コンパクト Stein 曲面と写像類群

大場貴裕　(東京工業大学)*

コンパクト Stein 曲面 (compact Stein surface) は，一種の境界付き複素曲面である．より正確には次のようになる．まず，Stein 多様体とは $\mathbb{C}^N$ にプロパーかつ正則に埋め込みができる複素多様体のことである．任意の Stein 多様体は下に有界でかつプロパーな狭義多重劣調和関数と呼ばれる実数値関数を持つ．コンパクト Stein 曲面とは，コンパクトな境界付き４次元多様体で，上のような狭義多重劣調和関数を持ち，境界がその関数のレベル集合であるもののことをいう．

コンパクト Stein 曲面は複素構造などの制約により，一見すると滑らかなカテゴリーでの話には不向きなように思えてしまう．しかし，コンパクト Stein 曲面の研究にはトポロジーによる豊富な道具立てがあり，それが近年のコンパクト Stein 曲面の研究のひとつの側面を支えている．

例えば，Eliashberg [El1]，Gompf [Go] はコンパクト Stein 曲面のハンドル分解を用いた特徴付けを行った．この特徴付けにより，Kirby 図式と呼ばれるハンドル分解を表す図式でのコンパクト Stein 曲面の扱いが可能になった．

時代が少し下ると，Loi と Piergallini [LP]，Akbulut と Ozbagci [AO] は，Lefschetz ファイバー空間を用い，さらに前者らはブレイド状曲面を用いたコンパクト Stein 曲面の特徴付けも行った．Lefschetz ファイバー空間とは，曲面をファイバーとする曲面上のファイバー空間で，Lefschetz 型特異点という特異点を含む．また，ブレイド状曲面とは双円盤にプロパーに埋め込まれた曲面で，双円盤の第一射影を曲面へ制限すると円盤上の分岐被覆になっているものである．Lefschetz ファイバー空間，ブレイド状曲面は写像類群，ブレイド群により制御でき，構成的な研究との相性が良い．実際，これらの群の既存の研究や扱いの良さが，コンパクト Stein 曲面の研究に豊富な話題を提供したり，進展の手助けをしたりしている．

著者の研究も彼らによってなされたコンパクト Stein 曲面の特徴付けを土台としている．そこで，第１節ではコンパクト Stein 曲面と Lefschetz ファイバー空間の関係に基づく話題と著者の結果を紹介する．次いで第２節では，コンパクト Stein 曲面とブレイド状曲面の関係に基づく話題と著者の最近の研究の一端を紹介する．なお，本稿において多様体とその間の写像はすべて滑らかと仮定する．

1 Lefschetz ファイバー空間とコンパクト Stein 曲面

1.1. はじめに

この節では著者の結果である，Stein 充填の一意性の結果の紹介をする．その結果についての先行研究などを述べるために，まずいくつかの定義を与える．

M を連結な有向閉３次元多様体とする．M 上の平面場 ξ が**接触構造 (contact structure)** であるとは，M 上の１次微分形式 α が存在し，$\xi = \mathrm{Ker}\alpha$ かつ M の向きに関し $\alpha \wedge d\alpha > 0$ となるときをいう．この α を ξ の**接触形式 (contact form)** という．接触多様体 $(M,\xi), (M',\xi')$ が**接触同型（contactmorphic）**であるとは，微分同相写像

本研究は科研費 (課題番号：15J05214) の助成を受けたものである．
* 〒152-8550 東京都目黒区大岡山 2-12-1 東京工業大学　大学院理工学研究科
e-mail: oba.t.ac@m.titech.ac.jp

$H : M \to M'$ が存在し，$H_*(\xi) = \xi'$ を満たすときをいう．また，M 上の接触構造 ξ, ξ' が**アイソトピック (isotopic)** であるとは，接触構造のまま滑らかに一方から他方へ変形できるときをいう．3 次元接触多様体 (M, ξ) が 4 次元シンプレクティック多様体や，コンパクト Stein 曲面の境界になるときに興味深い理論が展開されてきた．本稿では後者の場合を紹介する．ξ が **Stein 充填可能 (Stein fillable)** であるとは，境界が M に微分同相なコンパクト Stein 曲面 (X, J) が存在し，(M, ξ) と $(\partial X, T\partial X \cap J(T\partial X))$ が接触同型であるときをいう．(X, J) を (M, ξ) の **Stein 充填 (Stein filling)** という．

接触多様体を与えたときに，その Stein 充填の分類は古くから考えられてきた問題である．Stein 充填が 1 つに決まる場合の結果の一部分を振り返ってみると次のような結果がある．Eliashberg [El2] により 3 次元球面 S^3 上の標準的な接触構造を持つ接触多様体の Stein 充填は 4 次元球体 B^4 であることが示されている．McDuff [Mc] によりレンズ空間 $L(p, 1)$ $(p \neq 4)$ 上の標準的な接触構造を持つ接触多様体の Stein 充填は Euler 数が $-p$ である球面上の円盤束であることが示されている．さらに，$L(p, 1)$ $(p \neq 4)$ 上の他の Stein 充填可能な接触構造に関しても同様の結果が成り立つことを，Plamenevskaya と Van Horn-Morris [PV] が示している．

最後に紹介した結果はシンプレクティック幾何学よりも写像類群の組合せ群論的な議論を主に用いて証明している．著者の結果も，そのような議論に拠るところが大きい．以降では，写像類群と Stein 充填，接触多様体との関係を見ていく．

1.2. 写像類群と Lefschetz ファイバー空間

この小節では，写像類群と Lefschetz ファイバー空間の復習をする．写像類群については，[FM] を， Lefschetz ファイバー空間については [GS, Chapter 8]，[OS, Chapter 10] を詳しくは参照して頂きたい．

