Chain level operations in string topology via de Rham chains

入江　慶　(京都大学数理解析研究所)*

1. ストリングトポロジー

ストリングトポロジーは，Chas-Sullivan [2] が多様体[1]の自由ループ空間のホモロジー群の上に Batalin-Vilkovisky 代数の構造を見出したことから始まった研究領域である．本節ではまずこれについて述べ，本稿の主題である鎖複体レベルの代数構造へと話を進めたい．

1.1. Chas-Sullivan ループ積

初めに，最も基本的な演算である (Chas-Sullivan) ループ積の定義を説明する．M を d 次元有向閉多様体，$\mathcal{L}M := C^\infty(S^1, M)$ をその自由ループ空間とする（ただし $S^1 := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$）．以降しばしば $\mathcal{L}M$ を $\mathcal{L}$ と略記し，また $\mathbb{H}_*(\cdot) := H_{*+d}(\cdot)$ とおく．評価写像 $e : \mathcal{L} \to M; \gamma \mapsto \gamma(0)$ に関するファイバー積

$$\mathcal{L}\,{}_e\!\times_e \mathcal{L} := \{(\gamma, \gamma') \in \mathcal{L} \times \mathcal{L} \mid \gamma(0) = \gamma'(0)\}$$

を考え，$j : \mathcal{L}\,{}_e\!\times_e\mathcal{L} \to \mathcal{L}\times\mathcal{L}$ を包含写像，$c : \mathcal{L}\,{}_e\!\times_e\mathcal{L} \to \mathcal{L}$ をループの結合 (concatenation) により定まる写像とする．ループ積 $\circ$ は以下の写像の合成として定義される．ここで一つ目の写像はクロス積，二つ目の写像は j に関する Gysin 写像である：

$$\circ : \ \mathbb{H}_*(\mathcal{L})^{\otimes 2} \xrightarrow[\times]{} H_{*+2d}(\mathcal{L} \times \mathcal{L}) \xrightarrow[j_!]{} H_{*+d}(\mathcal{L}\,{}_e\!\times_e \mathcal{L}) \xrightarrow[H_*(c)]{} \mathbb{H}_*(\mathcal{L}).$$

任意の点 $p \in M$ を p 上の定値ループに移す写像 $i : M \to \mathcal{L}M$ により単射 $\mathbb{H}_*(i) : \mathbb{H}_*(M) \to \mathbb{H}_*(\mathcal{L}M)$ が定まるが，$\mathbb{H}_*(M)$ 上の交叉積を $\cap$ と書けば

$$\mathbb{H}_*(i)(x) \circ \mathbb{H}_*(i)(y) = \mathbb{H}_*(i)(x \cap y) \qquad (x, y \in \mathbb{H}_*(M))$$

が成り立つ．この意味でループ積は交叉積の拡張になっている．ループ積は結合的かつ次数付可換な積であり，また M の基本類（の $\mathbb{H}_*(i)$ による像）が単位元になる．

1.2. Batalin-Vilkovisky 構造

$\mathcal{L}$ への S^1 作用 $r : S^1 \times \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ を $r(t, \gamma)(\theta) := \gamma(\theta - t)$ で定め，$\Delta : \mathbb{H}_*(\mathcal{L}) \to \mathbb{H}_{*+1}(\mathcal{L})$ を $\Delta x := H_*(r)([S^1] \times x)$ で定義する．容易にわかるように $\Delta^2 = 0$ が成り立つ．また，ループ括弧積 $\{\,,\,\} : \mathbb{H}_*(\mathcal{L})^{\otimes 2} \to \mathbb{H}_{*+1}(\mathcal{L})$ を

$$\{a, b\} := (-1)^{|a|}\Delta(a \circ b) - (-1)^{|a|}\Delta a \circ b - a \circ \Delta b$$

で定義すれば，$\{\,,\}$ は次数付 Lie 積になり，さらに $\circ$ との関係式

$$\{a, b \circ c\} = \{a, b\} \circ c + (-1)^{|b|(|a|+1)} b \circ \{a, c\}$$

本研究は科研費（課題番号 25800041）の助成を受けている．

* e-mail: iriek@kurims.kyoto-u.ac.jp

[1] その後の研究で多様体とは限らない空間に対しても理論が拡張されているが（昨年度講演 [12] を参照されたい），本稿では専ら C^∞ 多様体上のループ空間を考察の対象とする．

が成立する．一般に，次数付ベクトル空間[2] V 上で定義された演算 $\circ, \Delta, \{\,,\,\}$ が以上の性質を満たすとき，$(V, \circ, \Delta)$ を Batalin-Vilkovisky(BV) 代数，$(V, \circ, \{\,,\,\})$ を Gerstenhaber 代数という．特に，BV 代数は Gerstenhaber 代数の構造を持つ．

BV および Gerstenhaber 代数の定義は，オペラッドの言葉を用いて記述することもできる．自然数 $n \geq 1$ に対して，単位円盤 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ 上の互いに disjoint な n 個の小円盤の配置空間を $\mathcal{D}(n)$ とおき，また $f\mathcal{D}(n) := \mathcal{D}(n) \times (S^1)^{\times n}$ とおく．$\mathcal{D}(0)$ および $f\mathcal{D}(0)$ を一点からなる空間とすれば，$\mathcal{D} = (\mathcal{D}(n))_{n \geq 0}$ および $f\mathcal{D} = (f\mathcal{D}(n))_{n \geq 0}$ は自然な位相的オペラッドの構造を持つ．$\mathcal{D}$ を小円盤オペラッド，$f\mathcal{D}$ を枠付小円盤オペラッドという．これらのホモロジーをとることで，次数付ベクトル空間のオペラッド $H_*(\mathcal{D})$ および $H_*(f\mathcal{D})$ を得る．

