対して，**ECH スペクトル不変量** $c_\sigma(M,\lambda)$ を

$$c_\sigma(M,\lambda) = \inf\{L > 0 \mid \sigma \in \mathrm{Im}\,\iota^L\}$$

で定める [14]．このとき次が成り立つ．

1. $\mathcal{A}(M,\lambda)_+ = \{0\} + \{\mathcal{A}(\gamma_1) + \ldots \mathcal{A}(\gamma_k) \mid k \geq 1, \gamma_1,\ldots,\gamma_k \in \mathcal{P}(M,\lambda)\}$ と定めると，すべての $\sigma \in \mathrm{ECH}(M,\xi,\Gamma)$ について，$c_\sigma(M,\lambda) \in \mathcal{A}(M,\lambda)_+$.[15]
2. $(f_k)_{k\geq 1}$ が定数関数 1 に C^0 収束するならば，$\lim_{k\to\infty} c_\sigma(M,f_k\lambda) = c_\sigma(M,\lambda)$.

$c_1(\xi)$ で $\xi = \mathrm{Ker}\,\lambda$ の第一 Chern 類を，$\mathrm{PD}(a)$ で $a \in H_1(M,\mathbb{Z})$ の Poincaré 双対を表わすことにすると，$c_1(\xi) + 2\mathrm{PD}(\Gamma)$ が $H^2(M,\mathbb{Z})$ のねじれ元であるときには，自然な方法で $\mathrm{ECH}(Y,\xi,\Gamma)$ に (相対的な)$\mathbb{Z}$ 次数を定めることができる．このとき，$\sigma \in \mathrm{ECH}(Y,\xi,\Gamma)$ の斉次的な元に対してその次数を $|\sigma|$ で表わすと, $\mathrm{ECH}(M,\xi,\Gamma)$ の元の斉次的な列 $(\sigma_k)_{k\geq 1}$ で，$\sigma_k \neq 0$, $|\sigma_k| \to \infty$ となるものがあることが知られている．ECH スペクトル不変量と $\lambda \wedge d\lambda$ の積分を結びつける次の結果が，Theorem 2.2 の鍵となる．

[14] この不変量は Hutcinhs[9] によって導入された．

[15] Φ_λ のすべての周期点が非退化ならば，$\mathcal{A}(M,\lambda_+)$ が $\mathbb{R}$ の閉部分集合となることから得られる．

Theorem 3.1 (Cristofaro-Gardiner-Hutchings-Ramos). $\mathrm{ECH}(M,\xi,\Gamma)$ の斉次的な元の列 $(\sigma_k)_{k\geq 1}$ で，$\sigma_k \neq 0$, $|\sigma_k| \to \infty$ となるものについて，

$$\lim_{k\to\infty} \frac{c_{\sigma_k}(M,\lambda)^2}{|\sigma_k|} = \int_M \lambda \wedge d\lambda.$$

以上の準備のもとに，Theorem 2.2 の証明のあらましを述べよう．まず，$\mathcal{A}(M,\lambda)_+$ は $\mathbb{R}$ の測度 0 集合であることが知られており，その事実から，$\mathcal{A}(M,\lambda)_+$ は nowhere dense な $\mathbb{R}$ の部分集合である．仮にすべての $s\in[0,1]$ に対して，$\mathrm{Per}(\Phi_{\lambda_s}) \cap \mathrm{supp}(f) = \emptyset$ であるとすると，Φ_{λ_s} の周期軌道に関する情報は Φ_λ のそれと変わらず，すべての $t\in[0,1]$ に対して $\mathcal{A}(M,\lambda_s)_+ = \mathcal{A}(M,\lambda)_+$ となる．スペクトル不変量の s に関する連続性と，$\mathcal{A}(M,\lambda)_+$ が nowhere dense であることから，$c_\sigma(M,\lambda_s) = c_\sigma(M,\lambda)$ がすべての $s\in[0,1]$ について成り立つ．Theorem 3.1 より，$\lambda_s \wedge d\lambda_s$ の M 上の積分は $\lambda\wedge d\lambda$ のそれと変らない．しかし，f が非負で $\mathrm{supp}(f)\neq\emptyset$ なので $\lambda_s\wedge d\lambda_s = (1+s\cdot f)^2\lambda\wedge d\lambda$ の M 上の積分は $\lambda\wedge d\lambda$ のそれよりも大きくなる．これは上で見たことと矛盾しており，$\mathrm{Per}(\Phi_{\lambda_s})\cap\mathrm{supp}(f)\neq\emptyset$ となる $s\in[0,1]$ があることになる．

