

ホモロジー 3 球面の Kontsevich-Kuperberg-Thurston 不変量の別構成とその応用

清水 達郎* (京都大学数理解析研究所)

概要

Kontsevich-Kuperberg-Thurston 不変量は Kontsevich の Chern-Simons 摂動論のひとつのバリエーションで、有理ホモロジー 3 球面の普遍有限型不変量を与える。これの別構成を与え、その応用を述べる。

1 背景

1989 年 E. Witten は、Chern-Simons 汎関数をラグランジアンとする場の量子論の分配関数が、3 次元多様体 (と埋め込まれた結び目の) 位相不変量を与えるだろう、と提唱した ([14])。Witten の提唱を元に、最初にオペレータ形式によって 3 次元多様体の量子不変量を取り出された。それとは別の方向として、古典解の近くでの摂動展開によって不変量を取り出す、Chern-Simons 摂動論が M. Kontsevich [5], S. Axelrod と I. M. Singer [2] によって独立に展開された。両者は propagator とよばれる 2 点配置空間上の微分 2 形式を適切に組み合わせ、多点の配置空間上で積分することで記述されるが、その propagator に課される条件が異なり、Kontsevich の方法ではある種の対称性を持つことと、閉形式であることしか要求されない。

Kontsevich は [5] で Chern-Simons 摂動論のバリエーションとして、枠つきホモロジー 3 球面に対する不変量を与えている。枠とは接束の自明化である。このバリエーションは G. Kuperberg と D. Thurston によって深められた。彼らは Kontsevich のアイデアを元に不変量を写像度を用いた方法で再記述し、さらに手術公式を調べることで、この不変量が LMO 不変量 [7] と同じくホモロジー 3 球面の有限型不変量に対してある種の普遍性をもつことを示した ([6])。以降この不変量を Kontsevich-Kuperberg-Thurston 不変量と呼ぶことにする。

有限型不変量は V. A. Vassiliev によって結び目の不変量に対して定義された ([12])。Vassiliev 不変量とも呼ばれる。有限型不変量は当時多く知られていた結び目の量子不変量をいっせいに捉える枠組みを (結果として) 提供した。ホモロジー 3 球面の有限型不変量は大槻 知忠 [10] によって定義され、やはり量子不変量を捉える枠組みになっている。有限型不変量はある意味で多項式のアナロジーとなっていて、次数が

* shimizu@kurims.kyoto-u.ac.jp

定義される. LMO 不変量は, n 次の有限型不変量の空間と Jacobi 図とよばれるグラフのつくる代数の n 次の部分 $\mathcal{A}_n(\emptyset)$ との間に対応をつける際に鍵となる. 同様に Kontsevich-Kuperberg-Thurston 不変量は, LP-surgery によって定義される有理ホモロジー 3 球面の有限型不変量の空間と, あるグラフの空間の間に対応をつけることが D. Moussard によって示されている ([9]).

2 Kontsevich-Kuperberg-Thurston 不変量の構成とその別構成

Kontsevich-Kuperberg-Thurston 不変量, ここでは z^{KKT} という記号を用いることにする, は有理ホモロジー 3 球面の位相不変量で, $\mathcal{A}(\emptyset)$ という次数つき代数に値を取る. 自然数 n に対し, $\mathcal{A}(\emptyset)$ の degree n の部分を $\mathcal{A}_n(\emptyset)$ と書き, z^{KKT} の n 次部分を z_n^{KKT} と書くことにする. 以下 n をひとつ止めて, z_n^{KKT} のオリジナルの構成とその別構成を述べる.

2.1 Jacobi 図の空間 $\mathcal{A}_n(\emptyset)$

この章で作る不変量 z_n^{KKT} はグラフのなす代数 $\mathcal{A}_n(\emptyset)$ に値をもつ. まずはこの代数を定義する. degree n の Jacobi diagram とは, 頂点の数が $2n$, 辺の数が $3n$ の 3 価グラフで, simple loop (辺であって, その両端点と同じ頂点であるもの) を持たないものである. Jacobi diagram の $3n$ 個の辺に $1, \dots, 3n$ のラベルを, $2n$ 個の頂点に $1, \dots, 2n$ のラベルをそれぞれ付し, さらに各辺に向きを入れたものを edge oriented labeled Jacobi diagram という. degree n の連結な edge oriented labeled Jacobi diagram の集合を \mathcal{E}_n とかく.

$$\mathcal{E}_n = \{ \text{degree } n \text{ connected edge oriented labeled Jacobi diagram} \}$$

Jacobi diagram の各頂点に属する 3 つの辺のサイクリックオーダーをすべての頂点でひとつずつ決めたものを, oriented Jacobi diagram という. degree n の Jacobi diagram が自由に生成する \mathbb{R} ベクトル空間を AS, IHX という 2 つの relation で割った空間が $\mathcal{A}_n(\emptyset)$ である.

