漸近次元とその無限次元性

山内貴光　(愛媛大学大学院理工学研究科)*

概　要

大尺度幾何学の不変量である漸近次元の基本的性質を概説し, その無限次元性について, 位相次元論的立場から紹介する.

大尺度幾何学 (large scale geometry, coarse geometry) では, (非有界) 距離空間の局所的情報は無視され, その大域的構造が議論される. 直感的には, 遠くから眺めたときの広がり方が似ている 2 つの空間が同じ (粗同値 [1]) とみなされる. 例えば, 1 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ は, 整数全体のなす $\mathbb{R}$ の部分距離空間 $\mathbb{Z}$ と粗同値である. また, 有界集合は, 1 点集合と粗同値である.

有限生成群 G の有限な生成系 S に対して定義される G 上の語距離

$$d_S(g,h) = \min\{n : h = g\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n \text{ for some } \sigma_1,\ldots,\sigma_n \in S\cup S^{-1}\}, \quad g,h \in G,$$

(ただし, $S^{-1} = \{\sigma^{-1} : \sigma \in S\}$) の値は, 生成系 S のとり方に依存する. しかし, G の 2 つの有限な生成系 S と S' に対して, それらの語距離による 2 つの距離空間 (G, d_S) と $(G, d_{S'})$ は, 粗同値である. 従って, 有限生成群に関する粗同値について不変な性質は, 群の性質である. さらに, 有限生成群 G が測地距離空間 X (例えば, その Cayley グラフ) に余コンパクトかつ真性不連続で等長的に作用するとき, 語距離をもつ G は X と粗同値である (Milnor-Švarc の補題). この方法で, 群を幾何学的に扱うことができる.

漸近次元は, Gromov [15] によって導入された大尺度幾何学における基本的な不変量である. Yu [34] は, (語距離に関する) 漸近次元が有限な有限生成群に対して, 粗 Baum-Connes 予想が正しいこと, 従って Novikov 予想が正しいことを証明した [2]. この Yu の研究を機に, 距離空間, 特に有限生成群の漸近次元の研究が大きく進展した.

さらに Yu [35] は, Hilbert 空間に粗埋め込み可能で有界幾何をもち一様離散な距離空間に対して, 粗 Baum-Connes 予想が正しいことを証明した. また, Hilbert 空間に粗埋め込み可能な距離空間の性質として, 性質 A を導入した. 性質 A は群の従順性の一般化として導入された概念であるが, 漸近次元が有限で有界幾何をもつ距離空間は性質 A を満たす (Higson and Roe [20]). この意味で, 性質 A は漸近次元の有限次元性に近い無限次元概念と捉えることもできる.

漸近次元は, (位相) 次元論における被覆次元の大尺度版として導入された概念である. 次元論や連続写像の拡張理論の大尺度幾何への対応が Dranishnikov [7] によって明示的に与えられて以降, 次元論における定理の類似を考えることによる漸近次元の研究が進められ, 基本的な定理が証明されてきた. 本講演では, まず, 漸近次元とその基本的性質を概説する. その後, 漸近次元に関するいくつかの無限次元性を紹介し, 関連する問題を次元論的立場から考える.

本研究は科研費 (課題番号:26800040) の助成を受けたものである.
2010 Mathematics Subject Classification: 54F45, 20F69
キーワード：漸近次元, 位相次元
* 〒790-8577 松山市文京町 2 番 5 号　愛媛大学 大学院理工学研究科
e-mail: yamauchi.takamitsu.ts@ehime-u.ac.jp
[1] 定義 1.1 を参照.
[2] 大尺度幾何と粗 Baum-Connes 予想について解説した最近の文献として, [22], [25] がある.

1. 大尺度幾何と漸近次元

1.1. 粗同値

本節では, 大尺度幾何の基本事項を振り返る (cf. [22]). 以下, 距離空間を単に X で表した場合は, 距離 d_X をもつとする. 距離空間 X と $x \in X$, $R \geq 0$ に対して, x を中心とする R-閉球 $\{y \in X : d_X(x,y) \leq R\}$ を $B(x,R)$ で表す. また, 部分集合 $A \subset X$ は X の距離による部分距離空間であるとし,

$$\operatorname{diam} A = \sup\{d_X(x,x') : x, x' \in A\}$$

と定める. 距離空間 X が**有界**であるとは, $\operatorname{diam} X$ が有限であるときをいう. $\mathbb{N}$ は正の整数全体を, $|A|$ は集合 A の濃度を表す. 特に断らない限り, 写像に連続性は仮定しない. 粗同値は次で定義される.

定義 1.1. 距離空間 X が距離空間 Y と**粗同値** (coarsely equivalent) であるとは, 次の (1), (2) を満たす写像 $f : X \to Y$ が存在するときをいう.

(1) 次を満たす 2 つの関数 $\rho_-, \rho_+ : [0,\infty) \to [0,\infty)$ が存在する:

  (i) 任意の $x, x' \in X$ に対して, $\rho_-(d_X(x,x')) \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq \rho_+(d_X(x,x'))$.
  (ii) $\lim_{t\to\infty} \rho_-(t) = \infty$.

(2) $Y = \bigcup_{y \in f(X)} B(y,R)$ を満たす $R > 0$ が存在する.