$\Sigma := \Sigma_{g,b}$ を種数が g で境界成分が b 個のコンパクトで連結な有向曲面とする．$\mathrm{Diff}_+(\Sigma, \partial\Sigma)$ を Σ の向きを保ち，境界上では恒等写像である微分同相写像全体からなる集合とする．$\mathrm{Diff}_+(\Sigma, \partial\Sigma)$ は写像の合成を積として群構造を持つ．Σ の**写像類群 (mapping class group)** $\mathcal{M}_\Sigma$ とは，$\mathrm{Diff}_+(\Sigma, \partial\Sigma)$ のアイソトピー類がなす群のことである．Σ の中の単純閉曲線 α に沿う**右手 Dehn ツイスト (right-handed Dehn twist)** t_α とは，α に沿って曲面 Σ を一度切り開き，反時計回りに 1 周ねじり，貼り合わせる操作により定まる Σ 上の向きを保つ微分同相写像である．(図１）．単純閉曲線 α と α' がアイソトピックであるとき，$[t_\alpha] = [t_{\alpha'}] \in \mathcal{M}_\Sigma$ であり，本稿では t_α が定める写像類 $[t_\alpha]$ のことも t_α と書くことにする．また $\mathcal{M}_\Sigma$ の積の表記は次のように約束する：$\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{M}_\Sigma$ に対し，$\varphi_1\varphi_2 \in \mathcal{M}_\Sigma$ は φ_1 を先に施し次に φ_2 を施すことを意味するものとする．

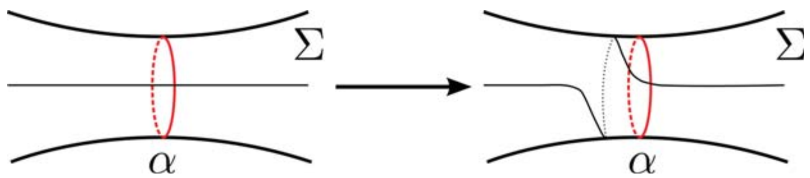

図 1: 単純閉曲線 α に沿う右手 Dehn ツイスト．

次に X をコンパクトで連結な境界付き有向 4 次元多様体とする．

定義 1.1. X から円盤 D^2 への写像 $f : X \to D^2$ が **Lefschetz ファイバー空間 (Lefschetz fibration)** であるとは，D^2 の内部の有限個の点からなる集合 $Q_f = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$

が存在し次を満たすものをいう：

1. $f|f^{-1}(D^2-Q_f)$ は D^2-Q_f 上の Σ をファイバーとするファイバー束である；
2. 各 $a_i \in Q_f$ に対し，特異ファイバー $f^{-1}(a_i)$ 上に f の臨界点 p_i がただ一つ存在する；
3. 各 p_i，a_i の周りで，これらを中心とする局所複素座標 (z_1, z_2)，w が存在し，f は $w = f(z_1, z_2) = z_1^2 + z_2^2$ と表示される．ただし，これらの局所複素座標は X，D^2 の向きと両立するものとする．

定義 1.2. $f : X \to D^2$，$f' : X' \to D^2$ を Lefschetz ファイバー空間とする．f と f' が**同型 (isomorphic)** であるとは，向きを保つ微分同相写像 $H : X \to X'$，$h : D^2 \to D^2$ が存在し $h \circ f = f \circ H$ が成り立つときをいう．

$f : X \to D^2$ を Lefschetz ファイバー空間とする．a_0 を ∂D^2 上の点とする．組 $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ を，a_0 と a_i を端点とする弧 s_i から成り，$i \neq j$ のとき $s_i \cap s_j = \{a_0\}$ となるものとする．ただし，a_0 の周りを反時計回りに回ったときに $s_1, s_2, \ldots, s_n$ の順に現われるとする．各 $i = 1, 2, \ldots, n$ について，a_i を中心とする十分小さい円盤 V_i を取り，その境界には反時計回りになるような向きをとる．V_i と s_i を結ぶことで得られる，a_0 を起点とするループを γ_i とする．このとき，$\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n\}$ は $\pi_1(D^2 - Q_f, a_0)$ の基底である．組 $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ のことを **Hurwitz 生成システム (Hurwitz generating system)** と呼ぶことにする (図 2)．Lefschetz ファイバー空間の定義から，各 γ_i 上には

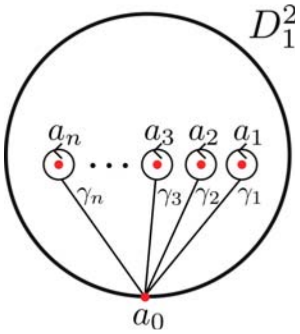

図 2: Hurwitz 生成システム．

Σ をファイバーとするファイバー束が現われる．このファイバー束のモノドロミー，すなわちファイバー束が $(\Sigma \times [0,1])/((x,1) \sim (\phi(x), 0)) \to [0,1]/(1 \sim 0)$ となる $[\phi] \in \mathcal{M}_\Sigma$ は，ある単純閉曲線 $\alpha_i \subset \Sigma$ に沿う右手デーンツイスト t_{α_i} であることが知られている．α_i のことを特異ファイバー $f^{-1}(a_i)$ に対する**消滅サイクル (vanishing cycle)** という．また，組 $(t_{\alpha_1}, t_{\alpha_2}, \ldots, t_{\alpha_n})$ を f の $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ に対する**モノドロミー (monodromy)** と呼ぶ．一般にモノドロミーは Hurwitz 生成系の取り方等に依存する．このような曖昧さを次のような変形でモノドロミーの情報として扱うことができる：

$$(t_{\alpha_1}, \ldots, t_{\alpha_i}, t_{\alpha_{i+1}}, \ldots, t_{\alpha_n}) \leftrightarrow (t_{\alpha_1}, \ldots, t_{\alpha_{i+1}}, t_{\alpha_{i+1}}^{-1} t_{\alpha_i} t_{\alpha_{i+1}}, \ldots, t_{\alpha_n}),$$
$$(t_{\alpha_1}, t_{\alpha_2}, \ldots, t_{\alpha_n}) \leftrightarrow (t_{(\alpha_1)\varphi}, t_{(\alpha_2)\varphi}, \ldots, t_{(\alpha_n)\varphi}),$$