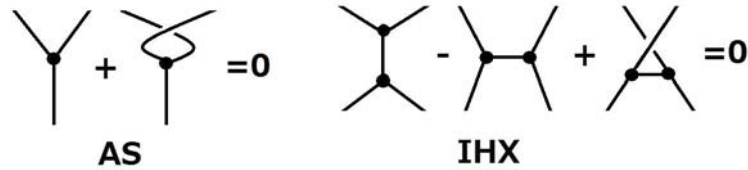
$$\mathcal{A}_n(\emptyset) = \{ \text{degree } n \text{ oriented Jacobi diagrams} \} \mathbb{R} / \text{AS, IHX.}$$

$\Gamma \in \mathcal{E}_n$ に対し, ラベルを忘れ, 適切な orientation を入れることで $\mathcal{A}_n(\emptyset)$ の元 $[\Gamma]$ が定まる.

2.2 ホモロジー 3 球面に関する準備

この予稿中で, 有理ホモロジー 3 球面とは向きづけられた可微分 3 次元閉多様体で, 計量をひとつ与えられ, 有理ホモロジー群が S^3 と同型なものである. 計量や向きは不変量の構成中に用いるが, 出来上がった不変量は位相不変量となる. Y を有

関係式 AS, IHX は局所的に下の絵でかけられるものである.



ここで, 各頂点の向き (サイクリックオーダー) は反時計回りに与える.

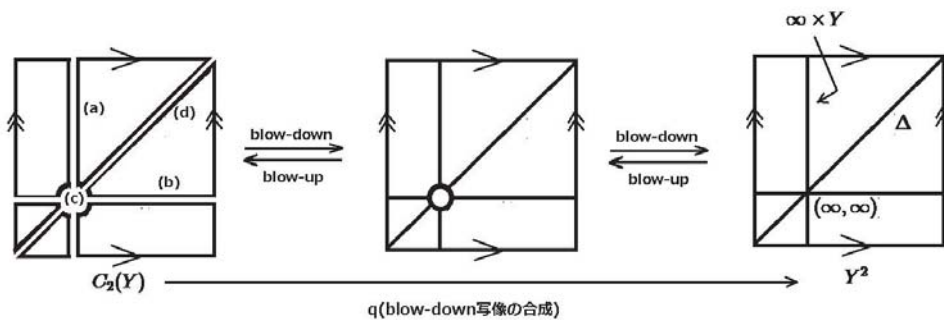
理ホモロジー 3 球面, $\infty \in Y$ を基点とする. $N(\infty; Y) \subset Y$ を Y における ∞ の近傍, $N(\infty; S^3) \subset S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ を S^3 における ∞ の近傍とする. 向きを保つ微分同相写像 $\varphi : (N(\infty; Y), \infty) \rightarrow (N(\infty; S^3), \infty)$ を一つとり固定する. 以下 φ によって $N(\infty; Y)$ と $N(\infty; S^3)$ を同一視する. この同一視によって $N(\infty; Y) \setminus \infty$ が \mathbb{R}^3 の部分集合として捉えられることを注意しておく.

次に, 2 点配置空間 $(Y \setminus \infty)^2 \setminus \Delta = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \neq x_2\}$ のコンパクト化 $C_2(Y)$ を定義する. これは Fulton-MacPherson コンパクト化の類似である. ここで $\Delta = \{(x, x) \mid x \in Y \setminus \infty\}$ である. 一般に, 部分多様体 $B \subset A$ に対し, $Bl(A, B)$ は B に沿った A の実 blow-up をあらわすとする. すなわち, $Bl(A, B) = (A \setminus B) \cup S\nu_B$ である. ここで, ν_B は A における B の法束, $S\nu_B$ はその単位球面束をあらわす.