任意の次数付ベクトル空間 V について，V 上の Gerstenhaber 代数の構造と $H_*(\mathcal{D})$ の V への作用（$H_*(\mathcal{D})$ から V の準同形オペラッド $(\mathrm{Hom}(V^{\otimes n}, V))_n$ への射）は一対一に対応する（Cohen [3]）．同様に，V 上の BV 代数構造と $H_*(f\mathcal{D})$ の V への作用は一対一に対応する（Getzler [6]）．$H_0(\mathcal{D}(2)), H_1(\mathcal{D}(2)), H_1(f\mathcal{D}(1))$ は全て 1 次元のベクトル空間であり，演算 $\circ, \{\,,\,\}, \Delta$ は各々の生成元に対応している．

1.3. 鎖複体レベルのストリングトポロジー

これまでで自由ループ空間のホモロジー上の代数構造について述べた[3]．本稿の主題である “Chain level string topology” とは，これらの構造を鎖複体のレベルまで戻って定義しなおすことで，より精密な情報を得ようとする試みである．このテーマに関わる重要な文献として [14] が挙げられる．

代数トポロジーにおいて，鎖複体レベルの情報から得られる不変量として基本的なものに，Massey 積がある．これについて A_∞ 代数の観点から復習してみたい．一般に位相空間 X に対して，その特異余鎖複体 $C^*(X)$ は cup 積により dga(differential graded algebra) の構造を持つ．ただし本稿では，dga とは複体とその上の結合的な積の組であって Leibniz 則を満たすものを指し，積の可換性は仮定しない．一方，次数付ベクトル空間 V 上の A_∞ 代数構造とは，各自然数 $k \geq 1$ に対して次数 $2-k$ の線形写像 $\mu_k : V^{\otimes k} \to V$ が定義され，任意の自然数 $m \geq 1$ について

$$\sum_{\substack{k+l=m+1 \\ 1 \leq i \leq k}} \pm \mu_k(v_1 \otimes \cdots \otimes \mu_l(v_i \otimes \cdots \otimes v_{i+l-1}) \otimes \cdots \otimes v_m) = 0$$

を満たすものであった．特に $\mu_k = 0\,(\forall k \geq 3)$ なる A_∞ 代数とは dga に他ならない．A_∞ 代数の一般論によれば，$C^*(X)$ と（A_∞ 代数として）ホモトピー同値な $H^*(X)$ 上の A_∞ 代数構造 $(\mu_k)_{k \geq 1}$ であって，$\mu_1 = 0$ かつ μ_2 が cup 積となるものが定まる．このとき μ_3 を用いて Massey 積が定義される（ただし写像 μ_3 自体は一意には決まらない）．以上について詳しくは [11] Section 9 を参照されたい．

M を有向閉多様体とすると，Poincaré 双対により $H^*(M)$ 上の cup 積は $\mathbb{H}_*(M)$ 上の交叉積に対応する．ループ積は $\mathbb{H}_*(\mathcal{L}M)$ 上の結合的な積であって，その $\mathbb{H}_*(M)$ への制限は交叉積であった．そこで，$\mathbb{H}_*(\mathcal{L}M)$ 上の A_∞ 代数構造 $(\mu_k)_{k \geq 1}$ であって次の条件を満たすものを定義せよ，という問が考えられる．

---

[2] 本稿では，次数付ベクトル空間というとき $\mathbb{Z}$ で次数付されたものだけを考える．

[3] ただし議論したのは出力が 1 つの操作のみである．複数の出力を持つ操作は本稿では扱わない．[12] およびそこで挙げられている文献を参照されたい．

- $\mu_1 = 0$ かつ，μ_2 はループ積に一致する．
- 任意の k について $\mu_k(\mathbb{H}_*(M)^{\otimes k}) \subset \mathbb{H}_*(M)$ で，$(\mu_k)_{k\geq 1}$ の $\mathbb{H}_*(M)$ への制限は余鎖複体 $C^*(M)$ と A_∞ 代数としてホモトピー同値．

これが「ストリングトポロジーの演算を鎖複体のレベルまで戻って定義することで得られる情報」の最も簡単な例であろう．この問に対する解答は，主結果の帰結として4節で説明する．

その前に，ストリングトポロジーと関係の深い話題である（シンプレクティック幾何の）Floer ホモロジーおよび結合代数の Hochschild コホモロジーについて述べ，これらにおいても鎖複体レベルの代数構造が自然と問題になることを説明したい．

2. Floer ホモロジーとストリングトポロジー

M を C^∞ 閉多様体とすると，その余接束の全空間 $T^*M := \bigcup_{q\in M} T_q^*M$ は自然なシンプレクティック多様体の構造を持ち，Floer ホモロジー $\mathrm{HF}_*(T^*M)$ が定義される．まずこれについて簡単に説明したい．

$\pi_M : T^*M \to M$ を射影とし，T^*M 上の1次微分形式 λ_M を

$$\lambda_M(X) := p((\pi_M)_*(X)) \qquad (q \in M,\, p \in T_q^*M,\, X \in T_{(q,p)}T^*M)$$

