The joint spectral flow and localization of the indices of elliptic operators

窪田　陽介　(東京大学)*

概　　要

本講演では，スペクトル流の概念の一般化である結合スペクトル流（joint spectral flow）を定義し，それを用いてある種の（閉）多様体上の楕円型作用素の指数（index）の局所化現象を記述する講演者の研究について紹介する．

1. 指数とその局所化

M を閉多様体，E をその上のベクトル束とする．このとき，切断の空間 $\Gamma(M,E)$ に作用する楕円型微分作用素 D に対して，その Fredholm 指数（解析的指数）

$$\operatorname{ind} D = \dim \ker(D) - \dim \operatorname{coker}(D)$$

は主表象のホモトピー類にしか依らない位相不変量を与える．特別な Dirac 型作用素に対しては，この整数は Hodge-小平分解を介して符号数や Riemann-Roch 数などの重要な不変量と結び付けられる．一方，Atiyah-Singer の指数定理によって，この指数はある特性類の積分（位相的指数）と結び付けられる．

特別な場合にこの指数を計算する強力な手法として，指数の局所化（localization）がある．これは，特別な点の数（と，その上での multiplicity）を数え上げることで指数を計算することができる現象一般をさし，例えば Lefschetz の不動点定理など群作用による不動点をみるものがよく知られている．本研究ではそれとは異なる，偏微分作用素の Witten 変形による局所化を扱う．

最も典型的な例は，Poincaré-Hopf の定理である．閉多様体 M の上のベクトル場 X でその零点が離散的なものに対して，Euler 数 $\chi(M) = \operatorname{ind}(d + d^* : \wedge^{\mathrm{even}} M \to \wedge^{\mathrm{odd}} M)$ はそのベクトル場の各零点で multiplicity を足しあげたものと一致する．E. Witten は [Wit82] で，ベクトル場が Morse 関数の gradient flow の場合に，外微分作用素を Morse 関数を用いて摂動によってこの事実を再証明した．

Witten の変形による指数の局所化の手法は，藤田-古田-吉田 [FFY10] によって無限次元版が考えられた．これは，ファイバー束のファイバー方向の Dirac 作用素がほとんどの点で可逆になっていることがわかっているときに，これをポテンシャル項と思って全空間の Dirac 作用素を摂動することで特別なファイバーの周りに指数を局所化する，という方法である．この方法を用いて，シンプレクティック幾何学における以下の定理が再証明された．

定理 1.1 (Andersen [And97], Fujita-Furuta-Yoshida [FFY10]). (M,ω) を閉シンプレクティック多様体，$\mathbb{T}^n \to M \to B$ を *Lagrange* ファイバー束，$L \to M$ を前量子化束（*prequantum line bundle*）とする．これらに対し，*Riemann-Roch* 数 $RR(M,L)$ を複素

本研究は科研費（課題番号：267081）の助成を受けたものである．
* 〒153-8914 東京都目黒区駒場 3-8-1 東京大学大学院数理科学研究科
e-mail: ykubota@ms.u-tokyo.ac.jp