ただし，φ は $\mathcal{M}_\Sigma$ の任意の元である．$(t_{\alpha_1}, t_{\alpha_2}, \ldots, t_{\alpha_n})$ と $(t_{\beta_1}, t_{\beta_2}, \ldots, t_{\beta_n})$ が上の 2 つの変形で移りあうとき，2 つの組は **Hurwitz 同値 (Hurwitz equivalent)** であるという．このとき，$(t_{\alpha_1}, t_{\alpha_2}, \ldots, t_{\alpha_n}) \equiv (t_{\beta_1}, t_{\beta_2}, \ldots, t_{\beta_n})$ と書く．Lefschetz ファイバー空間のモノドロミーが Hurwitz 同値であるとき，これらは同型になることが知られている．

定義 1.3. Lefschetzファイバー空間 $f : X \to D^2$ が**allowable**であるとは，f の任意の特異ファイバーに対する消滅サイクル α_i について，そのホモロジー類 $[\alpha_i] \in H_1(\Sigma; \mathbb{Z})$ が非零であるときをいう．以下，ALFは allowable Lefschetz ファイバー空間を指すことにする．

ALFはコンパクト Stein 曲面を調べる上で重要な役割を果たす．

定理 1.4 (Loi-Piergallini [LP, Theorem 3], Akbulut-Ozbagci [AO, Theorem 5])**.** X をコンパクトで連結な境界付き有向4次元多様体とする．このとき，以下は同値である：

1. X はコンパクト Stein 曲面である．
2. X は ALF を許容する，すなわち X を全空間とする ALF が存在する．

1.3. オープンブック分解と接触構造

この小節ではオープンブック分解と接触構造の関係を復習する．詳しくは，[Et]，[OS, Chapter 9] を参照して頂きたい．
B を M の中の有向絡み目とする．π を $M - B$ から円周 S^1 への写像とする．

定義 1.5. 組 (B, π) が M の**オープンブック分解 (open book decomposition)** であるとは，$\pi : M - B \to S^1$ がファイバー束であり，任意の $\theta \in S^1$ に対し境界付きコンパクト有向曲面 $\Sigma_\theta \subset M$ が存在し，$\mathrm{Int}\Sigma_\theta = \pi^{-1}(\theta)$ かつ $\partial\Sigma_\theta = B$ をみたすときをいう．B をオープンブック分解 (B, π) の**バインディング (binding)**，$\Sigma \approx \Sigma_\theta$ を (B, π) の**ページ (page)** という．

M のオープンブック分解 (B, π) を与えると，ファイバー束 $\pi : (M - B) \to S^1$ についてのモノドロミー $\varphi \in \mathcal{M}_\Sigma$ が定まる．これをオープンブック分解の**モノドロミー (monodromy)** という．逆に，コンパクトな境界付き有向曲面 Σ と $\varphi \in \mathcal{M}_\Sigma$ が与えられているとする．$\partial\Sigma$ は連結成分を r 個持つとし，その各連結成分を $\partial\Sigma_1, \partial\Sigma_2, \ldots, \partial\Sigma_r$ と番号付けしておく．$\Sigma_\varphi := (\Sigma \times [0,1])/((x, 1) \sim (\varphi(x), 0))$ は境界付き3次元多様体であり，その境界は r 個のトーラスたちである．r 個のソリッドトーラス $S^1 \times D^2$ を用意し，これらの境界を，$\partial\Sigma_\varphi$ の各連結成分に次のようにして定まる写像 F で貼る．θ_1，θ_2 を，∂D^2，$[0, 1]$ の中の点とする．このとき，各ソリッドトーラスの $S^1 \times \{\theta_1\} \subset S^1 \times \partial D^2$ の像が，$\partial\Sigma_i \times \{\theta_2\} \subset \partial\Sigma_\varphi$ である向きを保つ微分同相写像として F を定める．$\Sigma_\varphi \cup_F (\coprod_r S^1 \times D^2)$ は有向閉3次元多様体であり，そのオープンブック分解として，ページが Σ であるものが取れる．これより，オープンブック分解を組 (Σ, φ) でも表すことにする．

ξ を M 上の接触構造とする．M のオープンブック分解が ξ の**サポーティングオープンブック分解 (supporting open book decomposition)**，または ξ をサポートするとは，ξ の接触形式 α について，各ページ上 $d\alpha$ が面積要素であり，バインディングに沿うベクトル場 v に対し $\alpha(v) > 0$ となるものをいう．Thurston と Winkelnkemper [TW] により，M の任意のオープンブック分解に対し，それにサポートされる接触構造が存在することが示されている．Giroux はより強い主張として，以下の定理を示した：