で定義する．このとき $d\lambda_M$ はシンプレクティック形式（つまり，非退化な閉形式）になる．一方，C^∞ 級関数 $H : T^*M \to \mathbb{R}$ であって T^*M のエンドで十分早く増大するものをとり [4]，Hamilton 汎関数 $\mathcal{A}_H : C^\infty(S^1, T^*M) \to \mathbb{R}$ を

$$\mathcal{A}_H(\gamma) := \int_{S^1} \gamma^*\lambda_M - H(\gamma(t))\,dt \qquad (\gamma \in C^\infty(S^1, T^*M))$$

で定める．汎関数 $\mathcal{A}_H$ の臨界点は，H の Hamilton ベクトル場の周期軌道と対応する．$\mathcal{A}_H$ に対して直接変分法を展開することは困難であるが，$\mathcal{A}_H$ の Morse ホモロジーにあたるものを定義することは可能である．すなわち，$\mathcal{A}_H$ の臨界点により生成される次数付ベクトル空間を考え，その上の境界作用素を写像 $\mathbb{C}^\times \to T^*M$ に対する Floer 方程式（H を用いて Cauchy-Riemann 方程式 [5] を変形したもの）の解の個数を数えて定義する．この鎖複体のホモロジー群（H によらないことが示される）を T^*M の Floer ホモロジーといい $\mathrm{HF}_*(T^*M)$ と書く．

$\mathbb{C}^\times$ は $\mathbb{C}P^1 \setminus \{0, \infty\}$ と共形であるが，$\mathbb{C}P^1 \setminus \{0, 1, \infty\} \to T^*M$ に対する Floer 方程式の解の個数を数えることで結合的な積 $\circ : \mathrm{HF}_*(T^*M)^{\otimes 2} \to \mathrm{HF}_*(T^*M)$ が定義される（pair-of-pants 積）．また，$\mathbb{C}^\times \to T^*M$ に対する Floer 方程式の族（境界条件を動かして S^1 上の族を考える）を用いて $\Delta : \mathrm{HF}_*(T^*M) \to \mathrm{HF}_{*+1}(T^*M)$ が定義される．このとき $(\mathrm{HF}_*(T^*M), \circ, \Delta)$ は BV 代数になる．

注意 2.1 以上の構成は余接束に限ったものではなく，Liouville 多様体というより一般の開シンプレクティック多様体に対して [6]（符号の問題を除けば）可能である．[13] を参照されたい．

[4] 例えば M の Riemann 計量を固定して $H(q,p) := |p|^2$ とする．
[5] T^*M 上の概複素構造でシンプレクティック形式 $d\lambda_M$ と整合的なものを用いて定義する．
[6] Liouville 多様体に対して，ここで述べたのと同様な方法で定義される Floer ホモロジーを，特に symplectic (co)homology という．

次の結果が示すように，余接束のFloerホモロジーおよびそのBV構造は，ストリングトポロジーにおけるBV構造と等価である．

定理 2.2 Mがスピン構造を持つとき[7]，BV代数の同形$\mathrm{HF}_*(T^*M) \cong \mathbb{H}_*(\mathcal{L}M)$が成立する．

ベクトル空間の同形$\mathrm{HF}_*(T^*M) \cong \mathbb{H}_*(\mathcal{L}M)$は初めViterboにより発見され，その後Salamon-Weber, Abbondandolo-Schwarzによる別証明が与えられた．ループ積とpair-of-pants積との対応はAbbondandolo-Schwarzによる．スピン構造や向きを持たない場合まで含めた取扱いは，Kraghによる研究を経てAbouzaid [1]により完成したようである．以上について詳しくは[1]を参照されたい．

余接束（一般にLiouville多様体）に対して，そのFloerホモロジーはBV代数の構造を持つので，特に結合的な積やLie積が定義される．これらの演算は鎖複体のレベルで定義されるが，そこでは結合則やJacobi律はホモトピーを法としてしか成立しない．ここでホモトピーは，$\mathbb{C}P^1$から4点を取り除いたRiemann面上のFloer方程式（の族）を用いて定義される．さらに$\mathbb{C}P^1$からk点を取り除いたRiemann面上のFloer方程式（の族）を全ての自然数$k \geq 2$に対して考えることで，Floerホモロジー上にA_∞およびL_∞代数の構造が定義できると思われる．

4節で，主結果の帰結として$\mathbb{H}_*(\mathcal{L}M)$上に$A_\infty$および$L_\infty$代数の構造が定まることを見るが（各々ループ積およびループ括弧積の延長），上で述べた$\mathrm{HF}_*(T^*M)$上のA_∞およびL_∞代数構造は，これらとホモトピー同値になると予想される．

3. Hochschildコホモロジーとストリングトポロジー

Gerstenhaber [5] による次の古典的な結果は，ストリングトポロジーとも関係が深い．

定理 3.1 任意の結合代数Aについて，Hochschildコホモロジー$HH^{-*}(A, A)$は自然なGerstenhaber代数の構造を持つ．

この結果は，Aがdga，より一般にA_∞代数でも成立する．ストリングトポロジーとの関係を説明するために，多様体上の微分形式のなすdgaを考えよう[8]．Mをd次元有向閉C^∞多様体とする．整数jに対してM上のj次微分形式全体のなす$\mathbb{R}$ベクトル空間を$\mathcal{A}_M^j$と書くと（$0 \leq j \leq d$でないときは$\mathcal{A}_M^j = 0$とおく），$\mathcal{A}_M^*$は外微分と外積によりdgaになる．このとき，反復積分により写像

$$\mathcal{I} : \mathbb{H}_*(\mathcal{L}M) \to HH^{-*}(\mathcal{A}_M, \mathcal{A}_M)$$