4　閉曲面上の Hamilton 微分同相写像に対する C^∞ closing lemma

(境界を持つかもしれない)Σ をコンパクトな曲面，ω をその上の symplectic 形式とする．Σ 上の C^∞ 級関数 h に対して，その Hamilton ベクトル場 X_h を，$dh = -\iota_{X_h}\omega$ で定める．Σ からそれ自身への微分同相写像 φ が **Hamilton 微分同相写像**であるとは，$[0,1]\times\Sigma$ 上の関数 H と Σ のイソトピー $(\varphi_H^t)_{t\in[0,1]}$ で，$H_t(x) = H(t,x)$ と置いたとき，$\varphi_H^0 = \mathrm{Id}_\Sigma$，$\varphi_H^1 = \varphi$, $\partial_t\varphi_H^t = X_{H_t}$ $(t\in[0,1])$ となるものが存在することを言う．このような微分同相写像の全体 $\mathrm{Ham}(\Sigma,\omega)$ は C^∞ 位相により位相群となる．$f\in\mathrm{Ham}(\Sigma,\omega)$ は symplectic 形式 ω を保つため，Poincaré の回帰定理から，$\Omega(f) = \Sigma$ が成り立つ．

入江の Reeb flow に対する C^∞ closing lemma の応用として，講演者と入江は閉曲面の Hamilton 微分同相写像に対する C^∞ closing lemma を得た．

Theorem 4.1 (浅岡-入江 [1]). Σ を閉曲面，ω をその上の symplectic 形式とする．$f\in\mathrm{Ham}(\Sigma,\omega)$ と $x_*\in\Sigma$ に対して，f に収束する $\mathrm{Ham}(\Sigma,\omega)$ の元の列 $(f_k)_{k\geq 1}$ と x_* に収束する Σ の点列 $(x_k)_{k\geq 1}$ で，すべての $k\geq 1$ に対して $x_k\in\mathrm{Per}(f_k)$ となるようなものが存在する．

Corollary 4.2 (C^∞ general density theorem [1]). $\{f\in\mathrm{Ham}(\Sigma,\omega) \mid \overline{\mathrm{Per}(f)} = \Omega(f)\}$ は $\mathrm{Ham}(\Sigma,\omega)$ の residual な部分集合．

証明は2つのステップに分けられる．Σ' を境界を持つ向きづけ可能なコンパクト曲面，ω' をその上の symplectic 形式とする．Σ' 上の Hamilton 微分同相写像で，境界のある近傍では恒等写像であるようなもの全体のなす集合を $\mathrm{Ham}(\Sigma', \partial\Sigma', \omega')$ で表わす．最初のステップでは，次の $\mathrm{Ham}(\Sigma', \partial\Sigma', \omega')$ における C^∞ closing lemma を示す．

Lemma 4.3. $f \in \mathrm{Ham}(\Sigma, \omega)$ と空でない Σ の開部分集合 U に対して，f に収束する $\mathrm{Ham}(\Sigma, \omega)$ の元の列 $(f_k)_{k\geq 1}$ で，すべての $k \geq 1$ に対して $\mathrm{supp}(f_k \circ f^{-1}) \subset U$, $\mathrm{Per}(f_k) \cap U \neq \emptyset$ となるようなものが存在する．