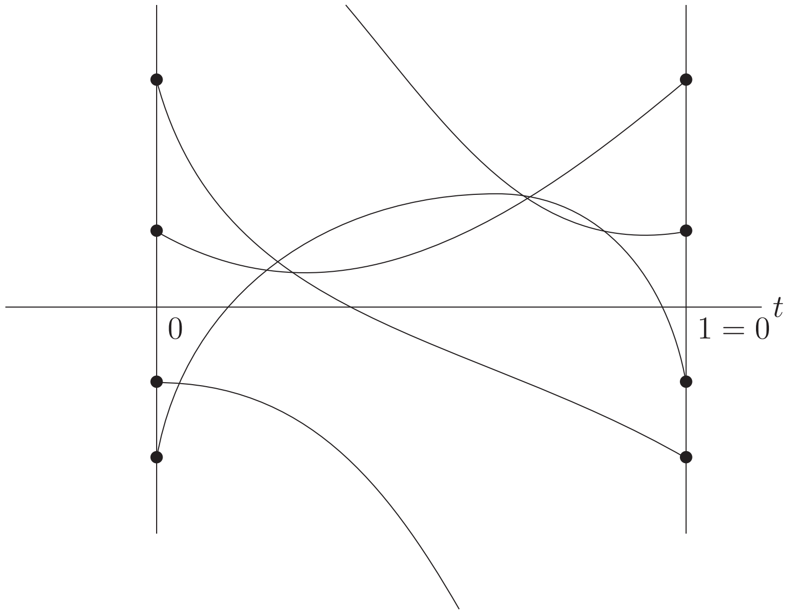

図 1: スペクトルの軌道

ベクトル束 $\lambda^{1/2} \otimes L$ で捩じられた $Dirac$ 作用素 $\not{D}^{\lambda^{1/2}\otimes L}$ の指数として定める．このとき，等式

$$RR(M, L) = \#\mathrm{BS}$$

が成り立つ．

ここで，前量子化束とは Hermite 計量 h とそれに関する Hermite 接続 ∇^L が存在して，$c_1(\nabla^L) = -2\pi i\omega$ を満たすような複素線束のことを指す．また，BS とは ∇^L が $\pi^{-1}(x)$ 上に制限すると自明な平坦接続となるような $x \in B$ のなす集合で（定義より，∇^L はどのファイバー上でも平坦接続になっている），このような $\pi^{-1}(x)$ は Bohr-Sommerfeld ファイバーと呼ばれる．

本講演では，このような解析的なアプローチをコホモロジー的，K 理論的に捉える方法として，次節で紹介するスペクトル流の概念の一般化を紹介する．

2. スペクトル流とその一般化

$\{D_t\}$ を $t \in S^1$ で添え字づけられた自己共役 Fredholm 作用素の連続な 1 パラメータ族とする．ここで，連続性は Riesz 位相（有界線形作用素のノルム位相を有界化 $D \mapsto D(1+D^2)^{-1/2}$ で引き戻したもの）に関するものとする．このとき，$\{D_t\}$ のスペクトル（固有値）もまた連続に動いており，図のような良い状況ではスペクトルが 0 をまたぐ回数を重複度込みで数え上げることができる．この数はスペクトル流（spectral flow）と呼ばれるもので，Atiyah と Lusztig により導入された．

この数は指数と深い関係があり，その一例として Atiyah-Patodi-Singer[APS76] では，D_t がある多様体上の微分作用素で実現される場合に，スペクトル流の指数公式

$$\mathrm{ind}(\frac{d}{dt} + D_t) = \mathrm{sf}(\{D_t\})$$

が成り立つことが証明された．ここでは，底空間 S^1 上のふたつの無限次元ベクトル束の差によって捩じられた Dirac 作用素の指数が，$\{D_t\}$ のスペクトルが 0 と交わる点の

周りに局所化し，かつ各点での重複度が固有空間の次元と交叉の向きによって決定されている．この状況を，底空間が一般の閉多様体の場合に一般化しようとすることは自然である．

$(A_1, ..., A_n)$ を互いに交換する自己共役作用素の n 組とする．このとき，これらの作用素は同時固有分解（より一般には，同時スペクトル分解）することができ，結合スペクトル (joint spectrum) と呼ばれる $\mathbb{R}^n$ の部分集合を定める．これは，同時固有値の集合 $\{(\lambda_1, ..., \lambda_n) \mid \exists\xi \in \mathcal{H}\ A_i\xi = \lambda_i\xi\}$ の，無限次元ベクトル空間における一般化である．

定義 2.1 (曖昧な定義). n 次元閉多様体で添え字づけられた連続な**交換する Fredholm** n **組**（*commuting Fredholm n-tuple,* 定義は次節で与える）の族に対して，その結合スペクトルが 0 と交わる回数を重複度込みで数え上げた数を結合スペクトル流と呼び，jsf $\{D(x)\}$ と書く．

