普遍Schur関数と旗束上のGysinの諸公式について

中川 征樹　(岡山大学大学院教育学研究科)*

第62回トポロジーシンポジウム (2015年8月6日 (木) ~ 8月9日 (日))

1. 研究の動機

1.1. トポロジーと対称関数

まず初めに, 多少長くなることを覚悟の上で, 研究の動機について書いておきたい[1]. そもそもトポロジーと対称関数の間には古くから密接な関係がある. 例えば, よく知られているように, 複素ベクトル束のChern類は「分裂原理」を通して, しかるべき変数(いわゆるChernルート) の基本対称式で表される. このことはホモトピー論的には次のように言い表すことができる: $U(n)$ を n 次ユニタリー群, $BU(n)$ をその分類空間とするとき, $BU(n)$ の整数係数コホモロジー環[2]は次で与えられる:

$$H^*(BU(n)) = \mathbb{Z}[c_1, c_2, \ldots, c_n].$$

ここで, $c_i \in H^{2i}(BU(n))$ $(i = 1, \ldots, n)$ は**普遍Chern類**, すなわち $BU(n)$ 上の「普遍ベクトル束」$\gamma^n \longrightarrow BU(n)$ のChern類である: $c_i = c_i(\gamma^n)$, $c_0 := 1$. T^n を $U(n)$ の(標準的な)極大トーラスとして, 自然な写像 $\rho : BT^n \longrightarrow BU(n)$ によって, γ^n を BT^n 上へ引き戻すと, $\rho^*(\gamma^n) \cong \oplus_{i=1}^n \gamma_i^1$ のように, BT^n 上の直線束 γ_i^1 $(i = 1, \ldots, n)$ たち[3]の直和に分かれ(分裂原理), 全Chern類 $c(-) = \sum_{i\geq 0} c_i(-)$ について, Chern類の自然性より,

$$\rho^*(c(\gamma^n)) = c(\rho^*(\gamma^n)) = c(\oplus_{i=1}^n \gamma_i^1) = \prod_{i=1}^n c(\gamma_i^1) = \prod_{i=1}^n (1 + c_1(\gamma_i^1)) = \prod_{i=1}^n (1 + x_i)$$

が成り立つ(ここで, $x_i := c_1(\gamma_i^1) \in H^2(BT^n)$ とおいた). このことから(さらに, よく知られているように, $\rho^* : H^*(BU(n)) \longrightarrow H^*(BT^n)$ は単射である), 各Chern類 c_i を, $x_1, \ldots, x_n$ の基本対称多項式 $e_i(\mathbf{x}_n) = e_i(x_1, \ldots, x_n)$ と見なせる, という解釈が導かれる. そこで, $\Lambda(\mathbf{x}_n) = \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]^{S_n}$ (S_n は n 次対称群) を対称多項式のなす環とすると,

$$\Lambda(\mathbf{x}_n) = \mathbb{Z}[e_1(\mathbf{x}_n), \ldots, e_n(\mathbf{x}_n)] \xrightarrow{\sim} H^*(BU(n)) = \mathbb{Z}[c_1, \ldots, c_n], \quad e_i(\mathbf{x}_n) \longmapsto c_i, \tag{1}$$

という同一視ができる. さらに, $n \to \infty$ の極限を考えるとき, $BU = BU(\infty)$ のコホモロジー環と対称関数のなす環 $\Lambda(\mathbf{x}) = \Lambda$ との間の, よく知られた同一視

$$\Lambda = \mathbb{Z}[e_1, e_2, \ldots] \xrightarrow{\sim} H^*(BU) = \mathbb{Z}[c_1, c_2, \ldots], \quad e_i \longmapsto c_i, \tag{2}$$

本研究は科研費(課題番号:15K04876)の助成を受けたものである.
2010 Mathematics Subject Classification: 05E05, 57R77, 55N20, 55N22, 14N15
キーワード : Schur 関数, 一般コホモロジー理論, Schur 関数, Schubert calculus, Gysin 準同型

* 〒700-8530 岡山県岡山市北区津島中3-1-1　岡山大学大学院教育学研究科
e-mail: nakagawa@okayama-u.ac.jp

[1] 本稿で述べる研究は, 2011年の春頃から行っている成瀬 弘氏 (山梨大学大学院総合研究部) との共同研究に基づくものである. この場をお借りして, 成瀬氏にお礼を申し上げたい.

[2] 特に断わらない限り, コホモロジーは整数係数であるとする: $H^*(-) = H^*(-;\mathbb{Z})$.

[3] 複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ 上の「標準直線束 (Hopf の直線束)」を $\gamma^1 := \{(\ell, v) \in \mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}^{n+1} \mid v \in \ell\} \longrightarrow \mathbb{C}P^n$ とし, これが定める $\mathbb{C}P^\infty \simeq BU(1)$ 上の直線束も γ^1 と書くことにする. $BT^n \simeq \mathbb{C}P^\infty \times \cdots \times \mathbb{C}P^\infty$ であるから, i 番目の射影 $\mathbb{C}P^\infty \times \cdots \times \mathbb{C}P^\infty \longrightarrow \mathbb{C}P^\infty$ による γ^1 の引き戻しを γ_i^1 と書いた ($i = 1, \ldots, n$).

が得られる ($e_i = e_i(\mathbf{x})$ $(i = 1, 2, \ldots)$ は基本対称関数). さらに, BU はベクトル束の Whitney 和から誘導される積 $\phi : BU \times BU \longrightarrow BU$ をもち, これによりホモトピー可換な H-空間となる. したがって BU のホモロジー $H_*(BU)$ は, いわゆる Pontrjagin 積により環となり, その環構造もよく知られている: まず, $H^*(BU(1)) = \mathbb{Z}[c_1]$ であるから, その自由加群としての基底 $\{c_1^n\}_{n=0,1,2,\ldots}$ が取れ, $H_*(BU(1))$ の基底として, その双対基底 $\{\beta_i\}_{i=0,1,2,\ldots}$ $(\beta_0 := 1)$ を取る. 次に, 自然な写像 $BU(1) \longrightarrow BU$ がホモロジーに誘導する準同型 $H_*(BU(1)) \longrightarrow H_*(BU)$ による $\beta_i \in H_{2i}(BU(1))$ の像を同じく $\beta_i \in H_{2i}(BU)$ と書くことにすると, $H_*(BU)$ の環構造は以下のようになる:

$$H_*(BU) = \mathbb{Z}[\beta_1, \beta_2, \ldots].$$

これを対称関数の言葉で言うと次のようになる: $h_i = h_i(\mathbf{x})$ $(i = 1, 2, \ldots)$ を**完全対称関数**とする. すなわち, 母関数

$$H(t) = \sum_{i=0}^{\infty} h_i t^i = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x_i t}$$

により定まる Λ の元とする. このとき, β_i の定め方より, 次の同一視が得られる:

$$\Lambda = \mathbb{Z}[h_1, h_2, \ldots] \xrightarrow{\sim} H_*(BU) = \mathbb{Z}[\beta_1, \beta_2, \ldots], \quad h_i \longmapsto \beta_i. \tag{3}$$

さらに付け加えると, 上の同一視 (2), (3) は $\mathbb{Z}$ 上の Hopf 代数としての同型[4] を与えている. このようにして, 例えば Macdonald の本 [55] の第 I 章に登場する様々な対称関数 (基本対称関数 e_r $(r = 1, 2, \ldots)$, 完全対称関数 h_r $(r = 1, 2, \ldots)$ の他, 冪和対称関数 p_r $(r = 1, 2, \ldots)$, 単項対称関数 m_λ (λ はいわゆる**分割**[5]) などなど) に対応する「幾何学的な対象」は何か? という問いを考えることが, 少なくとも筆者にとっては研究の原点だったと言える. そうすると, この本の第 I 章で最も詳しく扱われ, 表現論や組合せ論において最も重要な対称関数と考えられる **Schur 関数 (Schur 多項式)** に対応する幾何学的な対象は何だろうか? という問いがすぐに思い浮かぶ. ところが筆者の知る限り, Schur 関数を扱ったトポロジー (特に, 代数的トポロジー, ホモトピー論) 関係の論文はほとんどないようである. が, 幾何学的な対象は確かに存在し, それが次節で述べる複素 Grassmann 多様体の **Schubert 類**である.

