

Normalized Entropy versus Volume for Pseudo-Anosovs

小島 定吉

東京工業大学大学院情報理工学研究科

1 プロローグ

種数が g , パンクチャの個数が m の曲面を $\Sigma_{g,m} = \Sigma$ で表す. $\chi(\Sigma) = 2 - 2g - m < 0$ のとき, Σ は双曲構造を許容する. このとき, Nielsen-Thurston により Σ の写像類 φ は周期的, 擬 Anosov, およびそれらの和に分解される可約の3種類に分類される ([27], あるいはたとえば [10] を参照されたい).

写像類 φ の複雑度を測る一つの指標としてエントロピー $\text{ent } \varphi$ がある, ただし $\text{ent } \varphi$ は, φ という類に属する写像の位相的エントロピーの下限として定義する. その値は, 周期的な場合はゼロ, 擬 Anosov の場合は拡大指数 λ (dilatation) の対数 $\log \lambda$, 可約の場合は擬 Anosov 成分の拡大指数の最大値であり, φ の Teichmüller 移動距離

$$(\text{ent } \varphi) \|\varphi\|_{\mathcal{T}} = \inf_{X \in \mathcal{T}} d_{\mathcal{T}}(X, \varphi X)$$

と一致することが分かっている [4, 15], ここで \mathcal{T} は Σ の Teichmüller 空間, $d_{\mathcal{T}}$ は \mathcal{T} 上の Teichmüller 距離である.

一方, 写像類 φ が擬 Anosov であるとき, 代表元 $h \in \varphi$ を選び写像トーラスの同相類を

$$N_{\varphi} = \Sigma \times [0, 1] / (h(x), 0) \sim (x, 1)$$

で表すと, N_{φ} は双曲構造を持つことが知られている [28]. Mostow 剛体性により双曲構造は位相不変なので, たとえばその体積 $\text{vol } N_{\varphi}$ は写像類の複雑さを測るもう一つの指標となる. 本講演のテーマは両不変量の値の比較である.

曲面のトポロジーを指定したとき, エントロピーの分布は離散的で ∞ に発散することが知られている (たとえば [13] を参照). また写像トーラスの体積は, 閉包をとれば ω^{ω} の順序型で分布することが知られている [26]. 高沢は学位論文 [25] で種数 2 の場合に横軸に体積, 縦軸にエントロピーをとり, 写像類群の Lickolish 生成元で長さが 10(?) 以下で表される写像類についてその位置をプロットした (図 1).

高沢の観察を元に, 金, 高沢と講演者は [14] において, N_{φ} の双曲体積 $\text{vol } N_{\varphi}$ と φ のエントロピー $\text{ent } \varphi$ を比較し, とくに,