上の条件 (1), (2) を満たす写像 $f : X \to Y$ を**粗同値写像** (coarse equivalence) という. また, 条件 (1) を満たす写像 $f : X \to Y$ を**粗埋め込み写像** (coarse embedding) といい, X から Y への粗埋め込み写像が存在するとき, X は Y へ**粗埋め込み可能**であるという.

注意 1.2. 定義 1.1 の (1) の ρ_+, ρ_- が共に定数項 0 の一次関数で, (2) の R が 0 として取れれば, X と Y はリプシッツ同型である. また, (1) の ρ_+, ρ_- が共に一次関数で取れれば, X と Y は擬等長である.

例 1.3. 実数直線 $\mathbb{R}$ は, 整数全体のなす $\mathbb{R}$ の部分距離空間 $\mathbb{Z}$ と粗同値である [3].

例 1.4. 有界距離空間 X は, 1 点からなる距離空間 $\{p\}$ と粗同値である [4].

例 1.5. 距離空間 X (または, その距離 d_X) が**一様離散** (uniformly discrete) であるとは, ある $R > 0$ が存在して, 任意の異なる $x, y \in X$ に対して $d_X(x,y) \geq R$ が成り立つときをいう. 任意の距離空間 X は, 一様離散で X と粗同値であるような部分距離空間を持つ [5].

粗同値が距離空間のクラスにおける同値関係であることは, 以下の命題 1.7 から確認できる. そのための用語を準備する.

---

[3] 写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ を, 各 $x \in \mathbb{R}$ に対して x を超えない最大の整数 $\lfloor x \rfloor$ に対応させる写像とする. 例えば, 定義 1.1 の (1) の $\rho_-, \rho_+ : [0,\infty) \to [0,\infty)$ を $\rho_-(t) = \lfloor t \rfloor$, $\rho_+(t) = \lfloor t \rfloor + 1$ で与え, (2) の R を $R = 1$ で与えれば, f が粗同値写像であることが確かめられる.

[4] 点 p に値をとる定値写像 $f : X \to \{p\}$ は粗同値写像である. 実際, 定義 1.1 の (1) の $\rho_-, \rho_+ : [0,\infty) \to [0,\infty)$ を $\rho_-(t) = \max\{t - \operatorname{diam} X, 0\}$, $\rho_+(t) = 0$ で与え, (2) の R を $R = 1$ で与えればよい.

[5] 異なる 2 点の距離が 1 以上離れている X の部分集合全体のなす集合族に包含関係で順序を入れる. Zorn の補題を用いて, この順序集合の極大元 D を取れば, D から X への包含写像は粗同値写像である.

定義 1.6. X と Y を距離空間とする.

(1) 写像 $f: X \to Y$ が **bornologous** であるとは, 次を満たす関数 $\rho_f: [0,\infty) \to [0,\infty)$ が存在するときをいう: 任意の $x, x' \in X$ に対して, $d_Y(f(x), f(x')) \leq \rho_f(d_X(x,x'))$.

(2) 2 つの写像 $f_1: X \to Y$, $f_2: X \to Y$ が**近い**とは, $\sup\{d_Y(f_1(x), f_2(x)) : x \in X\}$ が有限であるときをいう.

命題 1.7 (cf. [17, Lemma 2.2])**.** 距離空間の間の bornologous な写像 $f: X \to Y$ が粗同値写像であるための必要十分条件は, bornologous な写像 $g: Y \to X$ が存在して, $g \circ f$ と $\mathrm{id_X}$, $f \circ g$ と $\mathrm{id_Y}$ が共に近いことである. ここで id_X は X における恒等写像を表す.

例 1.8. G と H を有限生成群とし, S と S' をそれぞれ G, H の有限な生成系とし, d_S と $d_{S'}$ をそれぞれ S, S' から定まる語距離[6] とする. このとき, 写像 $f: G \to H$ が群準同型写像ならば, $f: (G, d_S) \to (H, d_{S'})$ は bornologous である[7]. 特に, G が H と同型ならば, 命題1.7より (G, d_S) は $(H, d_{S'})$ と粗同値である.

注意 1.9. 有限生成群の語距離は, 有界幾何[8] をもち左不変[9] で一様離散な距離である. 一般に, 可算群には, 有界幾何をもち左不変で一様離散な距離が存在し, それらの距離は互いに粗同値である (cf. [22, Example 1.4.7]). このことから, **以下, 可算群は, この性質をもつ距離空間と考える. 特に, 有限生成群は語距離による距離空間と考える.**

1.2. 漸近次元

まず, 次元論における被覆次元の定義を振り返る. 集合 X の部分集合族 $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ に対して, $\mathcal{U}$ が $\mathcal{V}$ を**細分する** ($\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$) とは, 各 $U \in \mathcal{U}$ に対して $U \subset V$ を満たす $V \in \mathcal{V}$ が存在するときをいう. また, $m(\mathcal{U}) = \sup\{|\{U \in \mathcal{U} : x \in U\}| : x \in X\}$ を, $\mathcal{U}$ の**重複度** (multiplicity) という[10].

定義 1.10. 正規空間[11] X が次の条件を満たすとき, X の**被覆次元** (covering dimension) は n 以下 ($\dim X \leq n$) であるという: 「X の任意の有限開被覆 $\mathcal{U}$ に対して, $\mathcal{V} \prec \mathcal{U}$ かつ $m(\mathcal{V}) \leq n+1$ を満たす X の有限開被覆 $\mathcal{V}$ が存在する.」また, $\dim X \leq n$ かつ $\dim X \not\leq n-1$ であるとき, X の被覆次元は n ($\dim X = n$) であるといい, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\dim X \not\leq n$ であるとき, X の被覆次元は無限 ($\dim X = \infty$) であるという.