Y^2 の ∞^2 における blow-up $Bl(Y^2, \infty^2)$ の blow-down 写像を $q_1 : Bl(Y^2, \infty^2) \rightarrow Y^2$ とする. このとき,

$$C_2(Y) := Bl(Bl(Y^2, \infty^2), q_1^{-1}(\infty \times (Y \setminus \infty))) \sqcup q_1^{-1}((Y \setminus \infty) \times \infty) \sqcup q_1^{-1}(\Delta \setminus \infty^2)$$

と定める. $C_2(Y)$ は角つき 6 次元コンパクト多様体であるが, さらに自然な微分構造



が入り ([8] 参照), 可微分多様体となる. $q : C_2(Y) \rightarrow Y^2$ を blow-down 写像の合成とする. $\partial C_2(Y)$ は以下の部分からなる:

$$\partial C_2(Y) = q^{-1}(\infty \times (Y \setminus \infty)) \cup q^{-1}((Y \setminus \infty) \times \infty) \cup q^{-1}(\infty^2) \cup q^{-1}(\Delta \setminus \infty^2).$$

(図中の記号 (a) (b) (c) (d))

2.3 不変量の構成

不変量を定義するため、まず $C_2(Y)$ に propagator と呼ばれる閉微分 2 形式を構成する。このときに Y に余計な構造を導入し、それを補助的に用いる。「余計な構造」は Kontsevich, Kuperberg, Thurston のオリジナルの構成では framing を、我々の別構成では複数個のベクトル場を、後の章で述べる Watanabe の不変量では複数個の Morse 関数を用いる。

まずは $\partial C_2(Y)$ 上に閉 2 形式を構成する。 $\partial C_2(Y) \setminus q^{-1}(\Delta \setminus \infty^2)$ 上では、直積構造を用いて閉 2 形式を構成する。たとえば $q^{-1}(\infty \times (Y \setminus \infty))$ 上では、射影 $q^{-1}(\infty \times (Y \setminus \infty)) = ST_\infty Y \times (Y \setminus \infty) \rightarrow ST_\infty Y \xrightarrow{\varphi_\infty} ST_\infty S^3 = S^2$ よって S^2 上の適当な anti-symmetric volume form ω_{S^2} を引き戻すことで閉 2 形式が得られる。同様にして、 $\partial C_2(Y) \setminus q^{-1}(\Delta \setminus \infty^2)$ 上に閉 2 形式 ω_Y が定まる。残る $q^{-1}(\Delta \setminus \infty^2)$ 上に閉 2 形式をどう作るかが、不変量 z^{KKT} の構成の鍵であり、その方法が本講演であたえる別構成の別構成たる主要部分である。 blow-up の定義から、 $q^{-1}(\Delta \setminus \infty^2) = S\nu_{\Delta \setminus \infty^2}$ である。自然な同型 $\nu_\Delta \cong TY$ を通して、 $S\nu_{\Delta \setminus \infty^2} \cong ST(Y \setminus \infty)$ であるから、我々は $ST(Y \setminus \infty)$ 上に (ω_Y と貼りあうように) 閉 2 形式を与えればよい。こうしてできる $\partial C_2(Y)$ 上の閉 2 形式は閉 2 形式として $C_2(Y)$ にいつも拡張できる (後述)。この拡張された閉 2 形式が propagator である。

我々は次に propagator を配置空間 $(Y \setminus \infty)^{2n} \setminus \Delta = \{(x_1, \dots, x_{2n}) \mid x_i \neq x_j \text{ if } i \neq j\}$ 上に引き戻し、適切に積を取って積分する。引き戻しの方法を指定するのが edge oriented labeled Jacobi diagram の役割である。 $\Gamma \in E_n$ と $i \in \{1, \dots, 3n\}$ に対し、写像 $P_i(\Gamma) : (Y \setminus \infty)^{2n} \setminus \Delta \rightarrow C_2(Y)$ が次のように定まる： $s(\Gamma; i), t(\Gamma; i)$ をそれぞれラベル i の付いた Γ の辺の始点と終点のラベルとする。このとき $P_i(\Gamma)(x_1, \dots, x_{3n}) = (x_{s(\Gamma; i)}, x_{t(\Gamma; i)})$ 。