$$\text{ent } \varphi \geq C(g, m) \text{vol } N_{\varphi} \tag{1.1}$$

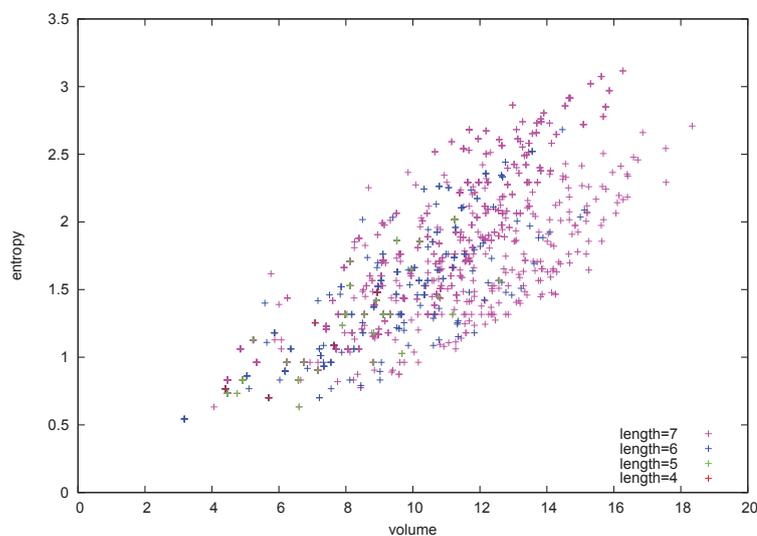


図 1: エントロピー vs 体積

をみたく Σ のトポロジーのみによる定数 $C(g, m) > 0$ が存在することを証明した。

この結果は、計算が困難な定数に関わる Brock [6] の結果によっているため、主張は定数 $C(g, m)$ の存在のみに留まる。一方、Penner は [23] で Σ のトポロジーが複雑になると擬 Anosov のエントロピーは限りなくゼロの近づく例を構成しており、3次元双曲多様体の体積が下から正の定数で抑えられていることを考慮すると、

$$g + m \rightarrow \infty \quad \text{のとき} \quad C(g, m) \rightarrow \infty$$

となる。

その後、高沢の実験はブレイドに適用することにより計算の効率が向上し、 Σ のトポロジーの違いが如何に評価に反映するかもしだいに見通しがついてきた。これらの計算機実験によると、エントロピーにたとえば曲面の面積 ($= 2\pi|\chi(\Sigma)|$) をかけて正規化すると、正規化されたエントロピーと写像トーラスの体積の比は、曲面のトポロジーによらない定数で下から抑えられることが予想された。図 2 は、ブレイド指数が 6 以下の擬 Anosov ブレイドの正規化されたエントロピーと写像トーラスの体積を同じスケールでプロットした図だが、予想をサポートするのに十分な証拠となろう。

2 評価の改良と系

本講演では、 $C(g, m)$ の一つの明示的な値を求め予想を確認した McShane 氏との共同研究 [16] を紹介する。まず

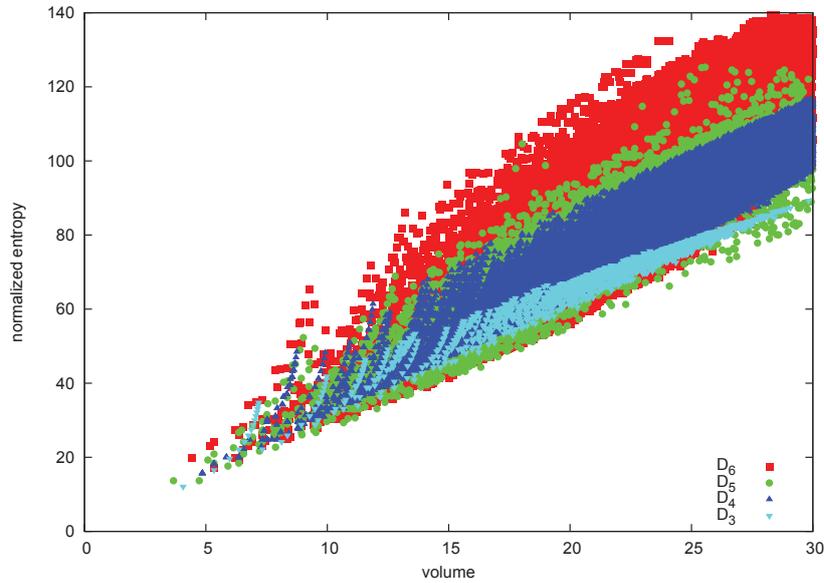


図 2: 正規化されたエントロピー vs 体積

定理 1. 任意の擬 Anosov φ に対し,

$$\text{ent } \varphi \geq \frac{1}{3\pi|\chi(\Sigma)|} \text{vol } N_\varphi, \quad (2.1)$$

あるいは同値であるが,

$$2\pi|\chi(\Sigma)| \text{ent } \varphi \geq \frac{2}{3} \text{vol } N_\varphi \quad (2.2)$$

が成り立つ.

(2.2) の左辺に現れる量は正規化されたエントロピーであり, 両辺を $\text{vol } N_\varphi$ で割れば, 正規化されたエントロピーと写像トーラスの体積の比は曲面のトポロジーによらない正定数で下から抑えられることを主張する.