距離空間 X の部分集合族 $\mathcal{U}$ に対して,

$$\mathrm{mesh}\,\mathcal{U} = \sup\{\mathrm{diam}\, U : U \in \mathcal{U}\}$$

とおく. 部分集合族 $\mathcal{U}$ が**一様有界**であるとは, $\mathrm{mesh}\,\mathcal{U}$ が有限であるときをいう. 被覆次元が n 以下であるとは, 任意に与えた有限開被覆よりも「細かい」有限開被覆で, 重複度が $n+1$ 以下のものが存在するということであった. この定義の 「細かい」を「粗い」に替え, 開被覆の有限性を除いて一様有界性を課した概念が漸近次元である[12].

---

[6] 序文を参照.

[7] 定義 1.6 (1) の $\rho_f: [0,\infty) \to [0,\infty)$ を, $\rho_f(t) = \max\{d_{S'}(e_H, f(s)) : s \in S\} \cdot t$ で与えればよい.

[8] 一様離散な距離空間 X (または, その距離 d_X) が**有界幾何** (bounded geometry) をもつとは, 任意の $R > 0$ に対して $N(R) \in \mathbb{N}$ が存在し, 各 $x \in X$ に対して $|B(x,R)| \leq N(R)$ であるときをいう.

[9] 群 G 上の距離 d が**左不変** (left-invariant) であるとは, 任意の $g, h, \gamma \in G$ に対して $d(\gamma g, \gamma h) = d(g,h)$ が成り立つときをいう.

[10] $m(\mathcal{U}) \in \mathbb{N}$ であるとき, 任意の $x \in X$ は高々 $m(\mathcal{U})$ 個の $\mathcal{U}$ のメンバーにしか含まれない.

[11] 被覆次元を定義す際には, 通常, 位相空間に正規性を仮定する. 距離空間やコンパクトな Hausdorff 空間は正規空間である.

[12] 実際に Gromov が与えた定義は, この後に述べる定理 1.16 の (b) の条件である.

定義 1.11 ([15])**.** 距離空間 X が次の条件を満たすとき, X の**漸近次元** (asymptotic dimension) は n 以下 ($\operatorname{asdim} X \leq n$) であるという: 「$X$ の任意の一様有界な開被覆 $\mathcal{U}$ に対して, $\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$ かつ $m(\mathcal{V}) \leq n+1$ を満たす X の一様有界な開被覆 $\mathcal{V}$ が存在する.」また, $\operatorname{asdim} X \leq n$ かつ $\operatorname{asdim} X \not\leq n-1$ であるとき, X の漸近次元は n ($\operatorname{asdim} X = n$) であるといい, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\operatorname{asdim} X \not\leq n$ であるとき, X の漸近次元は無限 ($\operatorname{asdim} X = \infty$) であるという.

注意 1.12 (cf. [2, Propositions 22 and 23])**.** 距離空間 X が距離空間 Y へ粗埋め込み可能ならば, $\operatorname{asdim} X \leq \operatorname{asdim} Y$. よって, X が Y と粗同値ならば, $\operatorname{asdim} X = \operatorname{asdim} Y$. 従って, 漸近次元は大尺度幾何学における不変量である.

例 1.13. 距離空間 X が有界ならば, $\operatorname{asdim} X \leq 0$[13].

例 1.14. $\operatorname{asdim} \mathbb{R} = 1$[14]. 従って, $\operatorname{asdim} \mathbb{Z} = 1$.

例 1.15 (cf. [2, p.1270])**.** サイクルをもたない連結な 1 次元単体複体を**木** (tree) という. 木は, 1 辺の長さを 1 とする辺長距離 (edge-length metric) をもつとする. このとき, 任意の木の漸近次元は 1 以下である. 階数 n の自由群 $\mathbb{F}_n$ の Cayley グラフは木であり, $\mathbb{F}_n$ は $\mathbb{Z}$ と等長な部分距離空間を含むので, その漸近次元は 1 である.

以下, 漸近次元の基本的性質を, 次元論の定理と比較しながら紹介する. 詳しくは [2], [3] を参照されたい.

正の数 R に対して, 距離空間 X の部分集合族 $\mathcal{U}$ が **R-disjoint** であるとは, 任意の異なる $U, U' \in \mathcal{U}$ に対して, $\inf\{d_X(x, x') : x \in U, x' \in U'\} \geq R$ が成り立つときをいう. 次元論における Ostrand の定理 (cf. [14, Theorem 3.2.4]) の類似として, 次が成り立つ.

定理 1.16 (cf. [3, Theorem 2.1.2])**.** 距離空間 X と $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して, 次は同値である.

(a) $\operatorname{asdim} X \leq n$.

(b) 任意の $R > 0$ に対して, 次の (1)–(3) を満たす $n+1$ 個の X の部分集合族 $\mathcal{U}_0, \ldots, \mathcal{U}_n$ が存在する.

(1) $\bigcup_{i=0}^{n} \mathcal{U}_i$ は X を被覆する.

(2) 各 $\mathcal{U}_i$ は R-disjoint である.