互いに交換する H 上の作用素に値を取る関数 $(D_1(x), \ldots, D_n(x))$ に対して，Clifford 環 $\mathbb{C}\ell_n$ を用いて，これに付随する作用素 $c_1D_1(x) + \cdots c_nD_n(x)$ 定義することができる．この作用素を簡単に $D(x)$ と書く．これは，Dirac 作用素 $\sum c(e_i)\nabla_{e_i}$ のアナロジーであり，$(D_1, \ldots, D_n)$ に付随する Dirac 作用素と呼ぶこととする．

この結合スペクトル流に対して，以下のような定理を示した．

定理 2.2. 以下の指数定理が成り立つ．

$$\mathrm{ind}(\pi^*\not{\mathfrak{D}}_B + D(x)) = \mathrm{jsf}(\{D(x)\})$$

この定理は先に紹介した Atiyah-Patodi-Singer によるスペクトル流の指数定理の一般化である．また，前節で説明した指数の局所化に関する二つの例は，この指数定理を以下に説明するようにもう少し一般化したものによって証明される．

あるベクトル束 V が与えられたときに，その局所的な正規直交基底 $v_1, \ldots, v_n$ を固定するごとに，$c(v_1)D_{v_1} + \cdots + c(v_n)D_{v_n}$ が well-defined になるような，互いに交換する自己共役作用素の"twisted"な族を考える．これは局所的に定義された作用素値関数たちがベクトル束の変換関数によって貼りあっている様な状況である（正確な定義は 5 節で与える）．このような族に対しても結合スペクトル流を定義することができ，上の指数定理が成り立つ．

Poincaré-Hopf の定理の証明. 簡単のため多様体は Spin^c 構造を持つと仮定する．ベクトル場 X の Clifford 積 $c(X)$ を，1 次元作用素（したがって自明に互いに交換する）の組 $\langle X, e_1\rangle, ..., \langle X, e_n\rangle$ に付随する Dirac 作用素だと思うと，定理によって $\mathrm{ind}(D_{\mathrm{dR}}+c(X)) = \mathrm{jsf}(\{\langle X, e_i\rangle\})$ とわかる．ここで，この作用素の組の結合スペクトルとはベクトル場 X そのものなので，右辺は定義より $\sum \nu_X(p)$ と一致する．一方，$D_{\mathrm{dR}} + tc(X)$ は t によらず楕円型であるため，指数のホモトピー不変性から左辺は $\mathrm{ind}(D_{\mathrm{dR}})$ と一致する． □

定理 *1.1* の証明. 概複素構造 J を固定しておく．ファイバーのトーラスの上の Dirac 作用素を，互いに交換する微分作用素の組 $\nabla_{Je_1}, ..., \nabla_{Je_n}$ に付随する Dirac 作用素だと思うと，定理によって $\mathrm{ind}(\not{\mathfrak{D}}_B + \sum c(e_i)\nabla_{Je_i}) = \mathrm{jsf}\,\nabla_{Je_i}$ とわかる．ここで，左辺の作用素は M の上の Dirac 作用素と同じ主表象を持つため指数は一致する．一方，∇_{Je_i} の結合スペクトルが 0 と交わる点は Bohr-Sommerfeld ファイバーと一致し，Bohr-Sommerfeld ファイバーの近傍の構造の一意性からそれぞれのファイバーの寄与は一様に 1 であることが計算できる． □

次節では，この結合スペクトル流の正確な定式化と指数定理の証明について解説する．

3. 連結 K 理論

結合スペクトル流を厳密に定義するためには，互いに交換する自己共役作用素のなす位相空間のホモトピー型を理解する必要がある．このような空間は，K 理論との結びつきが深い．特に自己共役 Fredholm 作用素のなす空間は K^{-1} 群のスペクトラム[1]になっており，この事実はスペクトル流の定義と指数定理の証明に本質的である．