定理 1.6 (Giroux [Gi])**.** M を有向閉3次元多様体とする．このとき，以下の 2 つの集合の間に一対一の対応がある：

- { M 上の接触構造 ξ }/ アイソトピー
- { M のオープンブック分解 (Σ, φ) }/ 正の安定化

ここでオープンブック分解 (Σ, φ) の**正の安定化 (positive stabilization)** とは，次のようにして得られるオープンブック分解 $(\Sigma', t_\alpha\varphi)$ のことである：Σ の中のプロパーな弧 a を一つ取り，その両端と1-ハンドル h の核 a' の端点が一致するように h を Σ に貼る．こうして得られた，$\Sigma \cup h$ を Σ' とし，α を $a \cup a'$ とする．

Giroux の対応から，M 上の接触構造はオープンブック分解により理解することができる．特に，Stein 充填可能な接触構造に関しては，サポーティングオープンブック分解のモノドロミーにより調べることが可能である．

定理 1.7 (定理1.4の言い換え)**.** M を連結な有向閉3次元多様体とし，ξ を M 上の接触構造とする．このとき，以下は同値である：

1. ξ は Stein 充填可能である．
2. ξ のサポーティングオープンブック分解 (Σ, φ) で，φ が右手 Dehn ツイストのみの積で表示されるものが存在する．このとき，右手 Dehn ツイストを生成する単純閉曲線たちのホモロジー類は非零である．

この言い換えは，ALF の“境界”を見ることにより得ることができる．$f : X \to D^2$ を ファイバーが Σ でモノドロミーが $(t_{\alpha_1}, t_{\alpha_2}, \ldots, t_{\alpha_n})$ である ALF とする．$pr : (D^2 - \{0\}) \to S^1$ を $(r, \theta) \mapsto \theta$ で定義する．ただし，(r, θ) は $D^2 - \{0\}$ の極座標とする．このとき，$(pr \circ f)|(pr \circ f)^{-1}(S^1) : (pr \circ f)^{-1}(S^1) \to S^1$ は ∂X のオープンブック分解 $(\Sigma, t_{\alpha_1} t_{\alpha_2} \cdots t_{\alpha_n})$ を定める．逆に，(M, ξ) のサポーティングオープンブック分解 (Σ, φ) を与えたとする．φ が定理1.7の(2)を満たすとすると，$t_{\alpha_1} t_{\alpha_2} \cdots t_{\alpha_n} = \varphi$ なる φ の分解が存在する．このとき，ファイバーが Σ でモノドロミーが $(t_{\alpha_1}, t_{\alpha_2}, \ldots, t_{\alpha_n})$ である ALF が得られる．この全空間は (M, ξ) の Stein 充填となることに注意しておく．以降，このようにして得られる ALF のことを，(Σ, φ) から得られる ALF と呼ぶことにする．

1.4. Stein 充填の一意性

この節の主結果を述べるために，まず定義を１つする．**Mazur 型多様体 (Mazur type manifold)** とは，境界が S^3 でない向き付け可能な可縮4次元多様体で，0-，1-，2-ハンドルそれぞれ１つずつから成るハンドル分解を持つものである．

定理 1.8 (Oba [Ob2])**.** M を整係数ホモロジー3球面とし，ξ を M 上の Stein 充填可能な接触構造とする．ξ がオープンブック分解 $(\Sigma_{0,4}, \varphi)$ にサポートされているならば，(M, ξ) の Stein 充填は微分同相の差を除いて一意である．また，M が S^3 に微分同相であるとき，その Stein 充填は4次元球体 B^4 に微分同相で，それ以外の場合は，ある Mazur 型多様体に微分同相である．

注意 1.9.

1. 定理 1.8 の仮定を満たし，S^3 に微分同相でない整係数ホモロジー球面は著者により無限個構成されている ([Ob1]).
2. 定理 1.8 のオープンブック分解の仮定ついて，ページの境界数を3以下に変えたとする．この場合の仮定を満たす整係数ホモロジー球面は S^3 のみであることが，Kirby 図式を用いて簡単に確かめられる．

この定理は冒頭でも述べたように，主に写像類群の議論で証明される．Stein 充填や Stein 充填可能な接触構造と，写像類群の結びつきは定理1.4，1.7で既に見た．Stein 充填可能な接触構造のサポーティングオープンブック分解について，そのページの種数が0である場合，より強い主張として次のような結果が知られている．

定理 1.10 (Wendl[We, Theorem 1])**.** M を連結な有向閉3次元多様体とし，ξ を Stein 充填可能な接触構造とする．ξが，ページの種数が0であるオープンブック分解(Σ,φ)にサポートされているすると，(M,ξ)の任意の Stein 充填Xは，(Σ,φ)から定まる ALF 許容する.

この定理の強調しておきたい点は，任意の Stein 充填が，任意に与えたサポーティングオープンブック分解から得られるという点である．ゆえに，与えたサポーティングオープンブック分解(Σ,φ)のモノドロミーφの右手 Dehn ツイストへの分解をすべて列挙すれば，Stein 充填すべて列挙したことになる.

そこで，まず定理1.8の仮定を満たす接触多様体の Stein 充填に関し，そのトポロジーに生じる条件を考察する.

補題 1.11 ([Ob2])**.** Mを整係数ホモロジー3球面とし，ξをM上の Stein fillable な接触構造とする．ξが，ページの種数が0であるオープンブック分解にサポートされているとすると，(M,ξ)の Stein 充填 X のホモロジーに関し次が成り立つ.

$$H_i(X;\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}\,(i=0) \\ 0\,(i\neq 0). \end{cases}$$

証明は[Ob2]を参照して頂きたい．この補題と定理 1.10 を用いて，定理 1.8を示す.

定理 *1.8*の証明の概略. 一意性に関する結果の証明のみをここでは述べる． Mazur 型であることについては[Ob2]を参照して頂きたい.