(3) 各 $\mathcal{U}_i$ は一様有界である.

次元論における countable sum theorem[15] の類似として, 次が成り立つ.

定理 1.17 ([1, Finite Union Theorem])**.** 距離空間 X の部分集合 A, B に対して, $\operatorname{asdim}(A \cup B) \leq \max\{\operatorname{asdim} A, \operatorname{asdim} B\}$.

定理 1.17 における部分集合の数を単に可算無限にすることはできない[16]. しかし, 以下の条件を満たす集合族に対しては, 定理 1.17 を一般化できる.

[13] $\mathcal{V} = \{X\}$ が一様有界な X の開被覆であることから従う.

[14] $\mathbb{R}$ の一様有界な開被覆 $\mathcal{U}$ を任意に与え, $S = \operatorname{mesh} \mathcal{U}$ とおく. 例えば, 開区間からなる集合族 $\mathcal{V} = \{(3(n-1)S, 3(n+1)S) : n \in \mathbb{Z}\}$ は, 重複度 2 の $\mathbb{R}$ の開被覆で $\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$ を満たすので, $\operatorname{asdim} \mathbb{R} \leq 1$ を得る. $\operatorname{asdim} \mathbb{R} \not\leq 0$ は $\mathbb{R}$ の連結性から従う.

[15] 正規空間 X における任意の閉部分空間の列 $\{F_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ に対して, $\dim(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i) \leq \sup\{\dim F_i : i \in \mathbb{N}\}$ (cf. [14, Theorem 3.1.8]).

[16] 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して $\operatorname{asdim}\{n\} = 0$ だが, $\operatorname{asdim} \mathbb{Z} = 1$ である.

定義 1.18. 距離空間 X の部分集合族 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ の**漸近次元が一様に** n **以下**であるとは, 任意の $R>0$ に対して, 次を満たす $S>0$ が存在するときをいう: 任意の $\alpha\in A$ に対して, 次の (1)–(3) を満たす $n+1$ 個の X_α の部分集合族 $\mathcal{U}_0^\alpha, \ldots, \mathcal{U}_n^\alpha$ が存在する.

(1) $\bigcup_{i=0}^n \mathcal{U}_i^\alpha$ は X_α を被覆する.

(2) 各 $\mathcal{U}_i^\alpha$ は R-disjoint である.

(3) 任意の $i\in\{0,1,\ldots,n\}$ に対して, $\mathrm{mesh}\,\mathcal{U}_i^\alpha \le S$.

定義 1.19. 距離空間 X の部分集合列 $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ が **coarsely disjoint** であるとは, 任意の $R>0$ に対して, 集合族 $\{X_i\}_{i\ge i_0}$ が R-disjoint となるような $i_0\in\mathbb{N}$ が存在するときをいう.

定理 1.20 (cf. [1, Theorem 1])**.** 距離空間 X の部分集合列 $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ が coarsely disjoint であり, その漸近次元が一様に n 以下であるとする. このとき, $\mathrm{asdim}\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} X_i\right)\le n$.

次元論における Cartesian product theorem[17] と同様の定理が, 漸近次元についても成り立つ.

定理 1.21 ([8, Proposition 5], [3, Corollary 14], [5, Theorem 2.5])**.** 2 つの空でない距離空間 X, Y に対して, $\mathrm{asdim}\,(X\times Y)\le \mathrm{asdim}\,X+\mathrm{asdim}\,Y$[18].

例 1.22. $\mathrm{asdim}\,\mathbb{R}^n = n$[19]. 従って, $\mathrm{asdim}\,\mathbb{Z}^n = n$.

次元論における theorem on dimension-lowering mappings[20] の類似の定理として, 次が成り立つ.

定理 1.23 ([5, Theorem 4.11])**.** 距離空間の間の bornologous な写像 $f: X\to Y$ に対して, $\mathrm{asdim}\,X\le \mathrm{asdim}\,Y+\sup\{\mathrm{asdim}\,f^{-1}(B) : B\subset Y,\ \mathrm{asdim}\,B=0\}$.

可算群の拡大に対して, 次が成り立つ.

定理 1.24 ([10, Theorem 2.3], cf. [5, Theorem 5.4])**.** 可算群 K, G, H の間の短完全列 $0\to K\to G\to H\to 0$ が与えられたとき, $\mathrm{asdim}\,G\le \mathrm{asdim}\,H+\mathrm{asdim}\,K$.

2. 漸近次元の無限次元性

2.1. 有限次元性に近い無限次元性と, それらの関係

序文で紹介した Yu の性質 A は, 次で定義される [21].

定義 2.1 ([35])**.** 一様離散な距離空間 X が**性質 A** (property A) を満たすとは, 任意の $\varepsilon>0$ と $R>0$ に対して, 次の (1), (2) を満たす $S>0$ と $X\times\mathbb{N}$ の有限部分集合からなる族 $\{A_x : x\in X\}$ が存在するときをいう.

(1) $d_X(x,y)\le R$ ならば $|A_x\triangle A_y|\le\varepsilon|A_x\cap A_y|$[22].

(2) 各 $x\in X$ に対して, $A_x\subset B(x,S)\times\mathbb{N}$.