この lemma では摂動も局所化できることを主張していることに注意．証明は f の suspension flow がある3次元閉接触多様体の Reeb flow に C^∞ 軌道同値の意味で埋め込むことができるという事実 ([1, Lemma 3.3]) を使えばそれほど難しくない．ここで，f の **suspension flow** とは，写像トーラス $M_f = \Sigma' \times \mathbb{R}/(x, s+n) \sim (f^n(x), s)$ 上の flowΨ_f で，$\Psi^t([x,s]) = [x, s+t]$ で定義されるものを言う．証明においては，Σ' が境界を持つことが本質的で使われている．実際，閉曲面上の Hamiltonian 微分同相写像の suspension flow は多くの場合 Reeb flow とは軌道同値にはならない [16]．

2つ目のステップでは，閉曲面 Σ 上の Hamilton 微分同相写像を変形して，境界を持つ閉曲面の場合に帰着させる．$f \in \mathrm{Ham}(\Sigma, \omega)$ と取るとまず閉曲面においては Arnold 予想が解決されているため，f は不動点 p を持つ．f を p の周りで摂動することで [17]，p の周りでは実解析的 [18]，かつ，p は双曲型，または，楕円型な不動点であるとしてよい．また，U を小さく取りなおして，p は U の閉包に入っていないとしてよい．p が楕円的なときは KAM 理論を，p が双曲的なときは Birkhoff の normal form の理論を用いることで，U を含むある Σ の f-不変な開集合 V と，境界を持つ曲面 Σ'，$g \in \mathrm{Ham}(\Sigma', \partial\Sigma', \omega')$, C^∞ 埋め込み $i : V \to \Sigma'$ で，$i^*\omega' = \omega$, $i \circ f = f' \circ i$ となるものを構成することができる [19]．最初のステップから，$i(U)$ における g の摂動で $i(U)$ を通る周期軌道を作ることができるので，$i(U)$ と U を同一視して，同じ摂動を f にもほどこせば，V の f-不変性から U も周期軌道が通り，証明が終わる．

5　いくつかの問題

閉曲面上の Hamilton 微分同相写像に対する C^∞ closing lemma の筆者たちの証明は，ダイナミクスを保つ形で曲面に穴を開けて，その suspension flow を Reeb flow に埋め込んだ後，Reeb flow に対する結果を適用する，というかな

[16] 例えば，$\mathbb{T}^2$ 上の恒等写像の suspension flow は Reeb flow と軌道同値にはならない．
[17] この部分でのみ，Theorem 4.1 の closing lemma における摂動の局所性が破れる．
[18] p が双曲型のとき，Birkhoff normal form の収束をいうのに必要．
[19] 詳細は [1] を参照．

り回りくどいものである．閉曲面上での議論のみによる別証明を見つけることは，何が本質的に効いているのかを知る上で意味があるだろう．

Question 5.1. ECH スペクトル不変量にあたるものを 2 次元 Hamilton 微分同相写像に対して定義し，その漸近挙動を見ることで，Theorem 4.1 の証明を再構成することはできるか？

Σ を向きづけ可能な閉曲面，ω をその上の symplectic 形式とし，$\mathrm{Diff}_0(\Sigma,\omega)$ を ω を保つ Σ 上の微分同相写像で恒等写像とイソトピックなもの全体のなす集合とする．Σ が球面でないときは，$\mathrm{Ham}(\Sigma,\omega)$ は $\mathrm{Diff}_0(\Sigma,\omega)$ の真部分集合であることが知られている．何が本質的に効いているのかという観点からは，次の問題も自然であろう．

Question 5.2. $\mathrm{Diff}_0(\Sigma,\omega)$ において C^∞ closing lemma は成り立つか？

最初の節で述べたように，C^1 closing lemma の様々な変種は，C^1 微分同相写像の研究における主要な道具となっている．ECH の理論を何らかの形で拡張することで，これらの C^∞ 版を閉曲面上の Hamilton 微分同相写像に対して示すことはできるだろうか．例えば，次のような問題に答えることはできるだろうか．