1.2. Schubert calculus の観点

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ を, $\alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_n \geq 0$ を満たす非負整数の列として, 単項式 $\mathbf{x}^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$ と定義する. この単項式に n 次対称群 S_n の元 w が,

$$w \cdot \mathbf{x}^\alpha := \mathbf{x}^{w \cdot \alpha}, \quad w \cdot \alpha = w \cdot (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) := (\alpha_{w^{-1}(1)}, \ldots, \alpha_{w^{-1}(n)})$$

により作用する. そこで,

$$a_\alpha = a_\alpha(\mathbf{x}_n) := \sum_{w \in S_n} \mathrm{sgn}\,(w)\, w \cdot \mathbf{x}^\alpha = \det\,(x_i^{\alpha_j})_{1 \leq i, j \leq n}$$

[4] 対称関数環 Λ の Hopf 代数構造については, Macdonald [55, Examples 25] に簡単な記述がある. 例えば, 余積構造は

$$\Delta(h_r) = \sum_{p+q=r} h_p \otimes h_q \tag{4}$$

で与えられる.

[5] 本稿では, 組合せ論の用語 (ごく標準的なもののみ) を断りなしに用いることもあると思われる. 適宜, Macdonald [55, I, 1. Partitions], 岡田 [63, §6.1] を参照していただきたい.

と定義すると, a_α は交代式である. 特に, $\rho_{n-1} := (n-1, n-2, \ldots, 2, 1, 0)$ に対しては,

$$a_{\rho_{n-1}} = \det (x_i^{n-j})_{1 \le i,j \le n} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_i - x_j) \quad (\text{差積})$$

である. $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ を, $\lambda := \alpha - \rho_{n-1}$, すなわち, $\lambda_j := \alpha_j - (n-j)$ $(j = 1, \ldots, n)$ とおくと, $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge \lambda_n \ge n$ となるから, λ は長さが n 以下の分割である. このとき, 交代式 $a_\alpha = a_{\lambda+\rho_{n-1}}$ は差積 $a_{\rho_{n-1}}$ で割り切れ, その商 $a_{\lambda+\rho_{n-1}}/a_{\rho_{n-1}}$ は対称多項式となる. そこで,

$$s_\lambda(\mathbf{x}_n) := \frac{a_{\lambda+\rho_{n-1}}}{a_{\rho_{n-1}}} = \frac{\det (x_i^{\lambda_j+n-j})_{1 \le i,j \le n}}{\det (x_i^{n-j})_{1 \le i,j \le n}} \tag{5}$$

と定義し[6], これを分割 λ に対応する **Schur 多項式**という. 長さが n 以下の分割の集合を $\mathcal{P}_n$ (分割全体のなす集合を $\mathcal{P}$) とするとき, 次が成り立つことが知られている:

1. Schur 多項式 $\{s_\lambda(\mathbf{x}_n)\}_{\lambda \in \mathcal{P}_n}$ は対称多項式のなす環 $\Lambda(\mathbf{x}_n)$ の自由 $\mathbb{Z}$-基底をなす.

2. $n \to \infty$ の極限を考えるとき, Schur 関数 $\{s_\lambda(\mathbf{x})\}_{\lambda \in \mathcal{P}}$ は対称関数のなす環 Λ の自由 $\mathbb{Z}$-基底をなす.

また, 例えば分割 (k) に対応する Schur 関数 $s_{(k)}(\mathbf{x})$ は完全対称関数 h_k に, 分割 $(1^k) = (1, 1, \ldots, 1)$ に対応する Schur 関数 $s_{(1^k)}(\mathbf{x})$ は基本対称関数 e_k に一致することが知られている. 上記の 1., 2. と先の同一視 (1), (2) から, $s_\lambda(\mathbf{x}_n)$ に対応する $H^*(BU(n))$ のコホモロジー類は, (Schur 多項式の重要性に鑑みると) 幾何学的にも意味のあるものではないかと予想される. ところで, $Gr(n, \mathbb{C}^N)$ を $\mathbb{C}^N$ の中の n 次元線形部分空間のなす複素 Grassmann 多様体とするとき, 分類空間 $BU(n)$ の構成方法の一つとして「無限 Grassmann 多様体」$Gr(n, \mathbb{C}^\infty)$ が取れることを思い起こすと, Grassmann 多様体 $Gr(n, \mathbb{C}^N)$ のコホモロジー環 $H^*(Gr(n, \mathbb{C}^N))$ の中に, 何かしら重要なコホモロジー類が棲んでいることが予見される. それが「Schubert 多様体」の定める「Schubert 類」である. 定義を復習しておこう[7]. $\{\boldsymbol{e}_i\}_{i=1}^N$ を $\mathbb{C}^N$ の標準基底とし, 基準となる**旗**, すなわち線形部分空間の系列

$$\tilde{F}_\bullet : \{0\} = \tilde{F}_0 \subset \tilde{F}_1 \subset \tilde{F}_2 \subset \cdots \subset \tilde{F}_{N-1} \subset \tilde{F}_N = \mathbb{C}^N$$

を一つ固定する. ここで, $\tilde{F}_i := \langle \boldsymbol{e}_{N+1-i}, \ldots, \boldsymbol{e}_{N-1}, \boldsymbol{e}_N \rangle$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, N)$ とする. そこで,

$$N - n \ge \lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge \lambda_n \ge 0$$

を満たす分割 λ に対して[8], **Schubert 多様体**

$$\Omega_\lambda(\tilde{F}_\bullet) := \{V \in Gr(n, \mathbb{C}^N) \mid \dim (V \cap \tilde{F}_{N-n+i-\lambda_i}) \ge i \ (i = 1, \ldots, n)\} \subset Gr(n, \mathbb{C}^N)$$

[6] 2 節において, この Schur 多項式 (関数) の「普遍版」と呼ぶべきものを導入するが, そこでの定義に合わせて,

$$s_\lambda(\mathbf{x}_n) = \sum_{w \in S_n} w \cdot \left[\frac{\mathbf{x}^{\lambda+\rho_{n-1}}}{\prod_{1 \le i < j \le n}(x_i - x_j)} \right] \tag{6}$$

と表示することもできる.

[7] Grassmann 多様体の Schubert 類については, Fulton [27, §9.4], Manivel [56, §3.2] が基本的な文献だと思われる.

[8] すなわち, 対応する Young 図形が, 縦 n, 横 $N-n$ の「長方形」に含まれるような分割である. 本稿では, この条件を満たす分割の集合を $\mathcal{P}_{n,N}$ と書くことにしよう.