---

[17] 2 つの空でない距離空間 X, Y に対して, $\dim(X\times Y)\le\dim X+\dim Y$ (cf. [14, Theorem 3.4.9]).
[18] ただし, $X\times Y$ は $d_{X\times Y}((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = d_X(x_1,x_2)+d_Y(y_1,y_2)$ で定まる距離をもつとする.
[19] $\mathrm{asdim}\,\mathbb{R}^n\le n$ は例 1.14 と定理 1.21 から従う. $\mathrm{asdim}\,\mathbb{R}^n\not\le n-1$ は $\dim[0,1]^n\not\le n-1$ であることを用いて示せる (cf. [22, Example 2.2.6]).
[20] 正規空間 X から距離空間 Y への連続な閉写像 $f: X\to Y$ に対して, $\dim X\le\dim Y+\sup\{\dim f^{-1}(\{y\}) : y\in Y\}$ (cf. [14, Theorem 3.3.10]).
[21] 性質 A の基本的性質については [31] が詳しい. パラコンパクト性と対比した研究として [6] がある.
[22] ただし, $A_x\triangle A_y = (A_x\setminus A_y)\cup(A_y\setminus A_x)$.

定理 2.2 ([35, Theorem 2.2])**.** 性質 A を満たす一様離散な距離空間は, Hilbert 空間へ粗埋め込み可能である.

本節では, 漸近次元の有限次元性より弱く, 性質 A より強く, 粗同値で不変な 2 種類の性質について考える. 1 つ目は, 次元論における性質 C (property C)[23] の大尺度幾何学への対応概念として Dranishnikov [7] によって導入された漸近的性質 C である.

定義 2.3 ([7])**.** 距離空間 X が**漸近的性質 C** (asymptotic property C) を満たすとは, 任意の正の数の列 $R_0 < R_1 < \cdots$ に対して, 次の (1)–(3) を満たす有限個の X の部分集合族 $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_k$ が存在するときをいう.

(1) $\bigcup_{i=0}^{k} \mathcal{U}_i$ は X の被覆である.

(2) 各 $\mathcal{U}_i$ は R_i-disjoint である.

(3) 各 $\mathcal{U}_i$ は一様有界である.

定理 2.4 ([7, Theorem 7.11])**.** 漸近的性質 C を満たし有界幾何をもつ距離空間は, 性質 A を満たす.

注意 2.5. 定理 1.16 より, 漸近次元が有限な距離空間は, 漸近的性質 C を満たす. 漸近次元が無限で漸近的性質 C を満たす距離空間の例は, Radul [24] によって与えられた.

2 つ目は 多様体の位相的剛性の研究において Guentner, Tessera and Yu [18] によって導入された有限分解複雑性である[24].

定義 2.6. 距離空間 X の 2 つの部分集合族 $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ と $R > 0$ に対して, $\mathcal{F}$ が $\mathcal{E}$ を R**-分割する** ($\mathcal{E} \xrightarrow{R} \mathcal{F}$) とは, 任意の $E \in \mathcal{E}$ に対して, $E = \bigcup(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2)$ を満たす R-disjoint な $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}$ が存在するときをいう.

定義 2.7 ([18])**.** X を距離空間とする. $\mathcal{F}_0 = \{X\}$ とおき, プレーヤー A, B による次のゲームを考える.

ラウンド i　プレーヤー A は ($\mathcal{F}_{i-1}$ を見て) $R_i > 0$ を与える. プレーヤー B は (R_i を見て) $\mathcal{F}_{i-1}$ を R_i-分割する X の部分集合族 $\mathcal{F}_i$ を与える.

$$\{X\} = \mathcal{F}_0 \xrightarrow{R_1} \mathcal{F}_1 \xrightarrow{R_2} \mathcal{F}_2 \xrightarrow{R_3} \cdots \xrightarrow{R_i} \mathcal{F}_i \xrightarrow{R_{i+1}} \cdots.$$

プレーヤー B が, あるラウンド k で一様有界な $\mathcal{F}_k$ を与えることができたとき, B の勝利とする. そうでないとき, プレーヤー A の勝利とする.

このゲームにおいてプレーヤー B が必勝法をもつとき, X は**有限分解複雑性** (finite decomposition complexity, FDC) をもつという.

[23] コンパクト距離空間 X が (Haver の) **性質 C** [16] を満たすとは, 任意の正の数の列 $\varepsilon_0 > \varepsilon_1 > \cdots > 0$ に対して, 次の (1)–(3) を満たす有限個の X の部分集合族 $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_k$ が存在するときをいう.

(1) $\bigcup_{i=0}^{k} \mathcal{U}_i$ は X の被覆である.

(2) 各 $\mathcal{U}_i$ は互いに素である. すなわち, 異なる $U, U' \in \mathcal{U}_i$ に対して $U \cap U' = \varnothing$ である.

(3) 任意の $i \in \{0, 1, \ldots, k\}$ に対して, $\mathrm{mesh}\,\mathcal{U}_i < \varepsilon_i$ である.

0 次元空間の可算和で表されるコンパクト距離空間, 特に有限次元コンパクト距離空間は, 性質 C を満たす. 性質 C を満たすコンパクト距離空間が局所可縮であれば, ANR である [16, Proposition 4]. このことから, 性質 C は連続写像の拡張に関して重要な性質である.

[24] 例えば, 次が証明された [18, Theorem 4.12]: 基本群が有限分解複雑性をもつ非球面的閉多様体 M に対して, 次を満たす $n \in \mathbb{N}$ が存在する: M と閉多様体 N がホモトピー同値ならば, $M \times \mathbb{R}^n$ と $N \times \mathbb{R}^n$ は同相である.