が定義され，Mが単連結なときこれは同形になる．後述するように（注意4.2），写像$\mathcal{I}$は両辺のGerstenhaber構造を保つ（左辺ではストリングトポロジー，右辺では定理3.1によるGerstenhaber構造を考える）．

定理3.1の鎖複体レベルの精密化として，次に述べる定理3.2が知られている．それを述べるため，以下の言葉を用いる：鎖複体の圏におけるオペラッドをdgオペラッドという．基本的な例として，鎖複体Cの準同形オペラッド$\mathrm{End}(C) := (\mathrm{Hom}(C^{\otimes n}, C))_{n \geq 0}$がある．鎖複体$C$とdgオペラッド$\mathcal{P}$について，$\mathcal{P}$の$C$への作用とはdgオペラッドの射$\mathcal{P} \to \mathrm{End}(C)$のことをいう（このとき$C$をdg$\mathcal{P}$代数とよぶ）．$\mathcal{P}$の$C$への作用があれば，ホモロジーをとることで$H_*(\mathcal{P})$の$H_*(C)$への作用が定まる．

[7] Mがスピンでないときは，$\mathcal{L}M$上のある局所系θ_Mにより$\mathrm{HF}_*(T^*M) \cong \mathbb{H}_*(\mathcal{L}M : \theta_M)$となる．

[8] ここでは特異余鎖で考えてもよいのだが，あとの節との関係で微分形式を使って説明する．

定理 3.2 dg オペラッド$\mathcal{O}$であって，次の条件を満たすものが存在する．

(i): 次数付ベクトル空間のオペラッドとして $H_*(\mathcal{O}) \cong H_*(\mathcal{D})$．ただし$\mathcal{D}$は小円盤オペラッド.

(ii): 任意の結合代数 A について，$HH^{-*}(A,A)$ 上の Gerstenhaber 構造は Hochschild 余鎖複体 $CH^{-*}(A,A)$ への $\mathcal{O}$ の作用に持ち上がる．

注意 3.3 条件 (i) より強く，$\mathcal{O}$ は $C_*(\mathcal{D})$（$\mathcal{D}$ の特異鎖のなす dg オペラッド）と擬同形であるとしても定理は成立する．

この定理は，Deligneの手紙における問に端を発していることから，Deligne予想とよばれていた．現在では多くの証明が知られていて (McClure-Smith, Kontsevich-Soibelman, Voronov, Tamarkin, Berger-Fresse, Kaufmann)，特に Kontsevich-Soibelman は，一般の A_∞ 代数について対応する結果を証明している．（文献については [11] Section 13.3.15 を見られたい.）ストリングトポロジーにおいて定理 3.2 と類似の結果が成り立つかというのは自然な問であろう．本稿の主結果はこれに対する肯定的な解答を与える．

4. 主結果

本稿の主結果は次の定理である．$\mathcal{D}$および$f\mathcal{D}$を小円盤および枠付小円盤オペラッドとする（1.2 節参照）.

定理 4.1 ([7], [8]) dg オペラッド $f\mathcal{P}$ とその部分オペラッド $\mathcal{P}$ であって，以下の条件を満たすものが存在する．

(i): オペラッドの同形 $H_*(\mathcal{P}) \cong H_*(\mathcal{D})$ と $H_*(f\mathcal{P}) \cong H_*(f\mathcal{D})$ であって，次の図式が可換になるものが存在する（縦の写像は，包含写像により導かれる）:

$$\begin{array}{ccc} H_*(\mathcal{P}) & \xrightarrow{\cong} & H_*(\mathcal{D}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_*(f\mathcal{P}) & \xrightarrow{\cong} & H_*(f\mathcal{D}). \end{array}$$

(ii): 任意の dga A について，$HH^{-*}(A,A)$ 上の Gerstenhaber 構造は Hochschild 余鎖複体 $CH^{-*}(A,A)$ 上の dg $\mathcal{P}$ 代数の構造に持ち上がる．

(iii): 任意の有向閉 C^∞ 多様体 M について，dg $f\mathcal{P}$ 代数 $C_*^{\mathcal{L}M}$ および

- BV 代数としての同形 $\Phi : \mathbb{H}_*(\mathcal{L}M) \cong H_*(C^{\mathcal{L}M})$
- dg $\mathcal{P}$ 代数の準同形 $J : C_*^{\mathcal{L}M} \to CH^{-*}(\mathcal{A}_M, \mathcal{A}_M)$

が存在する．ここで $H_*(J) \circ \Phi : \mathbb{H}_*(\mathcal{L}M) \to HH^{-*}(\mathcal{A}_M, \mathcal{A}_M)$ は，反復積分を用いて定義される写像 $\mathcal{I}$（3 節参照）と一致する．

(ii) は定理 3.2 の dga 版であるが，これは新しい結果ではない（前節で述べたように A_∞ 代数版が示されている）．定理 4.1 の主要な主張は (iii) であり，これは定理 3.2 のストリングトポロジーにおける類似である．

注意 4.2 定理4.1の系として，写像$\mathcal{I}:\mathbb{H}_*(\mathcal{L}M)\to HH^{-*}(\mathcal{A}_M,\mathcal{A}_M)$がGerstenhaber構造を保つことが導かれる．これ自体は新しい結果ではないと思われる（少なくともMが単連結の場合Merkulov, Tradler等による仕事がある）．