と定義すると, $\Omega_\lambda(\tilde{F}_\bullet)$ は, 余次元が $|\lambda| := \sum_{i=1}^n \lambda_i$ の既約な閉部分多様体となる. そこで, $\Omega_\lambda(\tilde{F}_\bullet)$ が定めるコホモロジー類を $\sigma_\lambda \in H^{2|\lambda|}(Gr(n,\mathbb{C}^N))$ と書き, これを **Schubert 類**という. このとき, Schubert 類 $\{\sigma_\lambda\}_{\lambda\in\mathcal{P}_{n,N}}$ は, コホモロジー環 $H^*(Gr(n,\mathbb{C}^N))$ の自由 $\mathbb{Z}$-基底をなす. そこで, 加群としての全射準同型を

$$\Lambda(\mathbf{x}_n) \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow H^*(Gr(n,\mathbb{C}^N)), \quad s_\lambda(\mathbf{x}_n) \longmapsto \begin{cases} \sigma_\lambda & (\lambda \in \mathcal{P}_{n,N}\text{のとき}), \\ 0 & (\text{それ以外のとき}). \end{cases}$$

と定義する. このとき, Schubert 類の積規則を与える有名な **Pieri の規則** [9] を利用すると, 上記の写像が環準同型であることが示される. これが, $N \to \infty$ の極限において, 1.1 節の同一視 (1) を, さらに $n \to \infty$ の極限において, (2) の同一視を与えるというわけである. ここでは分類空間 $BU(n)$ という "無限次元" の空間から話を始めたが, 本節で触れたように, 有限次元の複素 Grassmann 多様体 $Gr(n,\mathbb{C}^N)$ といった「Schubert 類が定義される空間」に対して, そのコホモロジー環と対称関数との関係を追求することは極めて自然である. このような空間としては, いわゆる**一般旗多様体**, すなわち連結な複素 (半単純) Lie 群 G を, その放物型部分群 P で割った等質多様体 G/P が考えられる. 例えば, Macdonald の本の第 III 章に登場する **Schur の Q-関数**と Lagrangian Grasmmann 多様体 $LG(n,\mathbb{C}^{2n})$ のコホモロジー環の Schubert 類との対応はよく知られている (Jozefiak [39], Pragacz [66, §6]). さらには, 考えるコホモロジー理論を通常のコホモロジー理論 $H^*(-)$ だけでなく, K-理論 $K^*(-)$ や複素および代数的コボルディズム理論 $MU^*(-)$, $\Omega^*(-)$, そして, それらの「トーラス同変版」などへ拡張することが, 多くの数学者によって, この 20 年ほどの間に精力的に進められている. 関連する文献を網羅することはできないが, 思いつくままを挙げておく: Kostant-Kumar [44], [45], Knutson-Tao [41], Ikeda [35], Ikeda-Naruse [36], Ikeda-Mihalcea-Naruse [37], Ikeda-Naruse [38], Hornbostel-Kiritchenko [34].

1.3. Lie 群上のループ空間の (コ) ホモロジー

ここで, いささか唐突ではあるが, 有名な「(複素) Bott の周期性定理」について触れておきたい. これは, Bott の原論文 [12, p.314, Corollary] では, 「無限ユニタリー群 $U = U(\infty)$ のホモトピー群が周期的であり, 周期 2 を持つ: $\pi_k(U) = \pi_{k+2}(U)$ $(k = 0,1,\ldots)$」という形で述べられているが, 本研究にとって利用しやすい形で述べ直しておこう: ΩSU を, 無限特殊ユニタリー群 $SU = SU(\infty)$ 上の基点付きループ空間とするとき, 「H-空間としてのホモトピー同値 $BU \xrightarrow{\sim} \Omega SU$ が存在する」. このことから, ΩSU の (コ) ホモロジーと対称関数環 Λ との Hopf 代数としての同型が存在する:

$$H_*(\Omega SU) \cong \Lambda, \quad H^*(\Omega SU) \cong \Lambda.$$

このようにして, 我々の研究対象の中に Lie 群上のループ空間が入ってくる. K をコンパクトな単連結, 単純 Lie 群, ΩK をその基点付きループ空間とすると, ΩK はループの積により, ホモトピー可換な H-空間となり, そのホモロジー群は偶数次の元のみから成る自由 $\mathbb{Z}$-加群の構造をもつ. このことから, そのホモロジー $H_*(\Omega K)$ は $\mathbb{Z}$ 上の可換な Hopf 代数の構造をもつ. この Hopf 代数構造の計算は, 多くの代数的トポロジストにより行われており, 本研究と関連する文献を挙げておくと, Bott [9], [10], [11], Bott-Samelson

[9] Fulton [27, p.146], Manivel [56, 3.2.8].

[13], Clarke [19], [20], [21], Kono-Kozima [42], Kozima [46], [47], [48], Petrie [64], Rao [71] などがある. 特に, Bott の結果が最も基本的であり, 例えば $\Omega SU(k+1)$ のホモロジーは, 次のような多項式環で与えられる:

$$H_*(\Omega SU(k+1)) = \mathbb{Z}[\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k].$$

ただし, $\sigma_i \in H_{2i}(\Omega SU(k+1))$ $(i = 1, \ldots, k)$. さらに, その余積構造は

$$\Delta(\sigma_r) = \sum_{p+q=r} \sigma_p \otimes \sigma_q \quad (\sigma_0 := 1), \tag{7}$$

により与えられる. この結果を, 1.1 節で述べた対称関数の視点から眺めてみると, 極めて自然に次のような同一視に思い至る:

$$H_*(\Omega SU(k+1)) = Z[\sigma_1, \ldots, \sigma_k] \xrightarrow{\sim} \Lambda_{(k+1)} := \mathbb{Z}[h_1, \ldots, h_k]. \tag{8}$$

Bott の論文 [11] を読むと, 彼の頭には間違いなく対称関数環との同一視 (8) があったと考えられるが, その方向性を「深化」させるには, もう少し時が必要だったようである. すなわち, 1970 年代に入り, Garland-Raghunathan [29] と Quillen (未発表) により独立に, ΩK がいわゆる**アフィン Grassmann 多様体**の構造をもつことが示された. すなわち, K の複素化を $G := K_{\mathbb{C}}$ とし,

$$\mathcal{G} := \{f : \mathbb{C}^* \longrightarrow G \text{ (正則)}\} \supset \mathcal{P} := \{f \in \mathcal{G} \mid f \text{ は原点も込めて正則}\}$$

とおくとき, G に付随するアフィン Grassmann 多様体 Gr_G を $\mathrm{Gr}_G := \mathcal{G}/\mathcal{P}$ と定義する. このとき, Garland-Raghunathan と Quillen は, ΩK と Gr_G がホモトピー同値であることを示した. これにより, Lie 群上のループ空間をも「無限次元の旗多様体」と見ることが可能となり, 1.2 節と同様に, 「Schubert 多様体」, 「Schubert 類」[10] が定義され, 同様の議論が展開される. これが近年, 「アフィン Schubert calculus」と呼ばれ, これまた凄まじい勢いで研究が行われている. ここに詳述する余裕はないが, 関連する文献を思いつくまま挙げておく: Lam [49], [50], Lam-Schilling-Shimozono [51], [52], Littig-Mitchell [54], Mitchell [58], [59], [60].

これらの研究を横目に見つつ, 筆者はもはや忘れ去られようとしている観のある代数的トポロジストの古い仕事を見直そうと考え, 特に, Clarke [19], [20], Kono-Kozima [42] に着目し, 彼らの結果を何とか「対称関数の視点」から解釈できないか, と 2010 年の終わり頃から模索を始めた. 成瀬氏と協力し, その模索の結果をひとまずまとめたものが, Nakagawa-Naruse [62] である. この論文においては, 通常のコホモロジー理論 $H^*(-)$ を「複素向き付け可能な (乗法的) 一般コホモロジー理論」[11] に拡張して議論を行っている. 特に, 複素向き付け可能な一般コホモロジー理論の中で「普遍性」をもつ「複素コボルディズム理論」$MU^*(-)$ における定式化を目標とし, 1.2 節で述べた Schur 関数の「普遍版」であり, 本講演の題目の中にもある**普遍 Schur 関数**を導入した. これについては 2 節において述べることとする.

[10] 今度は, コホモロジーではなく, ホモロジーにおける Schubert 類が考察の中心となる.
[11] Adams [1, Part II, p.37], Switzer [73, §16.27].