定理 2.8 ([19, Theorems 4.1 and 4.3])**.** 漸近次元が有限な距離空間は, FDC をもつ. FDC をもち有界幾何をもつ一様離散な距離空間は, 性質 A を満たす.

注意 2.9. FDC は可算群の部分群や可算直和, および拡大をとる操作で閉じており, 従って, 初等従順群[25] は FDC をもつ [19]. 従順群が FDC をもつか, 特に, 初等従順群でない従順群の例である Grigorchuk 群が FDC をもつかは, 未解決である ([19, Question 5.1.3]).

以上のことから, 有界幾何をもつ一様離散な距離空間に対して, 次が成り立つ.

$$\begin{tikzcd}
 & \text{FDC} \arrow[dr, Rightarrow] & \\
\text{漸近次元が有限} \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & \text{性質 A} \\
 & \text{漸近的性質 C} \arrow[ur, Rightarrow] &
\end{tikzcd}$$

注意 2.9 より, 整数群 $\mathbb{Z}$ の可算直和 $\bigoplus_{i=1}^{\infty}\mathbb{Z}$ は FDC をもつ. ここで, 群 $\bigoplus_{i=1}^{\infty}\mathbb{Z}$ における (注意 1.9 の) 距離は, 次で与えられる.

$$d((x_i),(y_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} i|x_i - y_i|, \quad (x_i),(y_i) \in \bigoplus_{i=1}^{\infty}\mathbb{Z}.$$

任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\mathbb{Z}^n$ は $\bigoplus_{i=1}^{\infty}\mathbb{Z}$ へ粗埋め込み可能なので, 注意 1.12 と例 1.22 より $\operatorname{asdim}(\bigoplus_{i=1}^{\infty}\mathbb{Z}) = \infty$ である. $\bigoplus_{i=1}^{\infty}\mathbb{Z}$ が漸近的性質 C を満たさなければ, FDC と漸近的性質 C は異なる概念であることが示される. このことから, Dranishnikov and Zarichnyi [11] は, 次の問題を提起した.

問題 2.10 ([11, Question 4.3])**.** 群 $\bigoplus_{i=1}^{\infty}\mathbb{Z}$ は漸近的性質 C 満たすか.

問題 2.10 に対して, 肯定的な解答を得た.

定理 2.11 ([33])**.** 群 $\bigoplus_{i=1}^{\infty}\mathbb{Z}$ は漸近的性質 C を満たす.

定理 2.11 により, 漸近次元が無限で漸近的性質 C を満たす可算群の存在が示されたことになる (cf. 注意 2.5). 一方, 問題 2.10 が肯定的であったので, 次は未解決のままである.

問題 2.12. FDC をもち漸近的性質 C を満たさない可算群 (または距離空間) は存在するか[26].

注意 2.13. 整数群 $\mathbb{Z}$ の漸近次元は 1 であり, 階数 n の自由群 $\mathbb{F}_n$ の漸近次元も 1 である (例 1.15). しかし, 階数 2 の自由群からなる可算直和 $\bigoplus_{i=1}^{\infty}\mathbb{F}_2$ が漸近的性質 C を満たすかは, 分かっていない[27]. また, 漸近的性質 C は群の拡大で閉じるか分かっていない. 特に, $\mathbb{Z}$ の wreath 積 $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z} = (\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{Z}$ が漸近的性質 C を満たすか分かっていない.

注意 2.9 より, $\bigoplus_{i=1}^{\infty}\mathbb{F}_2$ と $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ は FDC をもつ. もし, これらいずれかが漸近的性質 C を満たさないことが示されれば, FDC をもち漸近的性質 C を満たさない可算群の存在が示されたことになる. 一方, 群 $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ は $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$ を部分群として含むので, その漸近次元は無限である. もし, $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ が漸近的性質 C を満たすことが示されれば, 漸近次元が無限で漸近的性質 C を満たす有限生成群の存在が示されたことになる.

[25] 有限群と可換群を含み, 直和と拡大をとる操作で閉じる可算群のクラスの中で最小なものに属する群.
[26] 「漸近的性質 C$\not\Rightarrow$FDC」「性質 A$\not\Rightarrow$FDC」「性質 A$\not\Rightarrow$ 漸近的性質 C」も分かっていないと思われる.
[27] 定理 2.11 の証明では, $\mathbb{Z}$ における異なる長さの区間をずらして考えることにより, 求める集合族の列を構成している. この方法が $\mathbb{F}_2$ に直接適用できない.

2.2. Higsonコロナの次元と無限次元性

距離空間の大尺度幾何を反映するコンパクトなHausdorff空間として, Higsonコロナがよく知られている (cf. [26, Section 5.1]).

定義 2.14. 固有距離空間[28] X 上の有界な連続関数 $f : X \to \mathbb{R}$ が次の条件を満たすとき, f を **Higson関数**という: 任意の $\varepsilon > 0$ と $R > 0$ に対して, X の有界集合 B が存在し, $d_X(x_1, x_2) < R$ を満たす任意の $x_1, x_2 \in X \setminus B$ に対して $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

固有距離空間 X に対して, 次の条件を満たす X のコンパクト化 hX が存在する[29]: 任意の有界な連続関数 $f : X \to \mathbb{R}$ に対して,

$$f \text{ は } hX \text{ 上の連続関数へ拡張される} \iff f \text{ は Higson 関数である.}$$

この hX を X の **Higsonコンパクト化**といい, その境界 (剰余) $\nu X = hX \setminus X$ を X の **Higsonコロナ**という.