ループ積は$\mathbb{H}_*(\mathcal{L}M)$上の結合的な積であったが，これは$C_*^{\mathcal{L}M}$に持ち上がり，dgaの構造を定める．また，dgaの準同形$\iota:\mathcal{A}^{-*}(M)\to C_*^{\mathcal{L}M}$であって図式

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{H}_*(M) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\mathbb{H}_*(i)"'] & H_{\mathrm{dR}}^{-*}(M) \arrow[d, "H_*(\iota)"] \\
\mathbb{H}_*(\mathcal{L}M) \arrow[r, "\cong"'] & H_*(C^{\mathcal{L}M}).
\end{tikzcd}$$

が可換になるものが存在する．これにより$\mathbb{H}_*(\mathcal{L}M)$上の$A_\infty$代数構造$(\mu_k)_{k\geq 1}$であって，$\mu_1=0$かつ$\mu_2$はループ積と一致し，さらに$\mathbb{H}_*(M)$への制限が$\mathcal{A}^{-*}(M)$とホモトピー同値なものが得られる（1.3節の問に対する解答）．

ループ括弧積についても同様のことが成り立つ．すなわち，$\mathbb{H}_*(\mathcal{L}M)$上の$L_\infty$代数構造$(l_k)_{k\geq 1}$であって$l_1=0$かつ$l_2$はループ括弧積と一致し，任意の$k\geq 1$について$l_k|_{\mathbb{H}_*(M)^{\otimes k}}=0$となるものが得られる．

5. 証明の概要

定理4.1の証明の主要な部分は鎖複体$C_*^{\mathcal{L}M}$の構成である．その際の本質的な論点である横断正則性の問題について5.1節で述べたあと，構成の概要を5.2節で述べる．5.3節では，$C_*^{\mathcal{L}M}$上の積構造とオペラッドの作用について説明する．

本節を通じてMをd次元有向閉C^∞多様体，$\mathcal{L}=\mathcal{L}M=C^\infty(S^1,M)$とおく．

5.1. 横断正則性の問題

ストリングトポロジーにおける演算は，評価写像に関するファイバー積をとって定義される．例えばループ積を定義するには，ファイバー積をとって得られるホモロジー上の写像$\mathbb{H}_*(\mathcal{L})^{\otimes 2}\to H_{*+d}(\mathcal{L}\,{}_e\times_e\mathcal{L})$が必要であった．

ファイバー積を鎖複体のレベルで定義しようとすると横断正則性が問題になる．これは交叉積を考える段階ですでに現れる．実際，M上の特異鎖$x\in C_k(M)$, $y\in C_l(M)$に対してその交叉$x\cap y\in C_{k+l-d}(M)$を定義するには，xとyが横断的に交わっている必要があるが，これは必ずしも成り立たない．有限次元多様体上の交叉積の場合は，鎖複体$C_*(M)$の替わりに余鎖複体$C^{d-*}(M)$を考えればよいが，ループ空間の場合は（無限次元であるので）この方法はこのままでは適用できない．

5.2. 鎖複体$C_*^{\mathcal{L}M}$の構成

上で述べた問題点を解消するために，[7]ではde Rham鎖という特異鎖と微分形式を折衷したものを考えた．これは，Fukaya [4]による “approximate de Rham chain” というアイデアを参考にしたものである．[7]のもう一つのアイデアは，点付きループの空間を組織的に用いることである．以下では，鎖複体$C_*^{\mathcal{L}M}$の構成を，四つのステップに分けて説明する．

ステップ 1: 点付きMooreループの空間$\mathcal{L}_k$

M 上の C^∞ 級 Moore ループのなす空間 $\mathcal{L}_0M$ を考える．正確には

$$\mathcal{L}_0M := \{(\gamma, T) \mid T \in \mathbb{R}_{\geq 0},\, \gamma \in C^\infty([0,T], M),\, \gamma(0) = \gamma(T),$$
$$\gamma^{(m)}(0) = \gamma^{(m)}(T) = 0 \quad (\forall m \geq 1)\}$$

で定義する．ここで $\gamma^{(m)}$ は γ の m 階導関数であり，最後の条件は C^∞ 級ループどうしの結合（concatenation）をとるために必要になる．また，任意の自然数 $k \geq 1$ に対して，k 個の標識点を持つ Moore ループの空間

$$\mathcal{L}_kM := \{(\gamma, t_1, \ldots, t_k, T) \mid (\gamma, T) \in \mathcal{L}_0M, \quad 0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_k \leq T,$$
$$\gamma^{(m)}(t_j) = 0 \quad (\forall m \geq 1, \quad 1 \leq \forall j \leq k)\}$$

を考える．任意の $j \in \{0, \ldots, k\}$ に対して，評価写像 $e_j : \mathcal{L}_kM \to M$ を

$$e_j(\gamma, t_1, \ldots, t_k, T) := \begin{cases} \gamma(0) & (j = 0) \\ \gamma(t_j) & (1 \leq j \leq k) \end{cases}$$

で定義する．また，各 $p \in M$ に対して p 上の長さ 0 のループを対応させることで，写像 $i_k : M \to \mathcal{L}_kM$ を定義する．以降，$\mathcal{L}_kM$ を単に $\mathcal{L}_k$ と書く．

ステップ 2: $\mathcal{L}_k$ 上のプロット[9]