以下、 $q^{-1}(\Delta \setminus \infty^2)$ 上に閉 2 形式を作る方法を説明する。

framing を用いる (Kontsevich, Kuperberg, Thurston のオリジナルの方法)

$\tau : T(Y \setminus \infty) \xrightarrow{\cong} (Y \setminus \infty) \times \mathbb{R}^3$ を以下の条件を満たす framing とする。

$$\tau|_{N(\infty; Y) \setminus \infty} = \tau_{\mathbb{R}^3}|_{N(\infty; S^3) \setminus \infty}.$$

ここで、 $\tau_{\mathbb{R}^3} : T\mathbb{R}^3 \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ は標準的な自明化である。 τ によって、微分同相 $ST(Y \setminus \infty) \xrightarrow{\cong} (Y \setminus \infty) \times S^2$ が誘導される。これと射影の合成 $p(\tau) : ST(Y \setminus \infty) \xrightarrow{\cong} (Y \setminus \infty) \times S^2 \rightarrow S^2$ によって先ほど用いた S^2 の volume form ω_{S^2} を引き戻せば、閉 2 形式 $p(\tau)^*\omega_{S^2} \in \Omega^2(q^{-1}(\Delta \setminus \infty^2))$ が得られる。 framing の条件から、 ω_Y と $p(\tau)^*\omega_{S^2}$ は貼りあう。

定義 2.1. $\omega_0(\tau) = \omega_Y \cup p(\tau)^*\omega_{S^2} \in \Omega^2(\partial C_2(Y))$.

Y が有理ホモロジー 3 球面であることから, 制限写像 $H^2(C_2(Y); \mathbb{R}) \rightarrow H^2(\partial C_2(Y); \mathbb{R})$ が同型であることが分かる. したがって, $C_2(Y)$ の上の閉 2 形式 $\omega(\tau)$ であって $\omega(\tau)|_{\partial C_2(Y)} = \omega_0(\tau)$ であるものが存在する. それをひとつ取る.

命題 2.2 (Kuperberg, Thurston [6]). 以上の設定の下,

- (1) $z^{\text{KKT}}(Y; \tau) = \sum_{\Gamma \in \mathcal{E}_n} \left(\int_{(Y \setminus \infty)^{2n} \setminus \Delta} \bigwedge_{i=1}^{3n} P_i(\Gamma)^* \omega(\tau) \right)$ $[\Gamma] \in \mathcal{A}_n(\emptyset)$ は τ にのみ依存する.
 (2) ある Y や τ たちによらない定数 $\delta_n \in \mathcal{A}_n(\emptyset)$ があって,

$$z^{\text{KKT}}(Y) = z^{\text{KKT}}(Y; \tau) + \frac{1}{4} \sigma(\tau) \delta_n \in \mathcal{A}_n(\emptyset)$$

は τ によらない Y の位相不変量となる. ここで, $\sigma(\tau)$ は τ を $N(\infty; Y)$ 上である標準的なものに取り替えて得られる Y の framing の signature defect ^{*1} である.

(1) の証明において, $\mathcal{A}_n(\emptyset)$ の AS, IHX 関係が重要な役割を果たす.

ベクトル場を用いる (我々の方法)

我々は直接 2 形式を作るのではなく, まず $ST(Y \setminus \infty)$ の 3 次元部分多様体をつくり, その管状近傍 (normal bundle と同一視する) の Thom 類を代表する 2 形式を与える.

$a_1, \dots, a_{3n} \in S^2$ を長さ 1 のベクトルとする. $\gamma_1, \dots, \gamma_{3n}$ を $Y \setminus \infty$ のベクトル場で, 以下の条件を満たすものとする.

$$\gamma_i|_{N(\infty; Y) \setminus \infty} = a_i.$$

ここで a_i は \mathbb{R}^3 のあらゆる点で a_i である定数ベクトル場をあらわす.

記号の簡単のため $\vec{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_{3n})$ と略記する.