X を接触多様体(M,ξ) の Stein 充填とする．定理 1.10 から，X はξのサポーティングオープンブック分解(Σ,φ)から定まる ALF $f: X\to D^2$を許容する．すなわち，fはファイバーが$\Sigma_{0,4}$であり，モノドロミーが$(t_{\alpha_1},t_{\alpha_2},\ldots,t_{\alpha_n})$となる ALF である．$X$は，$\Sigma_{0,4}\times D^2$に特異ファイバーの数だけ2-ハンドルを接着したハンドル分解を持つ．よって，Xのオイラー標数$\chi(X)$は，$\chi(X)=\chi(\Sigma_{0,4}\times D^2)+n=-2+n$．一方，補題1.11より，$\chi(X)=1$である．ゆえに，$n=3$. 次に，ホモロジー類$[\alpha_1],[\alpha_2],[\alpha_3]\in H_1(\Sigma_{0,4};\mathbb{Z})$の曲面上で取りうる配置を考えると，以下の図3のようになる．(i)と(ii)の場合は， Hurwitz

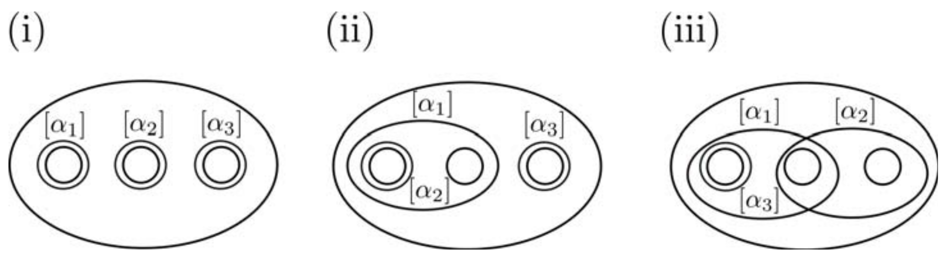

図 3: ホモロジー類$[\alpha_1],[\alpha_2],[\alpha_3]\in H_1(\Sigma_{0,4};\mathbb{Z})$の配置.

同値と Kirby 図式の議論を用いてXがB^4になることが分かり，定理が成り立つ．(iii)の場合を考える．いま，φの別の分解$t_{\beta_1}t_{\beta_2}t_{\beta_3}$をとる．$(t_{\alpha_1},t_{\alpha_2},t_{\alpha_3})\equiv(t_{\beta_1},t_{\beta_2},t_{\beta_3})$であることを示せば，それぞれの組をモノドロミーに持つ ALF が同型となり，全空間が微分同相であることが分かる．ゆえに，これを示す．まず，Hurwitz 同値な変形を行うことで，$[\alpha_1]=[\beta_1],[\alpha_2]=[\beta_2],\alpha_3=\beta_3$を仮定できる．部分群$\langle t_{\alpha_1},t_{\alpha_2}\rangle\subset\mathcal{M}_{\Sigma_{0,4}}$を考えると，階数2の自由群であることが分かる．$[\alpha_1]=[\beta_1],[\alpha_2]=[\beta_2]$であること

から，$\psi_1, \psi_2 \in \langle t_{\alpha_1}, t_{\alpha_2} \rangle$ で，$(\alpha_i)\psi_i = \beta_i$ $(i = 1, 2)$ となるものが存在する．よって，$(t_{\beta_1}, t_{\beta_2}, t_{\beta_3}) \equiv (t_{(\alpha_1)\psi_1}, t_{(\alpha_2)\psi_2}, t_{\alpha_3}) \equiv (t_{\alpha_1}, t_{(\alpha_2)\psi_2\psi_1^{-1}}, t_{\alpha_3})$. ここで，ある表現 $\langle t_{\alpha_1}, t_{\alpha_2} \rangle \to \mathrm{PSL}(2;\mathbb{Z})$ を取ることで，$\psi_2\psi_1^{-1} = t_{\alpha_2}^p t_{\alpha_1}^q$ なる $p, q \in \mathbb{Z}$ が存在することが示せる．ゆえに，$(t_{\alpha_1}, t_{(\alpha_2)\psi_2\psi_1^{-1}}, t_{\alpha_3}) \equiv (t_{\alpha_1}, t_{(\alpha_2)t_{\alpha_2}^p t_{\alpha_1}^q}, t_{\alpha_3}) \equiv (t_{\alpha_1}, t_{\alpha_2}, t_{\alpha_3})$ となり，定理を得る．

□

2 分岐被覆とコンパクト Stein 曲面

2.1. はじめに

Loi と Piergallini は以下の定理により，ブレイド状曲面とコンパクト Stein 曲面の関係性を見出した．

定理 2.1 (Loi-Piergallini [LP, Theorem 3])**.** X をコンパクトで連結な境界付き有向4次元多様体とする．このとき，以下は同値である：

1. X はコンパクト Stein 曲面である．
2. X は4次元球体 B^4 の分岐被覆の全空間であり，その分岐集合は正ブレイド状曲面 (定義2.3) である．

ブレイド状曲面は，ブレイドモノドロミーや，チャート表示など，構成的な手法と相性が良い．しかし，現段階ではブレイド状曲面を用いたコンパクト Stein 曲面の研究はほとんどなされていない．

そこで，次のような問題を考える：正ブレイド状曲面 S について，S 上分岐する被覆を 2つ以上考えたときに，それらの全空間が互いに微分同相でかつ Stein 構造が相異なるものを与える S は存在するか．本節ではこの問いの肯定的な答えとして，実際に構成したブレイド状曲面の例を紹介する．

2.2. ブレイド状曲面と 4 次元球体 B^4 の分岐被覆

ここではブレイド状曲面と，その曲面上分岐する分岐被覆を復習する．ブレイド状曲面については，[Ru], [Ka, Chapter 16，17], [APZ, Section 3] を，分岐被覆については [APZ, Section 5, 6] を詳しくは参照して頂きたい．