2. 普遍 (factorial) Schur 関数

1.2 節で述べたことを標語的に言うと，「複素 Grassmann 多様体のコホモロジー環における Schubert 類は Schur 関数により代表される」．この事実を雛形として，そこで述べたように，複素 Grassmann 多様体を含む様々な旗多様体のコホモロジー，K-理論などと，Schur 関数を含む様々な対称関数との密接な関連が明らかになりつつある．中でも，複素 Grassmann 多様体のトーラス同変コホモロジー環と **factorial Schur 関数**との関係 (Knutson-Tao [41, §6], Molev-Sagan [61, §2]) およびトーラス同変 K-理論と **factorial Grothendieck 多項式** (McNamara [57, §4], Ikeda-Naruse [38, §2.4, 9.3]) は取り分け重要であると考えられる．

2.1. 普遍 factorial Schur 関数

これらの先行研究を踏まえて，我々は，論文 [62, §4.5] において，これらの対称関数の「普遍版」を導入した．すなわち，$\mathbb{L}$ を Lazard 環 [12] とし，

$$F_{\mathbb{L}}(u,v) = u + v + \sum_{i,j\geq 1} a_{i,j}u^i v^j \in \mathbb{L}[[u,v]]$$

を (一次元の可換な) **普遍形式群**とする．以下では，

$$a +_{\mathbb{L}} b = F_{\mathbb{L}}(a,b) \text{ (形式和)}, \quad \overline{a} = \chi_{\mathbb{L}}(a) \text{ (形式的逆元)}$$

と書くことにする．非負整数 k に対して，通常の累乗 t^k の拡張として，

$$[t|\mathbf{b}]^k := \prod_{i=1}^{k}(t +_{\mathbb{L}} b_i) = (t +_{\mathbb{L}} b_1)(t +_{\mathbb{L}} b_2)\cdots(t +_{\mathbb{L}} b_k), \quad [t|\mathbf{b}]^0 := 1$$

とおく．また，長さが n 以下の分割 $\lambda \in \mathcal{P}_n$ に対して，$[\mathbf{x}|\mathbf{b}]^\lambda := \prod_{i=1}^n [x_i|\mathbf{b}]^{\lambda_i}$ と定義する．このとき，

定義 2.1. 分割 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathcal{P}_n$ に対して，**普遍 *factorial Schur* 関数** $s^{\mathbb{L}}_\lambda(\mathbf{x}_n|\mathbf{b})$ を，次の式により定義する [13]:

$$s^{\mathbb{L}}_\lambda(\mathbf{x}_n|\mathbf{b}) = s^{\mathbb{L}}_\lambda(x_1,\ldots,x_n|\mathbf{b}) := \sum_{w\in S_n} w\left[\frac{[\mathbf{x}|\mathbf{b}]^{\lambda+\rho_{n-1}}}{\prod_{1\leq i<j\leq n}(x_i +_{\mathbb{L}} \overline{x}_j)}\right].$$

さらに，その「非同変版」である**普遍 *Schur* 関数**を $s^{\mathbb{L}}_\lambda(\mathbf{x}_n) := s^{\mathbb{L}}_\lambda(\mathbf{x}_n|0)$ により定義する [14]．

$s^{\mathbb{L}}_\lambda(\mathbf{x}_n|\mathbf{b})$ の作り方と $F_{\mathbb{L}}(u,v)$ の「普遍性」により，全ての $a_{i,j} = 0$ と特殊化すると，通常の factorial Schur 関数が得られ，$a_{1,1} = \beta$ (いわゆる「Bott 元」)，それ以外の $a_{i,j} = 0$ と特殊化すると，factorial Grothendieck 多項式が得られることを注意しておく．その意味で，我々の $s^{\mathbb{L}}_\lambda(\mathbf{x}_n|\mathbf{b})$ は「普遍性」を持っている．

---

[12] Lazard 環 $\mathbb{L}$ と複素コボルディズム理論 $MU^*(-)$ との関係を最初に指摘したのは Quillen [69, Theorem2] である．Adams [1, Part II, Theorem 8.2], 河野-玉木 [43, 定理 6.30] なども参照．

[13] 1.2 節の (6) 式と比較していただきたい．

[14] 「非同変版」である普遍 Schur 関数は，既に Fel'dman [25, Definition 4.2] により導入されており，そこでは *generalized Schur polynomials* と呼ばれている．

3. Gysin 写像 (準同型)

3.1. Gysin 写像いろいろ

この節では本講演のもう一つの主役である **Gysin 写像 (準同型)** について述べておく[15]. 幾何学の様々な分野において, そして様々な設定の下で, 「自然な向き」とは「逆向きの写像」が定義され, 大変有用なものとなる. その主なものを (仔細には触れずに) 列挙しておくと,

(a) コホモロジー理論 $H^*(-)$ における Gysin 準同型[16]

(b) ファイバー上の積分[17]

(c) K-理論[18] $K(-)$ における Gysin 写像[19]

(d) 複素コボルディズム理論 $MU^*(-)$ における Gysin 写像[20]

などがある.

このように, 一般に「Gysin 写像 (準同型)」と呼ばれる写像は, 様々なコホモロジー理論において, 様々な設定の下で構成されているが, 重要なことは「複素向き付け可能な一般コホモロジー理論」$h^*(-)$ に対して, 然るべき空間の間の射 $f : X \longrightarrow Y$ から, 「逆向きの写像」$f_* : h^*(X) \longrightarrow h^*(Y)$ であって,

- (自然性) 合成射 $g \circ f : X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ に対して, $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ が成り立つ.
- (射影公式) $x \in h^*(X)$, $y \in h^*(Y)$ に対して, $f_*(f^*(y) \cdot x) = y \cdot f_*(x)$ が成り立つ.
- (基底変換) ファイバー積からなる可換図式

$$\begin{array}{ccc} X \times_Z Y & \xrightarrow{\tilde{f}} & Y \\ {\scriptstyle \tilde{g}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ X & \xrightarrow{f} & Z \end{array}$$

  に対して, $f^* \circ g_* = \tilde{g}_* \circ \tilde{f}^* : h^*(Y) \longrightarrow h^*(X)$ が成り立つ.

を持つものが定義できる, ということであると考えられる.

3.2. Gysin の公式いろいろ

Gysin 写像 (準同型) に関連して, 様々な「公式」が知られている. その中で本研究に密接に関連するものを挙げておこう.

[15] これまで本研究の動機について長々と書いてきたが, 本講演に直結する「Gysin の公式」との関係については, 次のような経緯がある: 去る 2014 年 10 月 20 日に, P. Pragacz 氏が来日され, 岡山大学にて講演された. その時の内容は, 論文 [68] に書かれてあるものであったが, その折に, 成瀬氏が「Pragacz の論文の内容は, 論文 [62] で定義された「普遍 Schur 関数」, 「普遍 Schur P, Q-関数」, さらには「普遍 Hall-Littlewood 関数」にも拡張できるのではないか」と仰ったことが研究の発端である.

[16] Fulton [27, Appendix B.1], 服部 [32, §8.1], Manivel [56, appendix A.3].

[17] Borel-Hirzebruch [6, §8].

[18] ここでは代数多様体上の連接層から構成される Grothendieck 群を指すものとする.

[19] Borel-Serre [8, §5, d.], Hartshorne [31, Appendix A, p.436], Hirzebruch [33, §23, p.170].

[20] Quillen [70, 1.4].

3.2.1. “$G/B \longrightarrow G/P$” の形の Gysin の公式

G を連結な半単純 (もしくは簡約) 複素代数群, B および T を, それぞれ Borel 部分群, 極大トーラスとする. G のルート系を $\Delta = \Delta^+ \bigsqcup \Delta^-$, $\Pi \subset \Delta^+$ を単純ルートの集合とする. 部分集合 $\Theta \subset \Pi$ に対応する放物型部分群を $P = P_\Theta$ とし, W_Θ および Δ_Θ を, それぞれ P_Θ に対応する Weyl 群, ルート系とする. 極大トーラス T の指標群を $\hat{T} = \mathrm{Hom}\,(T, \mathbb{C}^\times)$, $\mathrm{Sym}(\hat{T})$ を, その対称代数とするとき, 指標 $\chi \in \hat{T}$ に対して, G/B 上の直線束 $L_\chi := G \times_\chi \mathbb{C}$ の第一 Chern 類 $c_1(L_\chi) \in H^2(G/B; \mathbb{C})$ を対応させることにより, 特性準同型 $c : \mathrm{Sym}(\hat{T}) \longrightarrow H^*(G/B; \mathbb{C})$ が定義される. $\pi : G/B \longrightarrow G/P$ を自然な射影とするとき, 次の定理が知られている:

定理 3.1 (Akyildiz-Carrell [3], [4], Theorem 1)**.** *Gysin* 準同型

$$\pi_* : H^*(G/B; \mathbb{C}) \longrightarrow H^*(G/P; \mathbb{C})$$

は, 次で与えられる [21]:

$$\pi^* \circ \pi_* \, c(f) = c\left(\sum_{w \in W_\Theta} \frac{\det(w)\; w \cdot f}{\prod_{\alpha \in \Delta_\Theta^+} \alpha} \right) \quad (f \in \mathrm{Sym}(\hat{T})). \tag{10}$$

Akyildiz-Carrell ([3], [4, Theorem 1]) は, この公式を, 旗多様体上の正則ベクトル場の零点を利用した Gysin 準同型の記述を利用して証明している [22].