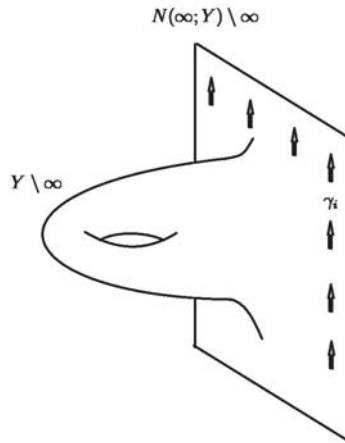
$$c_{\gamma_i} := \overline{\left\{ \frac{\gamma_i(x)}{\|\gamma_i(x)\|} \in ST_x Y \mid x \in Y \setminus (\infty \cup \gamma_i^{-1}(0)) \right\}}^{\text{closure}} \subset ST(Y \setminus \infty)$$

とする. 向きは射影 $STY \rightarrow Y$ の c_{γ_i} への制限が向きを保つように与える. 構成から, c_{γ_i} は γ_i の各零点 (孤立点である) の付近に S^2 と同相な境界をもつ 3 次元多様体である. $c_{-\gamma_i}$ は c_{γ_i} と同じ場所に境界を持つが, その向きは互いに逆になっている. したがって以下の補題が従う.

補題 2.3. $c(\gamma_i) = c_{\gamma_i} \cup c_{-\gamma_i} \subset ST(Y \setminus \infty)$ は境界を持たない ^{*2}3 次元多様体である.

^{*1} signature defect を簡単に説明する. 詳細は [8], [1] を参照. τ を 3 次元多様体 Y の framing とする. τ の signature defect $\sigma(\tau) \in \mathbb{Z}$ は次のように定義される. Y が bound するコンパクト 4 次元多様体 X を一つ取る. TX の複素化 $TX \otimes \mathbb{C}$ は Y 上で τ によって自明化が与えられている. これを X に拡張する第一種障害, すなわち 1st Pontrjagin 類を X 上で積分して得られる整数を $p_1(\tau : X)$ とする. $\sigma(\tau) = p_1(\tau : X) - 3\text{Sign}X$. Hirzebruch の符号数定理からこれは X の選択によらない.

^{*2} $\infty \in Y$ 付近にエンドを 1 つ持つ.



$c(\gamma_i)$ の管状近傍の Thom 類の $\frac{1}{2}$ 倍を与える閉 2 形式であって台が $c(\gamma_i)$ の充分小さい管状近傍に入り, さらに ω_Y と貼りあう^{*3}ようなものを 1 つとり, ω_{γ_i} とおく.

定義 2.4. $\omega_0(\gamma_i) = \omega_Y \cup \omega_{\gamma_i} \in \Omega^2(\partial C_2(Y))$.

$C_2(Y)$ の上の閉 2 形式 $\omega(\gamma_i)$ であって $\omega(\gamma_i)|_{\partial C_2(Y)} = \omega_0(\gamma_i)$ であるものをひとつ取る.

定理 2.5 ([11]). 以上の設定の下, $\vec{\gamma}$ が充分一般的^{*4}なとき,

$$(1) \tilde{z}(Y; \vec{\gamma}) = \sum_{\Gamma \in \mathcal{E}_n} \left(\int_{(Y \setminus \infty)^{2n} \setminus \Delta} \bigwedge_{i=1}^{3n} P_i(\Gamma)^* \omega(\gamma_i) \right) [\Gamma] \in \mathcal{A}_n(\emptyset) \text{ は } \vec{\gamma}_i \text{ にのみ依存する.}$$

$$(2) \vec{\gamma} \text{ に依存する数 } \tilde{I}(\vec{\gamma}) \in \mathcal{A}_n(\emptyset) \text{ があって,}$$

$$\tilde{z}(Y) = \tilde{z}(Y; \vec{\gamma}) - \tilde{I}(\vec{\gamma}) \in \mathcal{A}_n(\emptyset)$$

は $\vec{\gamma}$ によらない Y の位相不変量となる.

注意 2.6. (1) $\tilde{I}(\vec{\gamma})$ は Watanabe が [13] で Y が整ホモロジー 3 球面のときに導入した anomaly term と呼ばれる項をほぼそのまま用いている. ただし, 我々の構成は Watanabe の構成を少し変形している. このことにより, Y として有理ホモロジー 3 球面を取ることが可能になった.