注意 2. 定理 1 における $C(g, m)$ の明示的値は, 精密な値に対し著しく異なるわけではない. たとえば, 1 点穴あきトーラスに対して不等式 (2.1) は

$$\frac{\text{ent } \varphi}{\text{vol } N_\varphi} \geq \frac{1}{3\pi} = 0.10610\dots$$

となるが, この場合 [14] の Conjecture 6.10 に記した予想では

$$\frac{\text{ent } \varphi}{\text{vol } N_\varphi} \geq \frac{\log \frac{3+\sqrt{5}}{2}}{2v_3} = 0.47412\dots,$$

ただし $v_3 = 1.01494\dots$ は双曲理想正 4 面体の体積であり, 予想値は 8 の字結び目の補空間で実現される.

最初の系として、少なくともパンクチャーが一つある場合に、Penner [23] による評価

$$\text{ent } \varphi \geq \frac{\log 2}{4(3g - 3 + m)}$$

が改良できる.

系 3. φ を $\Sigma_{g,m}$ の擬 Anosov とし, $m \geq 1$ とする. このとき

$$\text{ent } \varphi \geq \frac{2v_3}{3\pi|\chi(\Sigma)|} = \frac{2v_3}{3\pi(2g - 2 + m)}$$

が成り立つ.

証明. Cao と Meryerhoff [9] により, 向き付け可能な非コンパクト 3 次元双曲多様体の最小体積は 8 の字結び目の補空間で実現され, その値は $2v_3$ であることが分かっている. したがって (2.1) の $\text{vol } N_\varphi$ を $2v_3$ に置き換えればよい. \square

注意 4. 多様体が円周上の曲面束の構造を持てば 1 次元 Betti 数は正である. さらに 1 次元 Betti 数が正の 3 次元双曲多様体の体積の最小値は $2v_3$ と予想されている. この予想が正しければ, 系 3 の “ $m \geq 1$ ” という仮定は落とせる.

二つ目の系として, 小さい正規化されたエントロピーをもつ擬 Anosov に対する Farb, Leininger と Margalit の有限性定理をやや弱めた命題に, 別証明を与えることができる.

系 5 (Farb-Leininger-Margalit [11], Agol [1]). 任意の正定数 $C > 0$ に対し, 有限個のカusp付き 3 次元双曲多様体 M_k が存在して以下をみたす: 任意の $2\pi|\chi(\Sigma)| \text{ent } \varphi < C$ をみたす Σ 上の擬 Anosov φ は, ある M_k の Dehn 手術によるえられる多様体の曲面束のモノドゥロミーとしてえられる.

注意 6. Farb, Leininger と Margalit は, さらに M_k は曲面束構造をもち, Dehn 手術はファイバーのパンクチャーに沿っていることも主張している.

証明. $2\pi|\chi(\Sigma)| \text{ent } \varphi < C$ とすると, 定理 1 により $\text{vol } N_\varphi$ は上から抑えられる. このとき N_φ の細い部分は Margulis の補題によりカuspか短い測地線のチューブの互いに交わらない和になる. したがって太い部分の境界は有限個のトーラスの和になり, N_φ はこれらを Dehn 手術することによりえられる. N_φ の体積は太い部分の体積を上から抑えている. Jorgensen と Thurston [26] は, 太い部分は半径が一定以上のボールで被覆できることを使って位相型が有限であることを示したが, 後はこれを使えばよい. \square

定理 1 の証明中のエントロピー, あるいは Teichmüller 移動距離を Weil-Petersson 移動距離

$$\|\varphi\|_{\text{WP}} = \inf_{X \in \mathcal{T}} d_{\text{WP}}(X, \varphi X)$$

に置き換えることにより, Brock [6] の Theorem 1.1 の定数を明示的にすることもできる. ここで d_{WP} は Teichmüller 空間 \mathcal{T} 上の Weil-Petersson 距離である.