3.3. “$\mathcal{F}\ell(E) \longrightarrow X$” の形の公式

$E \overset{p}{\longrightarrow} X$ を階数 n の複素ベクトル束とし [23], $\tau = \tau_E : \mathcal{F}\ell(E) \longrightarrow X$ を, 付随する **(完全) 旗束**とする. 旗束上には, いわゆる「部分束からなる普遍な旗」

$$U_0 \subset U_1 \subset \cdots \subset U_{n-1} \subset U_n = \tau^*(E)$$

が存在するが, 商束 $Q_i := \tau^*(E)/U_{n-i} = E/U_{n-i}$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ を考える [24] ことにより, 「商束からなる普遍な旗」

$$E = Q_n \twoheadrightarrow Q_{n-1} \twoheadrightarrow \cdots \twoheadrightarrow Q_2 \twoheadrightarrow Q_1$$

が構成される. $\mathcal{F}\ell(E)$ 上の直線束を $L_i := \mathrm{Ker}\,(Q_i \twoheadrightarrow Q_{i-1})$ と定義し, $x_i := c_1(L_i) \in H^2(\mathcal{F}\ell(E))$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ とおく (E の Chern ルート). $\mathcal{F}\ell(E)$ の構成方法より, $\tau^*(E) = \oplus_{i=1}^n L_i$ と直線束の直和に分かれるので, 全 Chern 類を考えることにより,

$$c(E) = \tau^* c(E) = c(\oplus_{i=1}^n L_i) = \prod_{i=1}^n c(L_i) = \prod_{i=1}^n (1 + x_i)$$

[21] $\mathbb{C}$ 上では特性準同型 $c : \mathrm{Sym}(\hat{T}) \longrightarrow H^*(G/B; \mathbb{C})$ は全射であるから, この公式は,

$$\pi^* \circ \pi_*(x) = \sum_{w \in W_\Theta} w \cdot \left[\frac{x}{\prod_{\alpha \in \Delta_\Theta^+} \alpha} \right] \quad (x \in H^*(G/B; \mathbb{C})) \tag{9}$$

と書けることを注意しておく.

[22] 本質的に同じ公式を Brion [16, Proposition 2.1] が示している. Brion は, この公式を Weyl の指標公式および Grothendieck-Riemann-Roch の定理という「大道具」を用いて示している. また, この公式は Kajimoto [40, Theorem 2.3] においても示されている.

[23] 底空間 X について, 特に制限はしないが, いわゆる「ベクトル束の分類定理」が成り立つような空間とする.

[24] ベクトル束 E の $\mathcal{F}\ell(E)$ 上への引き戻し $\tau^*(E)$ も同じ記号 E で書くことにする.

が成り立つ. このことから, $\mathcal{F}\ell(E)$ のコホモロジー環は,

$$H^*(\mathcal{F}\ell(E)) = H^*(X)[x_1, \ldots, x_n]/(\prod_{i=1}^{n}(1 + x_i) = c(E))$$

で与えられる. このとき, 射影 $\tau : \mathcal{F}\ell(E) \longrightarrow X$ が誘導する Gysin 準同型 $\tau_* : H^*(\mathcal{F}\ell(E)) \longrightarrow H^*(X)$ について, 次の公式が知られている.

定理 3.2 (Pragacz [65], Lemma 2.4, Pragacz [67], Proposition 4.2 (ii), Fulton-Pragacz [28], p.41)**.** 多項式 $P \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ に対して,

$$\tau^* \circ \tau_*(P(x_1, \ldots, x_n)) = \sum_{w \in S_n} w \cdot \left[\frac{P}{\prod_{1 \le i < j \le n}(x_i - x_j)}\right] \tag{11}$$

が成り立つ.

Fulton-Pragacz [28, p.41] では, まず射影空間束 $\pi : P(E) = G_1(E) \longrightarrow X$ の場合 [25] の Gysin 準同型を計算し, その結果と次の分解

$$\mathcal{F}\ell(E) = \mathcal{F}\ell(Q_{n-1}) \stackrel{\tau' = \tau_{Q_{n-1}}}{\longrightarrow} G_1(E) = P(E) \stackrel{\pi'}{\longrightarrow} X$$

を用い, 階数 n に関する帰納法により証明している. 公式 (10), (9) と (11) の類似性は明白であるが, その証明方法は大きく異なる. しかし, 何らかの束の射影から誘導される Gysin 写像が, 対称群 (より一般に Weyl 群) の作用による和の形で書けている, という事実は, これらを統一的に扱える可能性があることを示唆しているのではないだろうか? そこで, 我々は Bressler-Evens の仕事 [14] に着目することにした. すなわち, $h^*(-)$ を, 複素向き付け可能な乗法的一般コホモロジー理論とする. ただし, $h^*(\mathrm{pt})$ はねじれ元をもたないと仮定する. 複素直線束 $L \longrightarrow X$ に対して, その $h^*(-)$ 理論 Euler 類 $\chi(L) \in h^*(X)$ が定まる. G をコンパクトな連結, 半単純 Lie 群, T をその極大トーラスとして, Borel のファイブレーション

$$G/T \hookrightarrow BT \stackrel{\rho}{\longrightarrow} BG$$

を考える. $\Delta = \Delta^+ \coprod \Delta^-$ を G のルート系, W_G を G の Weyl 群, 指標 $\lambda \in \mathrm{Hom}\,(T, S^1)$ に付随する BT 上の直線束を L_λ と書こう. このとき, $\rho : BT \longrightarrow BG$ が誘導する Gysin 準同型 $\rho_* : h^*(BT) \longrightarrow h^*(BG)$ について, Bressler-Evens は次を示した [26]:

定理 3.3 (Bressler-Evens [14], Theorem 1.8)**.** 上の設定の下で,

$$\rho^* \circ \rho_*(f) = \sum_{w \in W_G} w \cdot \left[\frac{f}{\prod_{\alpha \in \Delta^+} \chi(L_{-\alpha})}\right] \quad (f \in h^*(BT)) \tag{12}$$

が成り立つ.

[25] 階数 n の複素ベクトル束 $E \stackrel{p}{\longrightarrow} X$ に対して, r 次元線形部分空間からなる Grassmann 束を $G_r(E) \longrightarrow X$ と書くことにする (1.2 節では Grassmann 多様体を $Gr(n, \mathbb{C}^N)$ と書いていた). 特に, 射影空間束 $P(E) = G_1(E)$ である.

[26] 実は, 常コホモロジー理論 $H^*(-)$ の場合は, 既に Borel-Hirzebruch [7, Theorem 20.3] において示されていることに筆者は最近気が付いた.

この公式の導出には, Becker-Gottlieb [5] の**移送準同型 (トランスファー)** を利用したBrumfiel-Madsen の公式 [17, Theorem 3.5] が用いられていることを注意しておく.