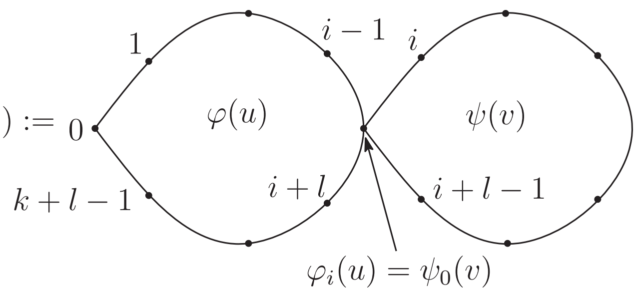
各自然数 n について $\mathbb{R}^n$ の有向部分多様体全体のなす集合を $\mathcal{U}_n$ とおき，$\mathcal{U} := \bigsqcup_{n \geq 1} \mathcal{U}_n$ とおく．$U \in \mathcal{U}$ および写像 $\varphi : U \to \mathcal{L}_k$ の組 (U, φ) で次の条件 (a), (b) を満たすものを $\mathcal{L}_k$ 上のプロットとよび，プロット全体の集合を $\mathcal{P}(\mathcal{L}_k)$ と書く．

(a): φ は C^∞ 級写像．つまり，$\varphi := (\gamma^\varphi, t_1^\varphi, \ldots, t_k^\varphi, T^\varphi)$ とおくと $t_1^\varphi, \ldots, t_k^\varphi, T^\varphi \in C^\infty(U)$ で，かつ $\{(u,t) \mid u \in U,\, 0 \leq t \leq T^\varphi(u)\} \to M;\, (u,t) \mapsto \gamma^\varphi(u)(t)$ は C^∞ 級写像．

(b): 任意の $j = 0, \ldots, k$ について，$\varphi_j := e_j \circ \varphi : U \to M$ は沈め込み．

任意の $(U, \varphi) \in \mathcal{P}(\mathcal{L}_k)$, $(V, \psi) \in \mathcal{P}(\mathcal{L}_l)$ および $i \in \{1, \ldots, k\}$ について，条件 (b) によりファイバー積 $U\,{}_{\varphi_i}\!\times_{\psi_0} V := \{(u,v) \in U \times V \mid \varphi_i(u) = \psi_0(v)\}$ は再び $\mathcal{U}$ の元になり，ループの結合をとって $\varphi *_i \psi : U\,{}_{\varphi_i}\!\times_{\psi_0} V \to \mathcal{L}_{k+l-1}$ が自然に定まる．

$(\varphi *_i \psi)(u,v) :=$



写像 $\circ_i : \mathcal{P}(\mathcal{L}_k) \times \mathcal{P}(\mathcal{L}_l) \to \mathcal{P}(\mathcal{L}_{k+l-1})$ を

$$(U, \varphi) \circ_i (V, \psi) := (U\,{}_{\varphi_i}\!\times_{\psi_0} V, \varphi *_i \psi)$$

で定義する．

[9] プロット (plot) という言葉は，K.T. Chen による Differentiable space の理論，Souriau 等による Diffeological space の理論で使われているものである．しかし，ここで定義した集合 $\mathcal{P}(\mathcal{L}_k)$ はこれらの理論の公理を満たさない．

ステップ 3: $\mathcal{L}_k$ の de Rham 鎖複体

プロットを用いてループ空間のホモロジーを計算するために，プロットと微分形式を組み合わせた de Rham 鎖というものを考える．整数 N に対して，$\mathbb{R}$ ベクトル空間

$$C_N^{\mathrm{dR}} := \Big(\bigoplus_{(U,\varphi)\in\mathcal{P}(\mathcal{L}_k)} \mathcal{A}_c^{\dim U - N}(U) \Big) / Z_N$$

を考える．但し $\mathcal{A}_c^*(U)$ は U 上のコンパクト台微分形式のなす $\mathbb{R}$ ベクトル空間，Z_N は

$$(U, \varphi, \pi_!\omega) - (V, \varphi \circ \pi, \omega)$$

の形の元で生成される部分空間とする．（ここで $(U,\varphi) \in \mathcal{P}(\mathcal{L}_k)$, $V \in \mathcal{U}$, $\pi : V \to U$ は C^∞ 級の沈め込みであり，$\pi_!$ はファイバーに沿った積分を表す.）次数付ベクトル空間 $C_*^{\mathrm{dR}}(\mathcal{L}_k)$ 上の境界作用素 ∂ を

$$\partial[(U, \varphi, \omega)] := [(U, \varphi, d\omega)]$$

で定義する．ファイバーに沿った積分は外微分と可換なのでこれは well-defined であり，明らかに $\partial^2 = 0$ を満たす．このようにして定義される鎖複体 $C_*^{\mathrm{dR}}(\mathcal{L}_k)$ を $\mathcal{L}_k$ の de Rham 鎖複体，その元を de Rham 鎖ということにしよう．de Rham 鎖複体のホモロジーは次の補題から分かる．

補題 5.1 (i): 任意の $k \geq 0$ について，標識点を忘れる写像

$$\mathcal{L}_k \to \mathcal{L}_0; \quad (\gamma, t_1, \ldots, t_k, T) \mapsto (\gamma, T)$$

から導かれる鎖写像 $C_*^{\mathrm{dR}}(\mathcal{L}_k) \to C_*^{\mathrm{dR}}(\mathcal{L}_0)$ は，擬同形である．

(ii): 同形 $H_*(C_*^{\mathrm{dR}}(\mathcal{L}_0)) \cong H_*(\mathcal{L}M : \mathbb{R})$ が存在する．ただし右辺は $\mathcal{L}M$（C^∞ 位相を入れる）の特異ホモロジー．