D_1^2, D_2^2 を向きづけられた円盤とし，S を $D_1^2 \times D_2^2$ にプロパーに埋め込まれた曲面とする．

定義 2.2. $S \subset D_1^2 \times D_2^2$ が次数 m の**（単純）ブレイド状曲面 ((simple) braided surface)** であるとは，第一射影 $pr_1 : D_1^2 \times D_2^2 \to D_1^2$ の制限 $p_S := pr_1|S : S \to D_1^2$ が次数 m の単純分岐被覆であるときをいう．

Q_S を単純分岐被覆 p_S の分岐点集合とする．$|Q_S| = n$ とする．基点 a_0 を ∂D_1^2 にとり，1.2 と同様に $\pi_1(D_1^2 - Q_S, a_0)$ の基底として Hurwitz 生成システム $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ をとる．S_m を m 次対称群し，$\rho : \pi_1(D_1^2 - Q_S, a_0) \to S_m$ を被覆 p_S の被覆モノドロミーとする．すなわち，ρ は $\pi_1(D_1^2 - Q_S, a_0)$ の推移的な表現で，各 $\rho(\gamma_i)$ は互換である．この ρ_{p_S} の m 次ブレイド群への持ち上げとして，S の**ブレイドモノドロミー (braid monodromy)** $\rho_S : \pi_1(D_1^2 - Q_S, a_0) \to B_m$ が定まる．組 $(\rho_S(\gamma_1), \rho_S(\gamma_2), \ldots, \rho_S(\gamma_n))$ のことも S のブレイドモノドロミーと呼ぶことにする．p_S の単純性から，$\rho_S(\gamma_i) = w_i^{-1}\sigma_{j_i}^{\varepsilon_i} w_i$ なる $\sigma_{j_i}, w_i \in B_m, \varepsilon_i \in \{\pm 1\}$ が存在する．ただし，σ_{j_i} は B_m の標準的生成元である．

定義 2.3. ブレイド状曲面 S が**正 (positive)** であるとは，S のブレイドモノドロミー ρ_S が任意の i について $\rho_S(\gamma_i) = w_i^{-1}\sigma_{j_i} w_i$ であるときをいう．

$p : X \to B^4 \approx D_1^2 \times D_2^2$ を正ブレイド状曲面 S 上分岐する分岐被覆とする．$f := pr_1 \circ p : X \to D^2$ は ALF である．$Q_f = Q_S$ であり，f のファイバーは $f^{-1}(a_0) = p^{-1}(\{a_0\}\times D_2^2)$ $(a_0 \in \partial D_1^2)$ である (図4)．$p|p^{-1}(\{a_0\}\times D_2^2) : p^{-1}(\{a_0\}\times D_2^2) \to \{a_0\}\times D_2^2$ が $S \cap (\{a_0\} \times D_2^2)$ 上分岐する分岐被覆であることにも注意しておく．また，f のモノドロミーは S のブレイドモノドロミーの持ち上げである．詳しくは [LP, Proposition 1] を参照して頂きたい．

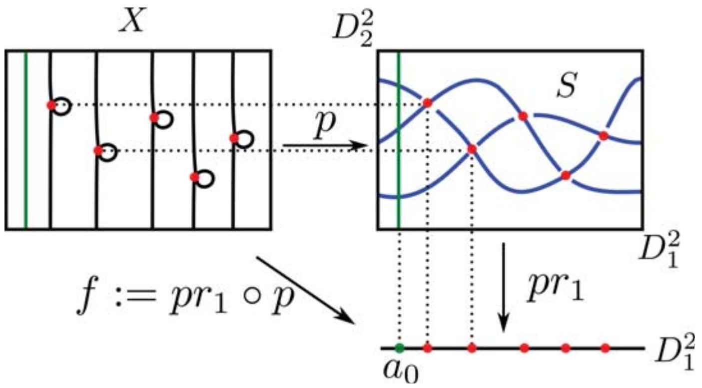

図 4: 左右の長方形は各々 $X, D_1^2 \times D_2^2$ を表し，その中の点は f, p_S の特異点を表す．

B^4 の単純分岐被覆を構成するにあたり補題を１つ準備する．そのために，まずいくつかの定義をする．$q : \Sigma \to D^2$ を次数 d の単純分岐被覆とする．分岐点集合 Q_q の濃度を m とする．ブレイド群 B_m を穴が m 個開いた円盤 D_m の写像類群 $\mathcal{M}_{D_m}$ と同一視し，$\beta \in B_m$ に対し定まる元を $[h_\beta] \in \mathcal{M}_{D_m}$ と書く．ただし，ここでの写像類群は第 1.2 節とは異なり，穴の部分を集合として保つ D_m 上の向きを保つ微分同相写像のアイソトピー類がなす群である．いま，$D^2 - Q_q$ を D_m と同一視する．$\beta \in B_m$ が q に関し**持ち上げ可能 (liftable)** であるとは，微分同相写像 $H_\beta : \Sigma \to \Sigma$ が存在し，$q \circ H_\beta = h_\beta \circ q$ を満たすときをいう．