作用素の空間と K 理論の関係は，作用素環論における Kapsarov の KK 理論 ([Kas80], [Bla98]) によって説明すると見通しが良い．$KK(A,B)$ はふたつの C^* 環 A, B に対して定義されるアーベル群で，A に対して K-ホモロジー的に（楕円型作用素のように）振る舞い，B に対して K-コホモロジー的に（ベクトル束のように）振る舞う．特に $KK(A,\mathbb{C})$ は A の K-ホモロジーと，$KK(\mathbb{C},B)$ は B の K 群と同型になる．一方，この群は A から B への一般化された射だと考えることもできる．例えば $*$-準同型 $\varphi\colon A\to B$ は $KK(A,B)$ の元を定める．また，合成 $KK(A,B)\otimes KK(B,C)\to KK(A,C)$ という演算が存在する．これは，K-ホモロジー $KK(A,\mathbb{C})$ と K-コホモロジー $KK(\mathbb{C},A)$ のペアリングの一般化となっている．

KK 理論において，次数を正の方向にずらすことは右側に Clifford 環 $\mathbb{C}\ell_n$ をテンソルすること，あるいは左側に懸垂をとる（$C_0(\mathbb{R}^n)$ をテンソルする）ことに対応する．つまり，

$$KK^{-n}(A,B)\cong KK(A\hat{\otimes}\mathbb{C}\ell_n,B)\cong KK(A,B\otimes C_0(\mathbb{R}^n))$$
$$KK^{n}(A,B)\cong KK(A,B\hat{\otimes}\mathbb{C}\ell_n)\cong KK(A\otimes C_0(\mathbb{R}^n),B)$$

という関係が成り立っている．ここで Clifford 環と懸垂が同じ役割を果たすことが KK 理論的な Bott 周期性に対応している．この観点を $A=\mathbb{C}$，$B=C(X)$ の場合に適用すると，$n\leq 0$ の場合には [AS69] による K^{-n} 群のスペクトラムの Fredholm 作用素による記述が得られる．さらに，この K^{+n} 群における対応物として次のことがわかる．

命題 3.1. *Hilbert* $\mathbb{C}\ell_n$-加群 $H\hat{\otimes}\mathbb{C}\ell_n$ 上の *Fredholm* 作用素の成す空間 $\mathcal{F}_{\mathbb{C}\ell_n}(H)$ は，K^n 群のスペクトラムとなっている．

結合スペクトル流の定義には，連結 K 理論と呼ばれるコホモロジー理論のスペクトラムの Segal による記述を用いる．ここで，一般コホモロジー H^* に対して，H^* に付随する連結コホモロジー（connective cohomology）h^* とは以下を満たす一般コホモロジーのことを言う．

1. 自然変換 $h^*\to H^*$ が存在する．
2. $h^*(\mathrm{pt})$ は $*>0$ のとき 0，$*\leq 0$ のとき上の自然変換によって $H^*(\mathrm{pt})$ と同型になる．

ここでは，上の H^* が K 群の場合について，この連結 K 理論のスペクトラムのいくつかの表示の対応を見ることで結合スペクトル流を定式化して指数定理を証明することができる，という話の流れを概観する．

[1] 本講演では内容の都合上二種類の意味で spectrum という言葉が用いられるが，ここでは作用素の spectrum を「スペクトル」，コホモロジーの spectrum を「スペクトラム」と書いて区別する．

(1) 配置空間（configuration space）　X を連結なコンパクト Hausdorff 空間，A を X の単連結な閉部分空間で，近傍変位レトラクトであるものとする．このとき，(X, A) の上のある配置空間（configuration space）$F(X, A)$ を考える．この空間は，集合としては $X \setminus A$ の離散部分空間 S と，S の元で添え字づけられたある固定された Hilbert 空間（無限次元複素ベクトル空間）の有限次元部分空間の族 $\{V_x\}_{x \in S}$ で，$x \neq y$ に対して V_x と V_y が直交するものの対 $(S, \{V_x\}_{x \in S})$ からなる．ここには，以下の二つの性質を満たすように自然な位相が入っている．