系 7. Σ がコンパクトのとき, 任意の擬 Anosov φ に対し,

$$\|\varphi\|_{\text{WP}} \geq \frac{2}{3\sqrt{2\pi|\chi(\Sigma)|}} \text{vol } N_\varphi,$$

あるいは同値であるが,

$$\sqrt{2\pi|\chi(\Sigma)|} \|\varphi\|_{\text{WP}} \geq \frac{2}{3} \text{vol } N_\varphi$$

が成り立つ, ただし $\|\cdot\|_{\text{WP}}$ は φ の Weil-Petersson 移動距離である.

注意 8. 擬 Anosov の族 φ_k で $\|\varphi_k\|_{\text{WP}}$ は有界だが $\text{ent } \varphi_k = \|\varphi_k\|_{\text{T}}$ は発散し, その写像トラスはカuspをもつ双曲多様体に収束する例がある. したがって $\text{vol } N_\varphi$ の評価という視点からは Weil-Petersson 移動距離の方が優れている. あとで記すが, Dumas の計算によれば, 実は一様移動距離 $\|\varphi\|_\infty$ がさらに優れている.

定理 1 の証明は二つのイングredientからなる. ひとつは McMullen [18] および Brock-Bromberg [7] による Klein 群の擬等角変形の幾何学的非柔軟性に基ずく, N_φ の無限巡回被覆に収束する擬 Fuchs 群の列の凸芯の体積の漸近評価である. もう一つは, Krasnov と Schlenker による擬 Fuchs 多様体の繰り込み体積と凸芯の双曲体積の比較に関する最近の結果 [17, 21] である. この二つを前提に話を大体まとめて約 2 年前にいろいろな所で結果を話し始めたのだが, 我々が既知と信じていた命題について世間での理解とギャップがあったようで, 細部を埋める作業が今年初頭まで続いた. 以下の二つの節で, 我々の見落としていたことを説明したい.

3 凸芯の体積

ここでの役者は Fuchs 群の擬等角変形として定義される擬 Fuchs 群である. 擬 Fuchs 群, あるいは擬 Fuchs 多様体は, Bers [3] により無限遠にある二つの Riemann 面の等角構造で径数付けされることが知られている. φ を擬 Anosov, $X \in \mathcal{T}$ を (じつは何でも良いのだが) φ が不変にする \mathcal{T} 上の Teichmüller 測地線上の Riemann 面, $C(\varphi^{-n}X, \varphi^n X)$ を Bers の径数付けで $(\varphi^{-n}X, \varphi^n X)$ に住む擬 Fuchs 多様体 $Q(\varphi^{-n}X, \varphi^n X)$ の凸芯とする. このとき Brock は [6] で,

... geometric inflexibility should yield a proof that the limit as $n \rightarrow \infty$

$$\text{vol } C(\varphi^{-n}X, \varphi^n X) = 2n \text{vol } N_\varphi + O(1) \tag{3.1}$$

と記している. さらに Brock と Bromberg は非コンパクトな Riemann 面まで含めて非柔軟性を [7] で証明している. 私は専門家の間ではこの漸近評価は既知のことと思っていたのだが, McShane 氏との話し合いで証明を付けるべきということになった. さらに非コンパクトの場合は Brock-Bromberg の非柔軟性が技術的にたいへん複雑であり, 我々

はやや退き Riemann 面がコンパクトであると仮定し, Minsky による凸芯の双リプシツモデル [19] と Rafi による Teichmüller 測地線上に分布する曲面上の短い測地線に関する結果 [24] を使って証明を与えた. 詳細は [16] の appendix を参照されたい. また Σ が非コンパクトな場合の定理 1 の証明は, コンパクトな場合に帰着する巧妙なトリックを使ったことに言及しておく.