補題 2.4 ([Ob3])**.** $S \subset D_1^2 \times D_2^2$ を正ブレイド状曲面とし，そのブレイドモノドロミーを $(w_1^{-1}\sigma_{j_1}w_1,\ w_2^{-1}\sigma_{j_2}w_2, \dots, w_n^{-1}\sigma_{j_n}w_n)$ とする．a_0 を ∂D_1^2 の点とし，$q : \Sigma \to \{a_0\} \times D_2^2 \subset D_1^2 \times D_2^2$ を $S \cap (\{a_0\} \times D_2^2)$ 上分岐する次数 d の単純分岐被覆とする．もし，各 $w_i\sigma_{j_i}w_i^{-1} \in B_m$ が q に関し持ち上げ可能ならば，S 上分岐する $B^4 \approx D_1^2 \times D_2^2$ の単純分岐被覆 $p : X \to B^4$ が存在し，$pr_1 \circ p : X \to D_1^2$ はファイバーが Σ である ALF である．

証明の概略. $b_0 \in \{a_0\} \times \partial D_2^2$ をとり，$\pi_1((\{a_0\} \times D_2^2) - (S \cap (\{a_0\} \times D_2^2)), (a_0, b_0))$ に対し，Hurwitz 生成システム $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ を取る．補題を示すには，$\rho : \pi_1(D^4 - S, (a_0, b_0)) \to S_d$ が q の被覆モノドロミー ρ_q から定まることを示せばよい．$\pi_1(D^4 - S, (a_0, b_0))$ は $\iota_*(x_1), \iota_*(x_2), \dots, \iota_*(x_m)$ で生成され，表示に関しても S のブレイドモノドロミーから計算できることが知られている ([Fo, p. 133], [Ya], [Ru, Proposition 4.1])．ただし，$\iota : ((\{a_0\} \times D_2^2) - (S \cap (\{a_0\} \times D_2^2)), (a_0, b_0)) \hookrightarrow (D^4 - S, (a_0, b_0))$ は包含写像である．後は，ブレイドモノドロミーが q に関して持ち上げ可能であることを用いて，ρ が構成できることを示せばよい．残りの証明は [Ob3] を参照して頂きたい． □

2.3. 分岐集合が同じであるが Stein 構造が異なるコンパクト Stein 曲面

この節の主定理を紹介し，証明の概略を述べる．

定理 2.5. N を2以上の任意の自然数とする．このとき，正ブレイド状曲面 $S \subset D_1^2 \times D_2^2$ が存在し，S を分岐集合とする単純分岐被覆 $p_i : X_i \to B^4 \approx D_1^2 \times D_2^2$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ で次を満たすものが存在する：

1. $X_1, X_2, \ldots, X_N$ は互いに微分同相である；
2. 各 X_i に分岐被覆 p_i から定まる Stein 構造を J_i とすると，$J_i \neq J_j$ $(i \neq j)$ である．

証明の概略．$N = 2$ の場合のみ示す．まず，$a_0 \in \partial D_1^2$，$b_0 \in \{a_0\} \times \partial D_2^2$ をとる．8次ブレイド群 B_8 の元，$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_5$ を次のように定義する：

$$\beta_1 := \sigma_5,\ \beta_2 := (\sigma_6^{-1}\sigma_7^{-2}\sigma_6^{-1}\sigma_4\sigma_3^2\sigma_4)^{-1}\sigma_5(\sigma_6^{-1}\sigma_7^{-2}\sigma_6^{-1}\sigma_4\sigma_3^2\sigma_4),$$
$$\beta_3 := (\sigma_6^{-1}\sigma_5^{-1}\sigma_4^{-1}\sigma_3^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-2}\sigma_2^{-1}\sigma_7\sigma_6\sigma_5^{-1}\sigma_4^{-1}\sigma_3^{-1}\sigma_4^{-2}\sigma_3^{-1}\sigma_4)^{-1}\sigma_7\cdot$$
$$(\sigma_6^{-1}\sigma_5^{-1}\sigma_4^{-1}\sigma_3^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-2}\sigma_2^{-1}\sigma_7\sigma_6\sigma_5^{-1}\sigma_4^{-1}\sigma_3^{-1}\sigma_4^{-2}\sigma_3^{-1}\sigma_4),$$
$$\beta_4 := (\sigma_4^{-1}\sigma_5^{-2}\sigma_4^{-1}\sigma_2\sigma_1^2\sigma_2)^{-1}\sigma_3(\sigma_4^{-1}\sigma_5^{-2}\sigma_4^{-1}\sigma_2\sigma_1^2\sigma_2),$$
$$\beta_5 := (\sigma_6\sigma_5^2\sigma_6)^{-1}\sigma_7(\sigma_6\sigma_5^2\sigma_6),\ \beta_6 := (\sigma_3\sigma_4\sigma_5\sigma_6)^{-1}\sigma_2(\sigma_3\sigma_4\sigma_5\sigma_6).$$

正ブレイド状曲面 S を，組 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6)$ をブレイドモノドロミーとして持つものとして定義する．$q_1, q_2 : \Sigma_{1,4} \to \{a_0\} \times D_2^2$ を，次のような被覆モノドロミー $\rho_{q_1}, \rho_{q_2} : \pi_1(\{a_0\} \times D_2^2, (a_0, b_0)) \to S_4$ を持つ次数4の単純分岐被覆とする：

$$\rho_{q_1}(x_1) = (1\ 2),\ \rho_{q_1}(x_2) = (1\ 2),\ \rho_{q_1}(x_3) = (2\ 3),\ \rho_{q_1}(x_4) = (2\ 3),$$
$$\rho_{q_1}(x_5) = (3\ 4),\ \rho_{q_1}(x_6) = (3\ 4),\ \rho_{q_1}(x_7) = (1\ 2),\ \rho_{q_1}(x_8) = (1\ 2),$$
$$\rho_{q_2}(x_1) = (1\ 2),\ \rho_{q_2}(x_2) = (1\ 2),\ \rho_{q_2}(x_3) = (3\ 4),\ \rho_{q_2}(x_4) = (3\ 4),$$
$$\rho_{q_2}(x_5) = (2\ 3),\ \rho_{q_2}(x_6) = (2\ 3),\ \rho_{q_2}(x_7) = (1\ 2),\ \rho_{q_2}(x_8) = (1\ 2).$$