1. 二つの点 x, x' が同じ点 x'' に収束するように動いたとき，配置空間の元は x'' 上に直和空間 $V_x \oplus V_{x'}$ が乗っている元に収束する．
2. 点 x が A の元に収束するように動いたとき，配置空間の元はその点が消失するような元に収束する．

$F(X, A)$ は，S が有限集合となっている元からなる部分空間 $F_{\mathrm{fin}}(X, A)$ とホモトピー同値である．また，以下の定理が成り立つ．

定理 3.2 (Segal[Seg77])**.** $F_{\mathrm{fin}}(A, *) \to F_{\mathrm{fin}}(X, *) \to F_{\mathrm{fin}}(X, A)$ は *quasi* ファイブレーションである．

この事実から，自然な写像 $F(S^n, *) \to \Omega F(S^{n+1}, *)$ がホモトピー同値を与える，つまり空間 $F(S^n, *)$ がある一般コホモロジー理論のスペクトラムになっていることがわかる．

(2) 互いに交換する作用素の空間　互いに交換するような作用素からなる空間の変種をいくつか用意する．

定義 3.3.

(1) Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の有界な自己共役作用素の $(n+1)$ 組 $\{T_i\}_{i=0,\ldots,n}$ で，以下の性質を満たすものの集合にノルム位相を入れたものを $F_n(\mathcal{H})$ と書く．

1. 作用素 $T^2 := \sum T_i^2$ は恒等作用素 $\mathrm{id} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ と等しい．
2. 任意の i と j に対して作用素 T_i と T_j は交換する．
3. 作用素 T_i（$i = 1, 2, \ldots, n$）と $T_0 - 1$ はコンパクト作用素である．

(2) Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の有界な自己共役作用素の n 組 $(T_1, \ldots, T_n)$ が**有界な交換する Fredholm** n **組**（*bounded commuting Fredholm n-tuple*）であるとは，次を満たすことを言う．

1. 作用素 $T^2 := \sum T_i^2$ は $1 + \mathbb{K}(\mathcal{H})$ に含まれる．
2. 任意の i と j に対して，作用素 T_i は T_j と互いに交換する．

有界な交換する Fredholm n 組の集合にノルム位相を入れたものを $\mathcal{F}_n(\mathcal{H})$ と書く．

(3) Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の非有界な自己共役作用素の n 組 $(T_1, \ldots, T_n)$ が**非有界な交換する Fredholm** n **組**（*unbounded commuting Fredholm n-tuple*）であるとは，次を満たすことを言う．

1. 作用素 $D^2 := \sum D_i^2$ は稠密な部分空間の上で定義される Fredholm 作用素で，コンパクトレゾルベントを持つ．つまり，$(1+D^2)^{-1}$ はコンパクト作用素である．

2. 任意の i と j に対して，D_i と D_j は $\mathrm{dom}\,(D^2)^2$ 上互いに交換する．

非有界な交換する Fredholm n 組の集合を $\mathscr{F}_n(\mathcal{H})$ と書く．この集合には，有界化の写像 $(D_1,\ldots,D_n) \mapsto (D_1(1+D^2)^{-1/2},\ldots,D_n(1+D^2)^{-1/2})$ が連続になるような最も強い位相（Riesz 位相のアナロジーである）を入れている．

このとき，どの条件においてもそれぞれの作用素たちは同時固有値展開ができ，従って同時固有値（結合スペクトル）と固有空間の情報と一対一対応が与えられる．それぞれの空間の作用素たちの固有値は，(1) では S^n に分布し一点 $*$ にのみ集積し，(2) では $\overline{\mathbb{D}^n}$ に分布し境界の S^{n-1} にのみ集積し，(3) では $\mathbb{R}^n$ に離散的に分布する．従って，固有値の空間の間の連続写像 $\mathbb{R}^n \to (\overline{\mathbb{D}^n}, S^{n-1}) \to (S^n,*)$ は，これらの空間の間に連続写像 $\mathscr{F}_n(\mathcal{H}) \to \mathcal{F}_n(\mathcal{H}) \to F_n(\mathcal{H})$ を誘導する．また，対応 $(T_1,\ldots,T_n) \mapsto c_1T_1+\cdots+c_nT_n \in \mathbb{B}(\mathcal{H})\hat{\otimes}\mathbb{C}\ell_n$ によって，連続写像 $\mathcal{F}_n(H) \to \mathcal{F}_{\mathbb{C}\ell_n}(H)$ が定まっている．