さらに, Bressler-Evens [14] には述べられていないが, 定理3.3を次のように拡張することができる: H を最大階数 (すなわち極大トーラス T を含む) 閉連結部分群とし, H の Weyl 群, ルート系をそれぞれ W_H, $\Delta_H = \Delta_H^+ \sqcup \Delta_H^-$ とする. Borel のファイブレーション

$$G/H \hookrightarrow BH \xrightarrow{\sigma} BG$$

を考えるとき, $\sigma : BH \longrightarrow BG$ が誘導する Gysin 準同型 $\sigma_* : h^*(BH) \longrightarrow h^*(BG)$ について, 次が成り立つ:

系 3.4.

$$\sigma^* \circ \sigma_*(f) = \sum_{\overline{w} \in W_G/W_H} w \cdot \left[\frac{f}{\prod_{\alpha \in \Delta^+ \setminus \Delta_H^+} \chi(L_{-\alpha})} \right] \quad (f \in h^*(BH)).$$

定理3.3 とその系 3.4 を用いると, 先の定理3.1, 3.2 は容易に証明することができる. 例えば, 階数 n の複素ベクトル束 $E \xrightarrow{p} X$ が与えられたとき, ベクトル束の分類定理により, **分類写像** $f : X \longrightarrow BU(n)$ が存在し, 次の可換図式を得る:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}\ell(E) & \xrightarrow{\tilde{f}} & BT^n \\ {\scriptstyle \tau}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho} \\ X & \xrightarrow{f} & BU(n). \end{array}$$

$G = U(n)$ の場合, ルート系 $\Delta = \{\pm(x_i - x_j) \mid 1 \le i < j \le n\}$ であることと, Gysin 準同型の「基底変換」により, 定理3.2 は定理3.3 から直ちに従うことがわかる. さらには, Bressler-Evens の公式は複素コボルディズム理論 $MU^*(-)$ にも適用できる. 複素ベクトル束 $E \xrightarrow{p} X$ に対して, 複素コボルディズム理論における Chern 類 (Conner-Floyd Chern 類[27]) $c_i^{MU}(E) \in MU^{2i}(X)$ が定義され, $\mathcal{F}\ell(E)$ の複素コボルディズム理論 $MU^*(\mathcal{F}\ell(E))$ は,

$$MU^*(\mathcal{F}\ell(E)) = MU^*(X)[x_1, \ldots, x_n]/(\prod_{i=1}^n (1 + x_i) = c^{MU}(E))$$

($c^{MU}(E)$ は全 Chern 類)) で与えられる. このとき, 射影 $\tau : \mathcal{F}\ell(E) \longrightarrow X$ が誘導する Gysin 準同型 $\tau_* : MU^*(\mathcal{F}\ell(E)) \longrightarrow MU^*(X)$ について, 次が成り立つ:

定理 3.5. 多項式 $P \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ に対して,

$$\tau^* \circ \tau_*(P(x_1, \ldots, x_n)) = \sum_{w \in S_n} w \cdot \left[\frac{P}{\prod_{1 \le i < j \le n} (x_i +_{\mathbb{L}} \overline{x}_j)} \right]$$

が成り立つ.

[27] Adams [1, Part I, §4], Conner-Floyd [22, Corollary 8.3].

4. 旗束上のGysinの公式の応用

4.1. 普遍Schur関数の特徴付け

3.3節の設定の下で考える．分割 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathcal{P}_n$ に対するSchur多項式 $s_\lambda(\mathbf{x}_n)$ は, 変数 $x_1, \ldots, x_n$ に関する対称多項式であるから, 基本対称多項式 $e_i(\mathbf{x}_n)$ たちの多項式で表される．今, ベクトル束 E のChernルートを $x_1, \ldots, x_n$ とするとき, E のChern類 $c_i(E)$ は $e_i(\mathbf{x}_n)$ と同一視できた．そこで, $s_\lambda(\mathbf{x}_n)$ を $c_i(E)$ たちの多項式として表したものを $s_\lambda(E) \in H^{2|\lambda|}(X)$ と書くことにしよう．この記法の下で, 射影 $\tau : \mathcal{F}\ell(E) \longrightarrow X$ が誘導するGysin準同型 $\tau_* : H^*(\mathcal{F}\ell(E)) \longrightarrow H^*(X)$ を考えるとき, 単項式 $\mathbf{x}^{\lambda+\rho_{n-1}} := x_1^{\lambda_1+n-1} x_2^{\lambda_2+n-2} \cdots x_n^{\lambda_n}$ の, Gysin準同型による像は, 定理3.2により,

$$\tau_*(\mathbf{x}^{\lambda+\rho_{n-1}}) = \sum_{w \in S_n} w \cdot \left[\frac{\mathbf{x}^{\lambda+\rho_{n-1}}}{\prod_{1 \le i < j \le n}(x_i - x_j)} \right] = s_\lambda(E) \tag{13}$$

で与えられる (Pragacz [65, Lemma 2.3], Pragacz [67, Proposition 4.4], Pragacz [68, Example 8], Fulton-Pragacz [28, p.41, (4.1)])．この公式は, Fulton-Pragacz [28, p.42] では**Jacobi-Trudiの恒等式**と呼ばれており [28], これを利用して, 例えばGrassmann束 $G^q(E) = G_{n-q}(E) \xrightarrow{\pi} X$ 等に対する, 様々なGysinの公式が導かれている．定理 3.5を用いると, このJacobi-Trudiの恒等式 (13) を複素コボルディズム理論 $MU^*(-)$ に直ちに拡張することができ, 次の定理を得る:

定理 4.1. *Gysin*準同型 $\tau_* : MU^*(\mathcal{F}\ell(E)) \longrightarrow MU^*(X)$ を考えるとき, 単項式 $\mathbf{x}^{\lambda+\rho_{n-1}} = x_1^{\lambda_1+n-1} x_2^{\lambda_2+n-2} \cdots x_n^{\lambda_n}$ について,

$$\tau_*(\mathbf{x}^{\lambda+\rho_{n-1}}) = s_\lambda^{\mathbb{L}}(E) \tag{14}$$

が成り立つ.

4.2. 普遍Hall-Littlewood関数

論文Nakagawa-Naruse [62, Definition 4.1] では, 普遍Schur関数 $s_\lambda^{\mathbb{L}}(\mathbf{x}_n)$ に加えて, 通常のSchur P, Q-関数の「普遍版」である**普遍Schur P, Q-関数** $P_\lambda^{\mathbb{L}}(\mathbf{x}_n)$, $Q_\lambda^{\mathbb{L}}(\mathbf{x}_n)$ (およびそのfactorial版) も導入されており, これに対しても同様の特徴付けが得られている．これはPragaczの結果 [68, Example 11] の, 複素コボルディズム理論 $MU^*(-)$ への一般化でもある．紙数の関係上, **Hall-Littlewood関数** [29] についての結果のみを述べて, 本稿を終えることとする [30]．$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ を長さが n 以下の分割とする．正の整数 $m_1, m_2, \ldots, m_d$, $m_1 + m_2 + \cdots + m_d = n$, を

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{m_1} \ (m_1\text{個}),\\
&\lambda_{m_1+1} = \lambda_{m_1+2} = \cdots = \lambda_{m_1+m_2} \ (m_2\text{個}),\\
&\qquad\qquad \vdots\\
&\lambda_{m_1+m_2+\cdots+m_{d-1}+1} = \cdots = \lambda_n \ (m_d\text{個})
\end{aligned}$$

[28] 筆者は2014年の10月頃から, この辺りのGysinの公式について勉強し始めた．その折に, 公式 (13) を面白いと感じた．そう思っていろいろと調べてみると, (本質的に) 同じ公式は, 随分古くから, 多くの数学者によって導かれていたことがわかった．参考までに挙げておくと, Damon [24, Corollary 2], Harris-Tu [30, Proposition 2.3], Manivel [56, Exercise 3.8.3], Sugawara [72, Theorem A] などがある．

[29] Macdonald [55, III, §2].

[30] 記法については概ねPragacz [68] に従うこととする.