(2) ベクトル場 γ_i として framing から定まるものを考える: $\tau : T(Y \setminus \infty) \rightarrow (Y \setminus \infty) \times \mathbb{R}^3$ を先述のような framing とする. τ によって $(Y \setminus \infty) \times \mathbb{R}^3$ の自明な切断 a_i を引き戻して得られる $\tau^* a_i$ は $Y \setminus \infty$ の非零ベクトル場である. $\tau^* \vec{a} = (\tau^* a_1, \dots, \tau^* a_{3n})$ と略記する. このとき, $\tilde{I}(\cdot^* \vec{a})$ と $\delta_n \sigma(\cdot)$ はともに基点

^{*3} 厳密には, ω_Y を作る時に用いた S^2 上の volume form ω_{S^2} を $\{a_i, -a_i\} \subset S^2$ の近傍に台を持つものに取り替えておく必要がある.

^{*4} そうでないときも (1) の $\tilde{z}(Y; \vec{\gamma})$ は $\omega_0(\gamma_i)$ たちにも依存する.

以外で framing が与えられた 3 次元多様体の不変量である。これらのある構造つき framed cobordism に関する振る舞いを調べることにより, $\tilde{I}(\tau^* \vec{a}) = -\frac{1}{4}\sigma(\tau)\delta_n$ が分かる。この意味で \tilde{I} は signature defect の拡張であるといえる。

γ_i として, 非零ベクトル場 $\tau^* a_i$ をとると, 構成から $c(\gamma_i) = p(\tau)^{-1}(\{a_i, -a_i\})$ であることが分かる。これと $\tilde{I}(\tau^* \vec{a}) = -\frac{1}{4}\sigma(\tau)\delta_n$ をあわせることで以下の定理が従う。

定理 2.7 ([11]). 任意の Y に対し, $\tilde{z}_n(Y) = z^{\text{KKT}}(Y)$.

3 応用

3.1 Watanabe の不変量

渡邊 忠之は Morse 関数複数個を補助的に用いることで, (有理) ホモロジー 3 球面の不変量を定義した ([13]). Watanabe の不変量はホモロジー 3 球面の不変量で, $\mathcal{A}(\emptyset)$ に値をもつ。もともとは深谷 賢治が 3 次元多様体上の局所系 2 つの組の相対的な不変量を, Morse 関数 3 つを補助的に用いて構成した ([3]). これは Watanabe の不変量では $\mathcal{A}_1(\emptyset)$ に値をとる部分に対応する。しかし, 二木 昌宏によって Fukaya の構成では Morse 関数の選択の曖昧さが残っていることが指摘された ([4]). Watanabe は局所系を用いず, 代わりに新たなタイプの補正項を加えることで不変量を完成し, さらに一般の n に拡張した。

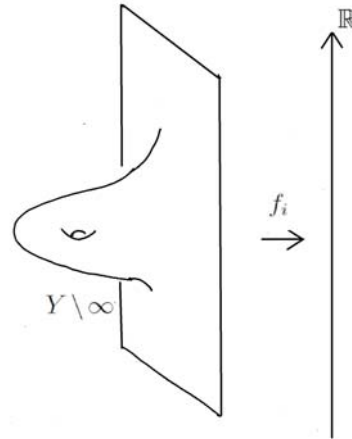
以下では Watanabe の構成を少し modify した不変量の n 次部分 z_n^{FW} の構成の概要を述べる。

z_n^{FW} は有理ホモロジー 3 球面の不変量で, $\mathcal{A}_n(\emptyset)$ に値をもつ。 z_n^{FW} は Jacobi 図のいくつかの辺を切ったグラフ (broken graph) のある Moduli を数えることで定義されているが, 簡単な考察によって z_n^{FW} は z_n^{KKT} や \tilde{z}_n と同様に, 配置空間上で閉 2 形式 (propagator) を組みあわせて積分する枠組みで書き直すことができる。すなわち, Morse 関数 f_i を用いて propagator $\omega(f_i)$ を $C_2(Y)$ の上に与え, 配置空間で積分して得られる主要項と, f_i の選択の曖昧さを消す項の和で書かれる。