2つの距離空間 X と Y が粗同値であれば, νX と νY は同相である (cf. [26, Corollary 5.12]). 距離空間の漸近次元と, そのHigson コロナの被覆次元には, 次の関係がある[30].

定理 2.15 ([9, Theorem 1.1])**.** 固有距離空間 X に対して, $\dim \nu X \leq \operatorname{asdim} X$.

定理 2.16 ([7, Theorem 6.2])**.** 固有距離空間 X の漸近次元が有限であるとき, $\operatorname{asdim} X$ と $\dim \nu X$ は一致する.

Dranishnikov [7] は, 次の問題を提起した.

問題 2.17 ([7, Problem 1])**.** 任意の固有距離空間 X に対して, $\operatorname{asdim} X = \dim \nu X$ は成り立つか. もしくは, $\operatorname{asdim} X = \infty$ かつ $\dim \nu X < \infty$ を満たす固有距離空間 X は存在するか.

この問題は未解決である. 例えば, X が性質A, 漸近的性質C, FDC等の性質を満たすときに, $\operatorname{asdim} X = \dim \nu X$ が成り立つかも分かっていない[31].

以下, $\dim \nu X < \operatorname{asdim} X$ を満たす X の条件を考える. X を漸近次元が無限で一様離散な固有距離空間とする. また, X は漸近次元が n $(\in \mathbb{N})$ の部分距離空間 Y をもつとする. このとき, Y の hX における閉包 $\mathrm{cl}_{hX} Y$ は, Y のHigsonコンパクト化である [9, Theorem 1.4]. よって, 定理2.16より次が成り立つ.

$$n = \operatorname{asdim} Y = \dim \nu Y = \dim(\mathrm{cl}_{hX} Y \setminus Y) \leq \dim \nu X^{32}.$$

従って, 次を得る.

事実 2.18. $\operatorname{asdim} X = \infty$ かつ $\dim \nu X = n < \infty$ を満たす固有距離空間 X は, 漸近次元が有限で n より大きい部分距離空間をもたない[33].

このことから, Dranishnikovの問題2.17より弱い問題として, 次が考えられる.

---

[28] 任意の有界閉集合がコンパクトである距離空間を**固有距離空間**という. 有界幾何をもち一様離散な距離空間は固有距離空間である.

[29] hX の構成については, 例えば [21, Section 1] を参照. 複素数値Higson関数全体のなす C^* 環に対して, Gelfand-Naimarkの定理を用いても定義される [26, Section 5.1].

[30] Higsonコロナの被覆次元の特徴付けとして, [4, Corollary 6], [13, Corollary 7.2] がある.

[31] 関連する研究に [12] がある.

[32] 正規空間 X の任意の閉部分空間 F に対して, $\dim F \leq \dim X$ (cf. [14, Theorem 3.1.3]).

[33] 任意の距離空間 X は, 一様離散で X と粗同値であるような部分距離空間を持つことに注意する (例1.5).

問題 2.19. 次の (1), (2) を満たす固有距離空間 X と $n \in \mathbb{N}$ は存在するか:

(1) $\operatorname{asdim} X = \infty$.

(2) X の任意の部分距離空間 Y に対して, $\operatorname{asdim} Y < \infty$ ならば $\operatorname{asdim} Y \leq n$.

注意 2.20. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\mathbb{Z}^n$ を部分群として含む $\bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$, Thompson 群 F は, 問題 2.19 の例の候補にならない. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\mathbb{Z}^n$ は Grigorchuk 群へ粗埋め込み可能なので [29], Grigorchuk 群も候補にならない.

注意 2.21. グラフの最短のサイクルの長さを, そのグラフの**内周** (girth) という. 任意の $i \in \mathbb{N}$ に対して, 内周 $i+2$ の 3 正則グラフ X_i が存在する [28]. これらのグラフ [34] を coarsely disjoint に並べた和集合 $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i$ を X とすると, X は性質 A を満たさない [32]. 従って, X の漸近次元は無限である. この X が漸近次元 2 の部分距離空間をもつかは, 分かっていないと思われる [35].

注意 2.22. Walsh [30] は, 次の (1), (2) を満たすコンパクト距離空間を構成した.

(1) $\dim X = \infty$.

(2) X の任意の部分空間 Y に対して, $\dim Y < \infty$ ならば $\dim Y \leq 0$.

この性質を満たす空間は, 遺伝的無限次元空間 (hereditarily infinite-dimensional space) と呼ばれる.

参考文献

[1] G. Bell and Dranishnikov, *On asymptotic dimension of groups*, Algebr. Geom. Topol. **1** (2001), 57–71.

[2] G. Bell and A. Dranishnikov, *Asymptotic dimension*, Topology Appl. **155** (2008), 1265–1296.

[3] G. Bell and A. Dranishnikov, *Asymptotic dimension in Będlewo*, Topology Proc. **38** (2011), 209–236.

[4] N. Brodskiy and J. Dydak, *Coarse dimensions and partitions of unity*, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Math. RACSAM **102** (2008), 1–19.