Question 5.3 (C^∞ ergodic closing lemma)**.** Σ を閉曲面，ω をその上の symplectic 形式とする．$f \in \mathrm{Ham}(\Sigma,\omega)$ と，Σ 上の ergodic な f-不変確率測度 μ に対して，f に収束する $\mathrm{Ham}(\Sigma,\omega)$ の元の列 $(f_k)_{k\geq 1}$ と Σ の点列 $(x_k)_{k\geq 1}$ で次の二つの条件をみたすものを常に取ることができるか？

1. すべての $k \geq 1$ に対して，x_k は f_k の周期点．
2. x_k の軌道 $\mathcal{O}(x_k, f_k)$ 上の一様分布が $k\to\infty$ で μ に弱収束する．

References

[1] M. Asaoka, K. Irie, A C^∞ closing lemma for Hamiltonian diffeomorphisms of closed surfaces, arXiv:1512.06336v1.

[2] C. Bonatti and S. Crovisier, Récurrence et généricité, *Invent. Math.*, vol. 158 (2004), no. 1, 33–104.

[3] D. Cristofaro-Gardiner, M. Hutchings, V. G. B. Ramos, The asymptotics of ECH capacities, *Invent. Math.*, vol. 199 (2015), 187–214.

[4] C. Gutierrez, A couner-example to a C^2 closing lemma *Ergod Th. & Dyn. Sys.*, vol.7 (1987), 509–530.

[5] S. Hayashi, Connecting invariant manifolds and the solution of the C^1-stability and Ω-stability conjectures for flows. *Ann. Math. (2)* vol. 145, 81–137 (1997); *Ann. Math. (2)* vol. 150, 353–356 (1999).

[6] M. R. Herman, Differentiabilite optimale et contre-exemples á la fermeture en topologie C^∞ des orbites recurrentes de flots Hamiltoniens, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Serie I. Mathématique*, vol. 313(1991), no.1, 49–51.

[7] M. R. Herman, Exemples de flots Hamiltoniens dont aucune perturbation en topologie C^∞ n'a d'orbites periodiques sur un ouvert de surfaces d'energies. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Serie I. Mathématique*, vol. 312(1991), no. 13, 989–994.

[8] H. Hofer and E.Zhender, Symplectic invariants and Hamiltonian dynamics. Birkhaüser Advanced Texts. Birkhaüser Verlag, Basel, 1994.

[9] M. Hutchings, Quantitative embedded contact homology, *J. Differential Geom.*, vol. 88 (2011), 231–266.

[10] K. Irie, Dense existence of periodic Reeb orbits and ECH spectral invariants. *J. Mod. Dyn.*, vol. 9 (2015), 357–363.

[11] 入江慶, A C^∞ closing lemma for three-dimensional Reeb flows via embedded contact homology, 2016 年度日本数学会年会 トポロジー分科会アブストラクト.

[12] L. Rifford, Closing geodesics in C^1 topology, *J. Differential Geom.*, vol. 91 (2012), 361–381.

[13] R. Mañé, An ergodic closing lemma. *Ann. of Math. (2)*, vol. 116 (1982), no. 3, 503–540.

[14] M. M. Peixoto, Structural stability on two-dimensional manifolds. *Topology*, vol. 1 (1962), no. 2, 101–120.

[15] C. C. Pugh, *The closing lemma*, Amer. J. Math., vol. 89(1967), no. 4, 956–1009.

[16] C. C. Pugh, *An improved closing lemma and a general density theorem*, Amer. J. Math., vol. 89 (1967), no. 4, 1010–1021.

[17] C. C. Pugh and C. Robinson, *The C^1 closing lemma, including Hamiltonians*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. vol. 3(1983), 261–313.

[18] S.Smale, Mathematical problems for the next century. *Math. Intelligencer*, vol. 20 (1998), no. 2, 7–15. (邦訳は「数学の最先端 21 世紀への挑戦 4」(シュプリンガー・ジャパン）所収)