により定義する．これにより, $\{1,2,\ldots,n\}$ を d 個の "区間" $I_1, I_2, \ldots, I_d$ に分けよう: $[n] := \{1,2,\ldots,n\} = I_1 \sqcup I_2 \sqcup \cdots \sqcup I_d$. 各 $i \in [n]$ に対して, i が属する "区間" が I_r であるとき, $n(i) := r$ と定義する．S_n の部分群 S_n^λ を, λ の固定化部分群としよう．具体的には $S_n^\lambda = S_{m_1} \times S_{m_2} \times \cdots \times S_{m_d}$ である．次に, 普遍形式群 $F_{\mathbb{L}}(u,v)$ の**対数**を $l(x)$ とする[31]．対数 $l(x)$ を用いると, 形式和 $a +_{\mathbb{L}} b = F_{\mathbb{L}}(a,b)$ を $a +_{\mathbb{L}} b = l^{-1}(l(a)+l(b))$ と書くことができる．これを用いて, 不定元 t に対して, $[t](x) := l^{-1}(t \cdot l(x))$ と定義する[32]．以上の記号の下に, 次のように定義しよう:

定義 4.2. 分割 $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \mathcal{P}_n$ に対して, **普遍** ***Hall-Littlewood*** **関数** $H^{\mathbb{L}}_\lambda(\mathbf{x}_n;t)$ を, 次の式により定義する:

$$H^{\mathbb{L}}_\lambda(\mathbf{x}_n;t) = H^{\mathbb{L}}_\lambda(x_1,\ldots,x_n;t) := \sum_{\overline{w} \in S_n/S_n^\lambda} w \cdot \left[\mathbf{x}^\lambda \prod_{1 \le i < j \le n,\, n(i) \ne n(j)} \frac{x_i +_{\mathbb{L}} [t]\overline{x}_j}{x_i +_{\mathbb{L}} \overline{x}_j} \right].$$

次に, 列 $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ に対して, これに付随する「$(d-1)$-段の旗束」を $\eta_\lambda : \mathcal{F}\ell^\lambda(E) \longrightarrow X$ としよう．すなわち, 階数が

$$n - m_d, n - m_d - m_{d-1}, \ldots, n - m_d - m_{d-1} - \cdots - m_2$$

である E の商束からなる部分旗束[33]である．射影 $\eta_\lambda : \mathcal{F}\ell^\lambda(E) \longrightarrow X$ が誘導する Gysin 準同型 $\eta_{\lambda *} : MU^*(\mathcal{F}\ell^\lambda(E)) \longrightarrow MU^*(X)$ を考えよう．$f : X \longrightarrow BU(n)$ をベクトル束 E の分類写像とするとき, $\mathcal{F}\ell^\lambda(E)$ の作り方から, 次の可換図式が得られる:

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{F}\ell^\lambda(E) & \xrightarrow{\tilde{f}} & B(U(m_1) \times U(m_2) \times \cdots \times U(m_d)) \\
{\scriptstyle \eta_\lambda}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \sigma} \\
X & \xrightarrow{f} & BU(n).
\end{array}$$

これと系 3.4 より, 次を得る:

定理 4.3. S_n^λ-不変な多項式 $P \in \mathbb{Z}[X_1,\ldots X_n]^{S_n^\lambda}$ に対して,

$$(\eta_\lambda)^* \circ (\eta_\lambda)_*(P(x_1,\ldots,x_n)) = \sum_{\overline{w} \in S_n/S_n^\lambda} w \left[\frac{P}{\prod_{1 \le i < j \le n,\, n(i) \ne n(j)} (x_i +_{\mathbb{L}} \overline{x}_j)} \right]$$

が成り立つ．

これより, 普遍 Hall-Littlewood 関数 $H^{\mathbb{L}}_\lambda(\mathbf{x}_n;t)$ の特徴付けが得られる:

系 4.4. *Gysin* 準同型 $(\eta_\lambda)_* : MU^*(\mathcal{F}\ell^\lambda(E)) \longrightarrow MU^*(X)$ に対して, 次が成り立つ:

$$(\eta_\lambda)_* \left(\mathbf{x}^\lambda \prod_{1 \le i < j \le n,\, n(i) \ne n(j)} (x_i +_{\mathbb{L}} [t]\overline{x}_j) \right) = H^{\mathbb{L}}_\lambda(\mathbf{x}_n;t).$$

---

[31] 河野-玉木 [43, 定義 6.26], Quillen [69, p.1293].

[32] 通常, 非負整数 n に対して, 「n-列」 $[n](x)$ を, 帰納的に $[n](x) := [n-1](x) +_{\mathbb{L}} x\ (n \ge 1)$, $[0](x) := 0$ により定義する．対数 $l(x)$ を用いると, $[n](x) = l^{-1}(n \cdot l(x))$ と書けることに注意する．

[33] Fulton [27, §9.1] の記法に従えば, $\mathcal{F}\ell^\lambda(E) = F\ell^{n-m_d, n-m_d-m_{d-1}, \ldots, n-m_d-m_{d-1}-\cdots-m_2}(E)$ である．

参考文献

[1] J. F. Adams, Stable Homotopy and Generalised Homology, Chicago Lectures in Mathematics (1974), The University of Chicago Press.

[2] E. Akyildiz, Gysin homomorphism and Schubert calculus, Pacific J. of Math. **115** (1984), 257–266.

[3] E. Akyildiz and J. B. Carrell, Zeros of holomorphic vector fields and the Gysin homomorphism, Proc. Symp. Pure Math. Summer Institute of Singularities (Arcata, 1981), **40**, Part 1, Providence, 1983, 47–54.

[4] E. Akyildiz and J. B. Carrell, An algebraic formula for the Gysin homomorphism from G/B to G/P, Ill. J. of Math. **31** (1987), 312–320.

[5] J. C. Becker and D. H. Gottlieb, The transfer map and fiber bundles, Topology **14** (1975) 1–12.

[6] A. Borel and F. Hirzebruch, Characteristic classes and homogeneous spaces I, Amer. J. Math. **80** (1958), 458–538.

[7] A. Borel and F. Hirzebruch, Characteristic classes and homogeneous spaces II, Amer. J. Math. **81** (1959), 315–382.

[8] A. Borel and J. P. Serre, Le théorème de Riemann-Roch, Bull. Soc. Math. France **86** (1958), 97–136.

[9] R. Bott, On torsion in Lie groups, Proc. Nat. Acad. Sci. **40** (1954), 586–588.

[10] R. Bott, An application of the Morse theory to the topology of Lie-groups, Bull. Soc. Math. France **84** (1956), 251–281.

[11] R. Bott, The space of loops on a Lie group, Michigan Math. J. **5** (1958), 35–61.

[12] R. Bott, The stable homotopy of the classical groups, Ann. of Math. (2) **70** (1959), 313–337.

[13] R. Bott and H. Samelson, Applications of the theory of Morse to the symmetric spaces, Amer. J. Math. **80** (1958), 964–1029.

[14] P. Bressler and S. Evens, The Schubert calculus, braid relations, and generalized cohomology, Trans. Amer. Math. Soc. **317** (1990), no. 2, 799–811.

[15] P. Bressler and S. Evens, Schubert calculus in complex cobordism, Trans. Amer. Math. Soc. **331** (1992), no. 2, 799–813.

[16] M. Brion, The push-forward and Todd class of flag bundles, Parameter Spaces (P. Pragacz, ed.), **36**, Banach Center Publications, 1996, 45–50.

[17] G. Brumfiel and I. Madsen, Evaluation of the transfer and the universal surgery classes, Inv. Math. **32** (1976), 133-169.

[18] A. S. Buch, Grothendieck classes of quiver varieties, Duke Math. J. **115** (2002), 75–103.

[19] F. Clarke, On the K-theory of the loop space on a Lie group, Proc. Camb. Phil. Soc. **76** (1974), 1–20.

[20] F. Clarke, The K-theory of $\Omega Sp(n)$, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **32** (1981), 11–22.

[21] F. Clarke, On the homology of ΩSp, J. London Math. Soc. (2) **24** (1981), 346–350.

[22] P. E. Conner and E. E. Floyd, The relation of cobordism to K-theories, Lecture Notes in Mathematics **28** (1966), Springer-Verlag.