$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_5$ は q_1, q_2 に関し持ち上げ可能であることは簡単に確かめることができる．したがって補題2.4より，各 q_i に対し単純分岐被覆 $p_i : X_i \to B^4 \approx D_1^2 \times D_2^2$ が定まる．各 $pr_1 \circ p_i : X_i \to D_1^2$ は ALF であったから，消滅サイクルの情報から Kirby 図式を描くことができる．実際Kirby計算をすることにより，X_1 と X_2 は Euler 数が -4 である球面上の円盤束に微分同相であることがわかる．また，分岐被覆 p_i から定まる Stein 構造 J_i に関して第 1 Chern 類を Kirby 図式から計算することができる．$c_1(X_1, J_1) \neq 0$ であり，$c_1(X_2, J_2) = 0$ であることが分かる．以上から定理が得られた． □

最後に系を１つ紹介する．定理2.6において境界の接触多様体に目を向けてみる．接触多様体 (M, ξ) の中の有向絡み目 L が**横断的絡み目 (transverse link)** であるとは，各点 $x \in L$ について，向きも込めて $T_xL + \xi_x = T_xM$ を満たすものである．S^3 の標準的接触構造 ξ_{std} について，ブレイド状曲面の境界は横断的絡み目になっている．

系 2.6. N を2以上の任意の自然数とする．このとき，横断的絡み目 $L \subset (S^3, \xi_{std})$ が存在し，L を分岐集合とする単純分岐被覆 $p_i : M_i \to S^3$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ で次を満たすものが存在する：

1. $M_1, M_2, \ldots, M_N$ は互いに微分同相である；
2. 各 M_i に単純分岐被覆から定まる 接触構造を ξ_i とすると，$i \neq j$ ならば ξ_i と ξ_j はアイソトピックでない．

謝辞 第 62回トポロジーシンポジウムにお招きくださいました，大槻知忠先生（京都大学数理解析研究所），平澤美可三先生（名古屋工業大学），三松佳彦先生（中央大学）に心より御礼を申し上げます．

参考文献

[AO] S. Akbulut and B. Ozbagci, *Lefschetz fibrations on compact Stein surfaces*, Geom. Topol. **5** (2001), 939–945.

[APZ] N. Apostolakis, R. Piergallini, and D. Zuddas, *Lefschetz fibrations over the disc*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **107** (2013), no. 2, 340–390.

[El1] Y. Eliashberg, *Topological characterization of Stein manifolds of dimension > 2*, Internat. J. Math. **1** (1990), no. 1, 29–46.

[El2] Y. Eliashberg, *Filling by holomorphic discs and its applications*, Geometry of Low-dimensional Manifolds: **2**, Proc. Durham Symp. 1989, London Math. Soc. Lecture Notes **151**, Cambridge Univ. Press, 1990, 45–67.

[Et] J. Etnyre, *Lectures on open book decompositions and contact structures*, Floer Homology, Gauge Theory, and Low Dimensional Topology, Clay Math. Proc. **5**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.

[FM] B. Farb and D. Margalit, *A primer on mapping class groups*, Princeton Mathematical Series **49**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2012.

[Fo] R. H. Fox, *A quick trip through knot theory*, Topology of 3-manifolds and related topics (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1962), pp. 120–167.

[Gi] E. Giroux, *Géométrie de contact: de la dimension trois vers les dimensions supérieures*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Beijing, 2002), 405–414.

[Go] R. Gompf, *Handlebody construction of Stein surfaces*, Ann. of Math. (2) **148** (1998), no. 2, 619–693.

[GS] R. Gompf and A. Stipsicz, *4-Manifolds and Kirby Calculus*, Grad. Stud. Math. **20**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[Ka] S. Kamada, *Braid and knot theory in dimension four*, Mathematical Surveys and Monographs, **95**. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.

[LP] A. Loi and R. Piergallini, *Compact Stein surfaces with boundary as branched covers of* B^4, Invent. Math. **143** (2001), no. 2, 325–348.

[Mc] D. McDuff, *Symplectic manifolds with contact type boundaries*, Invent. Math. **103** (1991), 651–671.

[Ob1] T. Oba, *A note on Mazur type Stein fillings of planar contact manifolds*, arXiv:1405.3751.

[Ob2] T. Oba, *Stein fillings of homology spheres and mapping class groups*, arXiv:1407.5257.

[Ob3] T. Oba, *Compact Stein surfaces as branched coverings with distinct covering monodromies*, in preparation.

[OS] B. Ozbagci and A. Stipsicz, *Surgery on contact 3-manifolds and Stein surfaces*, Bolyai Soc. Math. Stud. **13**, Springer-Verlag, 2004.

[PV] O. Plamenevskaya and J. Van Horn-Morris, *Planar open books, monodromy factorizations and symplectic fillings*, Geom. Topol. **14** (2010), 2077–2101.

[Ru] L. Rudolph, *Braided surfaces and Seifert ribbons for closed braids*, Comment. Math. Helv. **58** (1983), no. 1, 1–37.

[TW] W. Thurston and H. Winkelnkemper, *On the existence of contact forms*, Proc. Amer. Math. Soc. **52** (1975), 345–347.

[We] C. Wendl, *Strongly fillable contact manifolds and J-holomorphic foliations*, Duke Math. J. **151**(3) (2010), 337–384.

[Ya] T. Yajima, *Wirtinger presentations of knot groups*, Proc. Japan Acad. **46**(1970), 997–1000.