なお, ほぼ同時期に本家である Brock と Bromberg も同じ漸近評価の証明を得て [8] に発表している. さらに, じつは定理 1 の証明には漸近評価 (3.1) の左辺の $\liminf_{n \rightarrow \infty}$ が右辺を上から評価することで十分で, 我々の証明も最初はその片側だけだったのだが, この一方向の評価については McMullen が我々の議論よりもさらにシンプルな議論を与えていることを付記しておく.

4 繰り込み体積

もう一つのイングredientは Krasonov-Schlenker による擬 Fuchs 多様体の繰り込み体積 Rvol である. 定義は [17, 21, 16] に譲るとして,

命題 9 (Schlenker [21]). Σ がコンパクトのとき, Σ のトポロジーのみによる定数 $D = D(\Sigma)$ が存在して, 任意の擬 Fuchs 群 $Q(X, Y)$ に対して

$$\text{vol } C(X, Y) \leq \text{Rvol } Q(X, Y) + D$$

が成り立つ.

という命題を念頭に, 繰り込み体積を上から評価する過程で我々が混乱した状況を説明したい.

Schlenker は [21] で, $X, Y \in \mathcal{T}$ に対応する擬 Fuchs 多様体 $Q(X, Y)$ の繰り込み体積を, X, Y 間の Weil-Petersson 距離で上から評価した. その方法を, しばらく \mathcal{T} 上の距離を指定せずに辿ることにする. 主役は正則 2 次微分である. X と Y を結ぶ \mathcal{T} 上の単位速度のパスを Y_t とし, 擬 Fuchs 群の 1 径数族 $\{Q(X, Y_t)\}_{0 \leq t \leq d}$ を考える. このとき $q_t \in Q(X)$ を $Q(X, Y_t)$ により決まる Y_t 上の複素射影構造を定める正則 2 次微分, および μ_t を dY_t/dt が表す Beltrami 微分とすると, Schlenker により繰り込み体積の時間微分は, ある定数 C_0 を用いて

$$\frac{d}{dt} \text{Rvol } Q(X, Y_t) \leq C_0 \left| \int_{Y_t} q_t \mu_t \right| \quad (4.1)$$

と評価された. 実は Schlenker は [21] で明示的に $C_0 = 1/4$ と主張しているが, それは誤りで, 後日談の説明のためここではあえて C_0 と記しておく.

彼は評価 (4.1) から Nehari [20] によるノルムの評価 $\|q\|_\infty \leq 6$ を使って繰り込み体積の Weil-Petersson 距離による上からの評価を得たが, この ≤ 6 という評価は Riemann 面

の計量が定曲率 -4 という前提で計算されていることを見落としていたようである。我々は McMullen からこれを定曲率 -1 に置き換えて計算すれば評価が 4 倍改良できるというコメントをもらい、とすると注意 2 での値の差が

$$0.47412\dots \text{ 対 } 0.4244\dots (= 0.10610\dots \times 4)$$

と大きく縮まるので、喜び勇んで準備中だった論文中の評価を書き直し、昨年 11 月に [16] の version 1 を arXiv にアップロードした。

ところがその後、McMullen からより詳しい解析の結果が届き唾然とすることになる。詳細を説明するため、Teichmüller 空間のノルムについて復習する。Riemann 面 X を一つ固定し、 X 上の正則 2 次微分全体の空間を $Q(X)$ で表す。 $q \in Q(X)$ の L^p ノルムは

$$\begin{aligned} \|q\|_\infty &= \sup_{x \in X} \rho^{-2} |q(x)| \quad \text{および,} \\ \|q\|_p &= \left(\int_X \rho^{2-2p} |q|^p \right)^{1/p} \end{aligned}$$