整数 $1 \leq i \leq k$ と $l \geq 0$ に対し，鎖写像 $\circ_i : C_{*+d}^{\mathrm{dR}}(\mathcal{L}_k) \otimes C_{*+d}^{\mathrm{dR}}(\mathcal{L}_l) \to C_{*+d}^{\mathrm{dR}}(\mathcal{L}_{k+l-1})$ を

$$[(U, \varphi, \omega)] \circ_i [(V, \psi, \eta)] := \pm[(U \,{}_{\varphi_i}\!\times_{\psi_0} V, \varphi *_i \psi, \omega \times \eta)]$$

で定義する．これにより，$\mathcal{CL} := (C_{*+d}^{\mathrm{dR}}(\mathcal{L}_k))_{k\geq 0}$ は（非対称）dg オペラッドになる．単位元は $[(M, i_1, 1)] \in C_d^{\mathrm{dR}}(\mathcal{L}_1)$ である [10]．さらに $\mathbb{Z}/(k+1)\mathbb{Z}$ の $\mathcal{L}_k$ への自然な作用は $C_*^{\mathrm{dR}}(\mathcal{L}_k)$ への作用を誘導し，これにより $\mathcal{CL}$ は巡回 (cyclic) dg オペラッドになる．

ステップ 4: 鎖複体 $C_*^{\mathcal{L}M}$ の定義

まず，積を持つオペラッドの概念 [11] を定義しよう．

定義 5.2 $\mathcal{O} = (\mathcal{O}(k))_{k\geq 0}$ を（非対称）dg オペラッドとする．$\mu \in \mathcal{O}(2)_0$ であって $\partial\mu = 0$, $\mu \circ_1 \mu = \mu \circ_2 \mu$ を満たすものを $\mathcal{O}$ の積という．また，$\varepsilon \in \mathcal{O}(0)_0$ であって $\partial\varepsilon = 0$, $\mu \circ_1 \varepsilon = \mu \circ_2 \varepsilon = 1_{\mathcal{O}}$ を満たすものを積 μ の単位元という（ただし $1_{\mathcal{O}}$ は $\mathcal{O}$ の単位元）．

[10] 正確には M の Euclid 空間への埋込をとって $M \in \mathcal{U}$ とみなす.

[11] ここで述べるのと少し違う形で Gerstenhaber-Voronov により導入された.

（非対称）dg オペラッド $\mathcal{O}$ とその積 μ に対して，$\tilde{\mathcal{O}}_* := \prod_{k=0}^{\infty} \mathcal{O}(k)_{*+k}$ とおいて $\partial_\mu : \tilde{\mathcal{O}}_* \to \tilde{\mathcal{O}}_{*-1}$ を

$$\partial_\mu (x_k)_{k\geq 0} := (\partial x_k)_{k\geq 0} + \left(\sum_{j=1}^{k-1} \pm x_{k-1} \circ_j \mu + \sum_{j=1}^{2} \pm \mu \circ_j x_{k-1} \right)_{k\geq 1}$$

で定義すれば，$(\tilde{\mathcal{O}}_*, \partial_\mu)$ は鎖複体になる．基本的な例としては，A を dga とするとその準同形オペラッド $\mathrm{End}(A)$ は積を持ち（A が単位元を持てば，$\mathrm{End}(A)$ の積も定義 5.2 の意味で単位元を持つ），$\widetilde{\mathrm{End}(A)}$ は A の Hochschild 余鎖複体に他ならない．

さて，ステップ 3 で定義した $\mathcal{CL}$ も積と単位元を持つ．実際

$$\mu := [(M, i_2, 1)], \qquad \varepsilon := [(M, i_0, 1)]$$

とおけばよい（μ は $\mathcal{CL}(2)$ への $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ の作用で不変である）．そこで

$$C_*^{\mathcal{L}M} := (\widetilde{\mathcal{CL}}_*, \partial_\mu)$$

と定義する．$k=0$ 成分への射影 $C_*^{\mathcal{L}M} \to C_{*+d}^{\mathrm{dR}}(\mathcal{L}_0); (x_k)_k \mapsto x_0$ は擬同形になることが補題 5.1 (i) と簡単な代数でわかるので，補題 5.1 (ii) と合わせると

$$H_*(C^{\mathcal{L}M}) \cong H_{*+d}(C_*^{\mathrm{dR}}(\mathcal{L}_0)) \cong \mathbb{H}_*(\mathcal{L}M : \mathbb{R})$$

を得る．これの逆が定理 4.1(iii) の同形 Φ である．

一方，任意の $k \geq 0$ について $J_k : C_{*+d}^{\mathrm{dR}}(\mathcal{L}_k) \to \mathrm{Hom}^{-*}(\mathcal{A}_M^{\otimes k}, \mathcal{A}_M)$ を

$$J_k([(U, \varphi, \omega)])(\eta_1 \otimes \cdots \otimes \eta_k) := \pm (\varphi_0)_!(\omega \wedge \varphi_1^* \eta_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k^* \eta_k)$$

で定めれば，$(J_k)_{k\geq 0} : \mathcal{CL} \to \mathrm{End}(\mathcal{A}_M)$ は dg オペラッドの準同形であり，積を保つ．これにより定理 4.1(iii) の準同形 $J : C_*^{\mathcal{L}M} \to CH^{-*}(\mathcal{A}_M, \mathcal{A}_M)$ が定義される．$H_*(J) \circ \Phi$ が反復積分により定義される写像 $\mathcal{I}$ と一致することを見るのは難しくない．