$a_1, \dots, a_{3n} \in S^2$ を長さ 1 のベクトルとする。 $f_i : Y \setminus \infty \rightarrow \mathbb{R}$ を Morse-Smale 条件を満たす Morse 関数で, 以下の条件を満たすものとする。

$$f_i|_{N(\infty; Y) \setminus \infty} = q_{a_i}.$$

ここで, $q_{a_i} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ は, $q_{a_i}(x) = \langle x, a_i \rangle_{\mathbb{R}^3}$ すなわち a_i 方向への射影である。 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}$ は標準内積である。 f_i の特異点集合を $\text{Crit}(f_i) = \{p_1^i, \dots, p_{k_i}^i, q_1, \dots, q_{k_i}^i\}$ とする。ここで, $\text{ind}(p_j^i) = 2, \text{ind}(q_j^i) = 1$ である。 f_i の \mathbb{Q} 係数 Morse-Smale 複体の境界準同型を $\partial : H_2(Y \setminus \infty; \mathbb{Q}) \rightarrow H_1(Y \setminus \infty; \mathbb{Q})$, $\partial[p_k^i] = \sum_l \partial_{kl}[q_l^i]$ とする。 Y はホモロジー 3 球面なので, ∂ は同型写像であり, 逆写像 $g : H_1(Y \setminus \infty) \rightarrow H_2(Y \setminus \infty)$ が存在する。 $g([q_k^i]) = \sum_l g_{kl}[p_l^i]$ とする。



$\{\Phi_{f_i}^t : Y \setminus \infty \xrightarrow{\cong} Y \setminus \infty\}_{t \in \mathbb{R}}$ を gradient-like ベクトル場 $-\text{grad} f_i$ に関する微分同相写像の 1 パラメータ族とする. $\varphi : (Y \setminus \infty) \times (Y \setminus \infty) \times (0, \infty) \rightarrow (Y \setminus \infty) \times (Y \setminus \infty)$, $\varphi(x, y, t) = (y, \Phi_{f_i}^t(x))$ とするとき, $M_{\rightarrow}(f_i) = \varphi^{-1}(\Delta)$ と定義する. $\mathcal{A}_{q_k^i}$ を q_k^i の安定多様体, $\mathcal{D}_{p_j^i}$ を p_j^i の不安定多様体とする.

Watanabe は propagator の Poincaré 双対の候補^{*5}として次のような 4 次元多様体の重みつき和を定義した.

$$\mathcal{M}(f_i) := \frac{1}{2}(M_{\rightarrow}(f_i) + M_{\rightarrow}(-f_i)) - \sum_{k,l} g_{kl}(\mathcal{A}_{q_k^i} \times \mathcal{D}_{p_l^i} + \mathcal{D}_{p_l^i} \times \mathcal{A}_{q_k^i}).$$

充分一般的^{*6}な $\text{grad} f_1, \dots, \text{grad} f_{3n}, a_1, \dots, a_{3n}$ に対して,

$$z_n^{\text{FW}}(Y; \vec{f}) = \sum_{\Gamma \in \mathcal{E}_n} \# \left(\bigcap_{i=1}^{3n} P_i(\Gamma)^{-1} \mathcal{M}(f_i) \right) [\Gamma]$$

とおく.

命題 3.1 (Watanabe [13]). $\text{grad} \vec{f} = (\text{grad} f_1, \dots, \text{grad} f_{3n})$ と略記する. $\text{grad} \vec{f}$ のみ依存する数 $I(\text{grad} \vec{f}) \in \mathcal{A}_n(\emptyset)$ があり,

$$z_n^{\text{FW}}(Y) = z_n^{\text{FW}}(Y; \vec{f}) - I(\text{grad} \vec{f}) \in \mathcal{A}_n(\emptyset)$$

は Y の位相不変量となる.

3.2 \tilde{z}_n の応用

Watanabe は [13] において, 彼の不変量と Kontsevich の Chern-Simons 摂動論で得られる不変量との間になんらかの関係があると予想していた. \tilde{z}_n を用いてこの予想に

^{*5} propagator の Poincaré 双対とするにはある種のコンパクト化が必要である. ただし, 不変量の定義には必要ない.

^{*6} 一般的な $\text{grad} f_1, \dots, \text{grad} f_{3n}, a_1, \dots, a_{3n}$ に対して右辺の交差は横断的になる.

肯定的解決を与える。

定理 3.2 ([11]). $z_n^{\text{FW}}(Y) = \tilde{z}_n(Y)$.