で定義される、ただし ρ^2 は定曲率 -1 の双曲面積要素である。このとき

$$\|q\|_p \leq \|q\|_\infty (2\pi|\chi(\Sigma)|)^{1/p}$$

がなりたつ。 $p=1$ のときは Teichmüller 距離、 $p=2$ のときは Weil-Petersson 距離に対応する。そこで、擬 Anosov φ を使って構成する擬 Fuchs 多様体 $Q(\varphi^{-n}X, \varphi^n X)$ に対し、その縋り込み体積を (4.1) をパスに沿って積分し $|q|$ の貢献を L^p ノルムで評価し、命題 9 をつかって縋り込み体積を凸芯の体積に置き換え、さらに $2n$ で割って $n \rightarrow \infty$ とすれば、

$$\text{vol } N_\varphi \leq \frac{3}{2} C_0 (2\pi|\chi(\Sigma)|)^{1/p} \|\varphi\|_p$$

が得られる。ここで $\|\varphi\|_p$ は φ の L^p ノルムに関する移動距離である。

一方、8 の次結び目の補空間のモノドウロミー φ について、Dumas は計算機実験で

$$\|\varphi\|_1 \approx 0.96242, \quad \|\varphi\|_2 \leq 1.86068, \quad \|\varphi\|_\infty \leq 2.80859$$

であることを確かめた。そこでもし Schlenker が主張する $C_0 = 1/4$ が正しいとすると、

$$2.092988 \approx \text{vol } N_\varphi \leq \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \|\varphi\|_\infty \leq 1.05322$$

となり、困った事情が露わになる。つまり、どこかに間違いがあるということである。

この間違い探しに 2 ヶ月かかったが、正しい C_0 の値は 1 である。誤差は、縋り込み体積の変分を正則 2 次微分と Beltrami 微分のカップリングに置き換える過程で、計量（第一基本形式）の微分と第二基本形式のトレース自由部分が定める対称 2 テンソルのカップリングとのずれで生じる 2 倍の差、および第一基本形式の微分を Beltrami 微分に対応さ

せる際に Riemann 面の計量が定曲率 -1 に合わせる時点で生じる 2 倍の差に起因する。要するに, Schlenker の [21] における凸芯の体積と Weil-Petersson 距離との間の不等式は, この 2 を 2 回かけたことが Nehari の評価の使い方のまずさを埋めていた。我々は [16] の version 1 の評価の誤りを訂正し, version 2 を今年の 2 月末に arXiv にアップロードした。興味ある方は version 1 ではなく version 2 を参照していただければ幸いである。

5 エピローグ

いろいろ紆余曲折があったが, ここで, 我々が研究成果を公表し始めた約 2 年前以降に他の研究者によりさらなる進展がいくつかあったことを付記しておきたい。Agol-Leininger-Margalit [2] は, 定理 1 を使ってエントロピーの下からの評価をえているが, 使われた評価式は昨年 11 月の騒動前の我々の準備中の論文に論拠しており, [2] に記された結果は幸いなことにそのまま正しい。凸芯の体積に関して Brock-Bromberg [8] が発表されたことはすでに言及したが, 彼らはさらなる応用として, 曲面のモジュライ空間上の Weil-Petersson 測地線の長さの最小値の下からの評価など, これまで数値化できなかった量の明示的な評価を見出している。縺り込み体積の擬 Fuchs 多様体からの凸コンパクト多様体への一般化は Bridgman-Canary [5] で扱われ, その凸芯の体積の上下からの仔細な評価がえられている。また, ランクが 1 のカスプを持つ幾何学的有限な無限体積双曲多様体への縺り込み体積の拡張については, Guillarmou-Moroianu-Rochon [12] と Pallete [22] が発表されており, コンパクトな場合と大きな違いはないことが確認されている。

最後に, N_φ の体積の評価という観点からは一様ノルム $\|\varphi\|_\infty$ が一番優れていることが明らかになったが, このノルムが定める Teichmüller 空間の Finsler 幾何の研究は皆無であり, 今後のその方面の発展を期待し本稿を終える。