5.3. $C_*^{\mathcal{L}M}$ 上の積構造

$\mathcal{O}$ を非対称 dg オペラッド，μ をその積とする．$\tilde{\mathcal{O}}_*$ 上の積 $\circ$ および $*$ を

$$(x \circ y)_k := \sum_{l+m=k} \pm (\mu \circ_1 x_l) \circ_1 y_m, \qquad (x * y)_k := \sum_{\substack{l+m=k+1 \\ 1\leq i\leq l}} \pm x_l \circ_i y_m$$

で定義しよう．すると $\circ$ は $(\tilde{\mathcal{O}}_*, \partial_\mu)$ 上に dga の構造を定め，$\{x, y\} := x * y \pm y * x$ で定義される積 $\{\, , \,\}$ は dg Lie 代数の構造を定める．$\mathcal{O} = \mathcal{CL}$ の場合，$\circ$ および $\{\, , \,\}$ が $\mathbb{H}_*(\mathcal{L}M) \cong H_*(C^{\mathcal{L}M})$ 上に定める積はループ積およびループ括弧積に一致する．これらの演算は，次の命題における dg オペラッド $\mathcal{P}$ の作用の一部として理解できる．

命題 5.3 dg オペラッド $f\mathcal{P}$ とその部分オペラッド $\mathcal{P}$ で，定理 4.1 (i) および次の二つの条件を満たすものが存在する．

(a): $(\mathcal{O}, \mu)$ を（非対称）dg オペラッドおよびその積とすると，$\mathcal{P}$ は複体 $(\tilde{\mathcal{O}}_*, \partial_\mu)$ に作用する．

(b): $(\mathcal{O}, \mu, \varepsilon)$ を（非対称）巡回 dg オペラッドおよびその積と単位元とし，さらに $\mu \in \mathcal{O}(2)_0$ は $\mathcal{O}(2)$ への $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ の作用で不変だとする．このとき，$\mathcal{P}$ の $(\tilde{\mathcal{O}}_*, \partial_\mu)$ への作用は $f\mathcal{P}$ の作用にのびる．

注意 5.4 命題 5.3 は [8] で証明されているが，ここで述べた定式化とは異なっている．また，よく似た結果がより一般的な枠組みで [15] において証明されている．オペラッド $\mathcal{P}$ および $f\mathcal{P}$ は Kaufmann [9], [10] が導入した組合せ的サボテン（cacti）オペラッドと類似しているがもう少し複雑なものである．

命題 5.3(a) を $\mathrm{End}(A)$ に対して適用すれば（A は任意の dga），Hochschild 余鎖複体 $CH^{-*}(A, A)$ は dg $\mathcal{P}$ 代数になることがわかる．また，(b) を $\mathcal{CL}$ に対して適用すれば，$C_*^{\mathcal{L}M}$ は dg $f\mathcal{P}$ 代数になることがわかる．これらから定まるホモロジー上の構造（$HH^{-*}(A, A)$ 上の Gerstenhaber 構造および $\mathbb{H}_*(\mathcal{L}M)$ 上の BV 構造）が既知のものと一致することをチェックすれば，定理 4.1 の証明が完了する．

参考文献

[1] M. Abouzaid, *Symplectic cohomology and Viterbo's theorem*, arXiv:1312.3354.

[2] M. Chas, D. Sullivan, *String Topology*, arXiv:math/9911159.

[3] F. R. Cohen, *The homology of* C_{n+1} *-spaces,* $n \geq 0$, The homology of iterated loop spaces, 207–351, Lecture Notes in Math. vol. 533, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976.

[4] K. Fukaya, *Application of Floer homology of Lagrangian submanifolds to symplectic topology*, Morse theoretic methods in nonlinear analysis and in symplectic topology, 231–276, NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem., 217, Springer, Dordrecht, 2006.

[5] M. Gerstenhaber, *The cohomology structure of an associative ring*, Ann. of Math. (2) 78 (1963), 267–288.

[6] E. Getzler, *Batalin-Vilkovisky algebras and two-dimensional topological field theories*, Comm. Math. Phys. 159 (1994), no. 2, 265–285.

[7] K. Irie, *Transversality problems in string topology and de Rham chains*, arXiv:1404.0153.

[8] K. Irie, *A chain level Batalin-Vilkovisky structure in string topology and decorated cacti*, arXiv:1503.00403.

[9] R. M. Kaufmann, *On spineless cacti, Deligne's conjecture and Connes-Kreimer's Hopf algebra*, Topology 46 (2007), no. 1, 39–88.

[10] R. M. Kaufmann, *A proof of a cyclic version of Deligne's conjecture via cacti*, Math. Res. Lett. 15 (2008), no. 5, 901–921.

[11] J.-L. Loday, B. Vallette, *Algebraic Operads*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 346. Springer, Heidelberg, 2012.

[12] 内藤貴仁，有理 Gorenstein 空間上のストリングトポロジーの理論, 第 61 回トポロジーシンポジウム講演集, 2014.

[13] P. Seidel, *A biased view of symplectic cohomology*, Current developments in mathematics, 2006, 211–253, Int. Press, Somerville, MA, 2008.

[14] D. Sullivan, *String topology background and present state*, Current developments in mathematics 2005, 41–88, Int. Press, Somerville, MA, 2007.

[15] B. Ward, *Maurer-Cartan Elements and Cyclic Operads*, arXiv:1409.5709.