[23] J. Damon, The Gysin homomorphism for flag bundles, Amer. J. Math. **95** (1973), 643–659.

[24] J. Damon, The Gysin homomorphism for flag bundles: applications, Amer. J. Math. **96** (1974), 248–260.

[25] K. E. Fel'dman, An equivariant analog of the Poincaré-Hopf theorem, J. Math. Sci., **113** (2003), 906–914; Translated from Zap. Nauchn. Sem. POMI, **267** (2001), 303–318.

[26] W. Fulton, Intersection Theory, Second Edition, Springer-Verlag, 1998.

[27] W. Fulton, Young Tableaux, London Mathematical Society Student Texts **35**, Cambridge University Press, 1997.

[28] W. Fulton and P. Pragacz, Schubert varieties and degeneracy loci, Lecture Notes in Math. **1689**, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[29] H. Garland and R. S. Raghunathan, A Bruhat decomposition for the loop space of a compact group: A new approach to results of Bott, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **72** (1975), 4716–4717.

[30] J. Harris and L. Tu, Chern numbers of kernel and cokernel bundles, Invent. Math. **75** (1984), 467–475.

[31] R. Hartshorne, Algebraic Geometry, Graduate Texts in Math. **52**, Springer-Verlag, 1977.

[32] 服部 晶夫, 岩波講座 基礎数学 位相幾何学II, 岩波書店 (1978年).

[33] F. Hirzebruch, Topological Methods in Algebraic Geometry, Reprint of the 1978 Edition, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, 1995.

[34] J. Hornbostel and V. Kiritchenko, Schubert calculus for algebraic cobordism, J. reine. angew. Math. **656** (2011), 59–85.

[35] T. Ikeda, Schubert classes in the equivariant cohomology of the Lagrangian Grassmannian, Adv. in Math. **215** (2007), 1–23.

[36] T. Ikeda and H. Naruse, Excited Young diagrams and equivariant Schubert calculus, Trans. Amer. Math. Soc., **361** (2009), 5193–5221.

[37] T. Ikeda, L. C. Mihalcea, and H. Naruse, Double Schubert polynomials for the classical groups, Adv. in Math. **226** (2011), 840–866.

[38] T. Ikeda and H. Naruse, K-theoretic analogue of factorial Schur P- and Q-functions, Adv. in Math. **243** (2013), 22–66.

[39] T. Józefiak, Schur Q-functions and cohomology of isotropic Grasmannians, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **109** (1991), 471–478.

[40] H. Kajimoto, The Poincaré duality and the Gysin homomorphism for flag manifolds, Hiroshima Math. J. **27** (1997), 189–207.

[41] A. Knutson and T. Tao, Puzzles and (equivariant) cohomology of Grassmannians, Duke Math. J. **119** (2003), 221–260.

[42] A. Kono and K. Kozima, The space of loops on a symplectic group, Japanese J. Math. **4** (1978), 461–486.

[43] 河野 明, 玉木 大, 岩波講座 現代数学の展開 11 一般コホモロジー, 岩波書店 (2002年).

[44] B. Ksotant and S. Kumar, The Nil Hecke ring and cohomology of G/P for a Kac-Moody group G, Adv. in Math. **62** (1986), 187–237.

[45] B. Kostant and S. Kumar, T-equivariant K-theory of generalized flag varieties, J. Differential Geom. **32** (1990), no.2, 549–603.

[46] K. Kozima, The Hopf algebra structure of $K_*(\Omega Sp(n))$, J. Math. Kyoto Univ. **19** (1979), 315–326.

[47] K. Kozima, The comodule structure of $K_*(\Omega Sp(n))$, J. Math. Kyoto Univ. **20** (1980), 315–325.

[48] K. Kozima, The Hopf algebra structure of $MU_*(\Omega Sp(n))$, J. Math. Kyoto Univ. **23** (1983), 225–232.

[49] T. Lam, Schubert polynomials for the affine Grassmannian, J. Amer. Math. Soc. **21**, No.1 (2008), 259–281.

[50] T. Lam, Affine Schubert classes, Schur positivity, and combinatorial Hopf algebras, Bull. London Math. Soc. **43** (2011), 328–334.

[51] T. Lam, A. Schilling, and M. Shimozono, Schubert polynomials for the affine Grassmannian of the symplectic group, Math. Z. **264** (2010), 765–811.

[52] T. Lam, A. Schilling, and M. Shimozono, K-theory Schubert calculus of the affine Grassmannian, Compos. Math. **146** (2010), 811–852.

[53] M. Levine and F. Morel, Algebraic Cobordism, Springer Monographs in Math. 2007.

[54] P. J. Littig and S. A. Mitchell, Generating varieties for affine Grassmannians, Trans. Amer. Math. Soc. **363** (2011), 3717–3731.

[55] I. G. Macdonald, Symmetric functions and Hall polynomials, 2nd edition, Oxford Univ. Press, Oxford, 1995.

[56] L. Manivel, Symmetric Functions, Schubert Polynomials and Degeneracy Loci, SMF/AMS Texts and Monographs vol. **6**, Amer. Math. Soc., 2001.

[57] P. J. McNamara, Factorial Grothendieck polynomials, Electron. J. Combin., **13** (2006), no.1, Research Paper 71.

[58] S. A. Mitchell, A filtration of the loops on $SU(n)$ by Schubert varieties, Math. Z. **193**, no.3 (1986), 347–362.

[59] S. A. Mitchell, The Bott filtration of a loop group, Algebraic topology, Barcelona, 1986, 215–226, Lecture Notes in Math., **1298**, Springer, Berlin, 1987.

[60] S. A. Mitchell, Quillen's theorem on buildings and the loops on a symmetric space, Enseign. Math. (2) **34** (1988), no.1-2, 123–166.

[61] A. I. Molev and B. E. Sagan, A Littlewood-Richardson rule for factorial Schur functions, Trans. Amer. Math. Soc. **351** (1999), 4429–4443.

[62] M. Nakagawa and H. Naruse, Generalized (co)homology of the loop spaces of classical groups and the universal factorial Schur P- and Q-functions, arXiv:math.AT/1310.8008; Advanced Studies in Pure Mathematicsに掲載予定.

[63] 岡田 聡一, 数理物理シリーズ4 古典群の表現論と組合せ論 下, 培風館 (2006年).

[64] T. Petrie, The weakly complex bordism of Lie groups, Ann. of Math. (2) **88** (1968), 371–402.

[65] P. Pragacz, Enumerative geometry of degeneracy loci, Ann. Sci. École Norm. Sup. **21** (1988), 413–454.

[66] P. Pragacz, Algebro-geometric applications of Schur S- and Q-polynomials, Topics in invariant theory (Paris, 1989/1990), 130–191, Lecture Notes in Math., **1478**, Springer, Berlin, 1991.

[67] P. Pragacz, Symmetric polynomials and divided differences in formulas of intersection theory, Parameter Spaces (P. Pragacz, ed.), **36**, Banach Center Publications, 1996, 125–177.

[68] P. Pragacz, *A Gysin formula for Hall-Littlewood polynomials*, ArXiv:1403.0788.

[69] D. Quillen, On the formal group laws of unoriented and complex cobordism theory, Bull. Amer. Math. Soc., **75**, No.6 (1969), 1293–1298.

[70] D. Quillen, Elementary proofs of some results of cobordism theory using Steenrod operations, Adv. in Math. **7** (1971), 29–56.

[71] V. Rao, The Hopf algebra structure of the complex bordism of the loop spaces of the special orthogonal groups, Indiana Univ. Math. J. **38** (1989), 277–291.

[72] T. Sugawara, The Gysin homomorphism for generalized flag bundles, Memoirs of the Faculty of Science, Kyushu University, Ser. A, **42** (1988), 131–144.

[73] R. Switzer, Algebraic Topology -Homology and Homotopy, Classics in Mathematics, Reprint of the 1975 Edition, Springer-Verlag, Berlin, 2002.