参考文献

- [1] I. Agol, Ideal triangulations of pseudo-Anosov mapping tori, Contemporary Math., 560 (2011), 1-17.
- [2] I. Agol, C. Leininger and D. Margalit, Pseudo-Anosov stretch factors and homology of mapping tori, arXiv:1409.6983.
- [3] L. Bers, Simultaneous uniformization, Bull. Amer. Math. Soc., 66 (1960), 94-97.
- [4] L. Bers, An extremal problem for quasiconformal mappings and a theorem by Thurston, Acta. Math., 141 (1978), 73-98.
- [5] M. Bridgeman and R. Canary, Renormalized volume and the volume of the convex core, arXiv:1502:05018

- [6] J. Brock, Weil-Petersson translation distance and volumes of mapping tori, *Communications in Analysis and Geometry*, 11 (2003), 987–999.
- [7] J. Brock and K. Bromberg, Geometric inflexibility and 3-manifolds that fiber over the circle, *J. Topol.*, 4 (2011), 1-38.
- [8] J. Brock and K. Bromberg, Inflexibility, Weil-Petersson distance, and volume of fibered 3-manifolds, [arXiv:1412.4635](https://arxiv.org/abs/1412.4635).
- [9] C. Cao and R. Meyerhoff, The orientable cusped hyperbolic 3-manifolds of minimal volume, *Invent. Math.*, 146 (2001), 451–478.
- [10] A. Casson and A. Bleiler, *Automorphisms of Surfaces after Nielsen and Thurston*, Cambridge University Press, 1988.
- [11] B. Farb, C. Leininger and D. Margalit, Small dilatation pseudo-Anosovs and 3-manifolds, *Adv. Math.*, 228 (2011), 1466-1502.
- [12] C. Guillarmou, S. Moroiianu and F. Rochon, Renormalized volume on the Teichmüller space of punctured surfaces, [arXiv: 1504.04721](https://arxiv.org/abs/1504.04721).
- [13] N. V. Ivanov, Coefficients of expansion of pseudo-Anosov homeomorphisms, *Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI)*, 167 (1988), Issied. Topol. 6, 111-116, 191, translation in *Journal of Soviet Mathematics*, 52 (1990), 2819-2822.
- [14] E. Kin, S. Kojima and M. Takasawa, Entropy versus volume for pseudo-Anosovs, *Experimental Math.*, 18 (2009), 397-407.
- [15] S. Kojima, Entropy, Weil-Petersson translation distance and Gromov norm for surface automorphism, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 140 (2012), 3993-4002.
- [16] S. Kojima and G. McShane, Normalized entropy versus volume for pseudo-Anosovs, [arXiv:1411.6350](https://arxiv.org/abs/1411.6350)
- [17] K. Krasnov and J-M. Schlenker, On the renormalized volume of hyperbolic 3-manifolds, *Comm. Math. Phys.* 279 (2008), 637-668.
- [18] C. McMullen, Renormalization and 3-manifolds which fiber over the circle, *Ann. Math. Study* 142 (1996).
- [19] Y. Minsky, Bounded geometry for Kleinian groups, *Invent. Math.*, 146 (2001), 143-192,

- [20] Z. Nehari, The Schwarzian derivative and schlicht functions, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 55 (1949), 545-551.
- [21] J-M, Schlenker, The renormalized volume and the volume of the convex core of quasifuchsian manifolds, *Math. Res. Lett.*, 20 (2013), 773-786.
- [22] F. Pallete, Local convexity of renormalized volume for rank-1 cusped manifolds, arXiv:1505.00479.
- [23] R. Penner, Bounds on least dilatations, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 113 (1991), 443-450.
- [24] K. Rafi, A characterization of short curves of a Teichmeuller geodesic, *Geometry & Topology Volume 9* (2005) 179-202
- [25] M. Takasawa, Computing invariants of mapping class of surfaces, Ph.D thesis, Tokyo Institute of Technology (2000).
- [26] W. Thurston, The geometry and topology of 3-manifolds, Lecture Notes, Princeton University (1979).
- [27] W. Thurston, On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces, *Bulletin of Amer. Math. Society.*, 19 (1988), 417-431.
- [28] W. Thurston, Hyperbolic structures on 3-manifolds II: Surface groups and 3-manifolds which fiber over the circle, preprint.