Outline of proof. 証明の概略を述べる. $\mathcal{M}(f_i)$ は $(Y \setminus \infty)^2$ の 4 次元多様体の重みつき和であった. $\mathcal{M}(f_i) \setminus \Delta$ の $C_2(Y)$ 内での閉包を取ることで, $(C_2(Y), \partial C_2(Y))$ の 4 サイクル $\mathcal{M}_C(f_i)$ が得られる. この 4 サイクルの境界のうち $ST(Y \setminus \infty)$ にある部分は,

$$\frac{1}{2}c(\text{grad}f_i) + \sum_{k,l} g_{kl}(\mathcal{A}_{q_k^i} \cap \mathcal{D}_{p_l^i} + \mathcal{D}_{p_l^i} \cap \mathcal{A}_{q_k^i})$$

となる. 第 2 項内の $\mathcal{A}_{q_k^i} \cap \mathcal{D}_{p_l^i}$ と $\mathcal{D}_{p_l^i} \cap \mathcal{A}_{q_k^i}$ は, 向きの考察によりキャンセルすることがわかる. また, $\partial C_2(Y) \setminus q^{-1}(\Delta \setminus \infty^2)$ では, f_i の条件から, たとえば $q^{-1}(\infty \times (Y \setminus \infty)) = ST_\infty Y \times (Y \setminus \infty)$ 上では, $\partial \mathcal{M}_C(f_i) \cap (ST_\infty Y \times (Y \setminus \infty)) = \frac{1}{2}(\{a_i, -a_i\} \times (Y \setminus \infty))$ となる. 以上の考察により, $\partial \mathcal{M}_C(f_i)$ の Poincaré 双対として $\omega(\text{grad}f_i)$ がとれることがわかる. よって $\tilde{z}_n(Y; \text{grad}\vec{f}) = z_n^{\text{FW}}(Y; \vec{f})$ が従う. さらに \tilde{I} の定義から, $\tilde{I}(\text{grad}\vec{f}) = I(\text{grad}\vec{f})$ が分かる. \square

参考文献

- [1] M. Atiyah. On framings of 3-manifolds. *Topology*, 29(1):1–7, 1990.
- [2] S. Axelrod and I. M. Singer. Chern-Simons perturbation theory. In *Proceedings of the XXth International Conference on Differential Geometric Methods in Theoretical Physics, Vol. 1, 2 (New York, 1991)*, pages 3–45. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1992.
- [3] K. Fukaya. Morse homotopy and Chern-Simons perturbation theory. *Comm. Math. Phys.*, 181(1):37–90, 1996.
- [4] M. Futaki. On Kontsevich’s configuration space integral and invariants of 3-manifolds. *Master thesis, Univ. of Tokyo*, 2006.
- [5] M. Kontsevich. Feynman diagrams and low-dimensional topology. In *First European Congress of Mathematics, Vol. II (Paris, 1992)*, volume 120 of *Progr. Math.*, pages 97–121. Birkhäuser, Basel, 1994.
- [6] G. Kuperberg and D. P. Thurston. Perturbative 3-manifold invariants by cut-and-paste topology. *ArXiv Mathematics e-prints*, December 1999.
- [7] T. T. Q. Le, J. Murakami, and T. Ohtsuki. On a universal perturbative invariant of 3-manifolds. *Topology*, 37(3):539–574, 1998.
- [8] C. Lescop. On the Kontsevich-Kuperberg-Thurston construction of a configuration-space invariant for rational homology 3-spheres. *ArXiv Mathematics e-prints*, November 2004.
- [9] D. Moussard. Finite type invariants of rational homology 3-spheres. *Algebr. Geom. Topol.*, 12(4):2389–2428, 2012.
- [10] T. Ohtsuki. Finite type invariants of integral homology 3-spheres. *J. Knot Theory Ramifications*, 5(1):101–115, 1996.

- [11] T. Shimizu. An invariant of rational homology 3-spheres via vector fields. *ArXiv e-prints*, 2013.
- [12] V. A. Vassiliev. Cohomology of knot spaces. In *Theory of singularities and its applications*, volume 1 of *Adv. Soviet Math.*, pages 23–69. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1990.
- [13] T. Watanabe. Higher order generalization of Fukaya’s Morse homotopy invariant of 3-manifolds I. Invariants of homology 3-spheres. *ArXiv e-prints*, February 2012.
- [14] E. Witten. Quantum field theory and the Jones polynomial. In *Braid group, knot theory and statistical mechanics*, volume 9 of *Adv. Ser. Math. Phys.*, pages 239–329. World Sci. Publ., Teaneck, NJ, 1989.