[5] N. Brodskiy, J. Dydak, M. Levin and A. Mitra, *A Hurewicz theorem for the Assouad-Nagata dimension*, J. Lond. Math. Soc. (2) **77** (2008), 741–756.

[6] M. Cencelj, J. Dydak and A. Vavpetič, *Coarse amenability versus paracompactness*, J. Topol. Anal. **6** (2014), 125–152.

[7] A. Dranishnikov *Asymptotic Topology*, Russian Math. Surveys **55** (2000), 1085–1129.

[8] A. Dranishnikov and T. Januszkiewicz, *Every Coxeter group acts amenably on a compact space*, Topology Proc. **24** (1999), 135–141.

[9] A. N. Dranishnikov, J. Keesling, V. V. Uspenskij, *On the Higson corona of uniformly contractible spaces*, Topology **37** (1998), 791–803.

[10] A. Dranishnikov and J. Smith, *Asymptotic dimension of discrete groups*, Fund. Math. **189** (2006), 27–34.

[11] A. Dranishnikov and M. Zarichnyi, *Asymptotic dimension, decomposition complexity, and Havar's property C*, Topology Appl. **169** (2014), 99–107.

[34] 1 辺の長さを 1 とする辺長距離 (edge-length metric) をもつとする.

[35] この X は漸近次元 1 の部分距離空間をもつ. 実際, 各 $i \in \mathbb{N}$ に対して $\operatorname{diam} X_i = d_{X_i}(u_i, v_i)$ を満たす 2 頂点 u_i, v_i を結ぶ最短の道 (path) を Y_i とし, $Y = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} Y_i$ とおくと, 定理 1.20 と $\lim_{i \to \infty} \operatorname{diam} Y_i = \infty$ であることから, $\operatorname{asdim} Y = 1$ を得る.

[12] J. Dydak, *Coarse amenability and discreteness*, J. Aust. Math. Soc., to appear.

[13] J. Dydak and A. Mitra, *Large scale absolute extensors*, preprint, arXiv:1304.5987.

[14] R. Engelking, *Theory of dimensions finite and infinite*, Sigma Series in Pure Mathematics, 10, Heldermann Verlag, Lemgo, 1995.

[15] M. Gromov, *Asymptotic invariants of infinite groups*, Geometric group theory, Vol. 2 (Sussex, 1991), 1–295, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 182, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.

[16] W. E. Haver, *A covering property for metric spaces*, Topology Conference (Virginia Polytech. Inst. and State Univ., Blacksburg, Va., 1973), pp. 108–113, Lecture Notes in Math., Vol. 375, Springer, Berlin, 1974.

[17] E. Guentner, *Permanence in coarse geometry*, Recent progress in general topology. III, 507–533, Atlantis Press, Paris, 2014.

[18] E. Guentner, R. Tessera and G. Yu, *A notion of geometric complexity and its application to topological rigidity*, Invent. Math. **189** (2012), 315–357.

[19] E. Guentner, R. Tessera and G. Yu, *Discrete groups with finite decomposition complexity*, Groups Geom. Dyn. **7** (2013), 377–402.

[20] N. Higson and J. Roe, *Amenable group actions and the Novikov conjecture*, J. Reine Angew. Math. **519** (2000), 143–153.

[21] J. Keesling, *The one-dimensional Čech cohomology of the Higson compactification and its corona*, Topology Proc. **19** (1994), 129–148.

[22] P. Nowak and G. Yu, *Large scale geometry*, EMS Textbooks in Mathematics, European Mathematical Society, Zürich, 2012.

[23] P. A. Ostrand, *Dimension of metric spaces and Hilbert's problem 13*, Bull. Amer. Math. Soc. **71** (1965), 619–622.

[24] T. Radul, *On transfinite extension of asymptotic dimension*, Topology Appl. **157** (2010), 2292–2296.

[25] 尾國新一, 粗 *Baum-Connes* 予想とその周辺, 数学, to appear.

[26] J. Roe, *Coarse cohomology and index theory on complete Riemannian manifolds*, Mem. Amer. Math. Soc. **104**, no. 497, 1993.

[27] J. Roe, *Hyperbolic groups have finite asymptotic dimension*, Proc. Amer. Math. Soc. **133** (2005), 2489–2490.

[28] H. Sachs, *Regular graphs with given girth and restricted circuits*, J. London Math. Soc. **38** (1963) 423–429.

[29] J. Smith, *The asymptotic dimension of the first Grigorchuk group is infinity*, Rev. Mat. Complut. **20** (2007), 119–121.

[30] J. J. Walsh, *Infinite-dimensional compacta containing no n-dimensional ($n \geq 1$) subsets*, Topology **18** (1979), 91–95.

[31] R. Willett, *Some notes on property A*, Limits of graphs in group theory and computer science, 191–281, EPFL Press, Lausanne, 2009.

[32] R. Willett, *Property A and graphs with large girth*, J. Topol. Anal. **3** (2011), 377–384.

[33] T. Yamauchi, *Asymptotic property C of the countable direct sum of the integers*, Topology Appl. **184** (2015), 50–53.

[34] G. Yu, *The Novikov conjecture for groups with finite asymptotic dimension*, Ann. of Math. **147** (1998), 325–355.

[35] G. Yu, *The coarse Baum-Connes conjecture for spaces which admit a uniform embedding into Hilbert space*, Invent. Math. **139** (2000), 201–204.