(3)C^* 環の $*$-準同型の空間　局所コンパクト Hausdorff 空間上の，無限遠で 0 に収束する連続関数のなす空間 $C_0(X)$ に，各点での加法，乗法と複素共役による $*$ 構造を入れた $*$-代数を考える．この代数は sup ノルムに関して C^* 環になっている．二つの C^* 環の間の加法，乗法，$*$-構造を保つ写像を $*$-準同型と呼ぶ．今，$*$-準同型のなす空間 $\mathrm{Hom}(C_0(X),\mathbb{K}(\mathcal{H}))$ は，強位相によって位相空間となっている．また，任意のコンパクト Hausdorff 空間 Y と C^* 環 A に対して成り立つ同相

$$\mathrm{Hom}(C_0(X), C(Y)\otimes A) \cong \mathrm{Map}(Y, \mathrm{Hom}(C_0(X),A))$$

は，特に A がコンパクト作用素環 $\mathbb{K}(\mathcal{H})$ のとき群準同型

$$\begin{aligned}[X,\mathrm{Hom}(C_0(\mathbb{R}^n),\mathbb{K}(\mathcal{H}))] &\cong [C_0(\mathbb{R}^n), C(X)\otimes\mathbb{K}(\mathcal{H})] \\ &\to KK(C_0(\mathbb{R}^n), C(X)\otimes\mathbb{K}(\mathcal{H})) \cong K^n(X)\end{aligned} \tag{3.4}$$

を定める ([DN90])．

さて，ここまで紹介してきた位相空間のうち，

(1) $F(S^n,*)$

(2) $F_n(\mathcal{H})$

(3) $\mathrm{Hom}(C_0(\mathbb{R}^n),\mathbb{K}(\mathcal{H}))$

は互いに同相である．従って，(1) と (3) の対応に定理 3.2 と式 (3.4) を合わせると，これらの空間が連結 K 理論のスペクトラムを定めることがわかる．

ここで，式 (3.4) によって定まる連結 K 群から K 群への自然変換は，互いに交換する作用素の観点では以下のように記述されることを証明した．

命題 3.5. 以下の図式は交換する．

$$\begin{tikzcd}
{[X,\mathcal{F}_n(\mathcal{H})]} \arrow[r] \arrow[d] & {[X,F_n(\mathcal{H})]} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & {[X,\mathrm{Hom}(C_0(\mathbb{R}^n),\mathbb{K}(\mathcal{H}))]} \arrow[d] \\
{[X,\mathcal{F}_{\mathbb{C}\ell_n}(\mathcal{H})]} \arrow[rr, "\sim"] & & K^n(X)
\end{tikzcd}$$

4. 結合スペクトル流とその指数定理

結合スペクトル流の定義に戻る．まず，$F(S^m,*)$と同様に，今度は点の配置空間$P(X,A)$を次のように定義する．この空間は，集合としては$X\setminus A$の離散部分空間Sと，Sの元で添え字づけられた正の整数の族$\{n_x\}_{x\in S}$からなり，$F(X,A)$と同様の位相が入っている．このとき，$P(S^n,*)$はSが有限集合となる様な元からなる部分集合$P_{\mathrm{fin}}(S^n,*)$とホモトピー同値であるが，この空間は点付き空間$(S^n,*)$の無限対称積と同相である．したがって，Dold-Thomの定理 [DT58] により，この空間への連続写像のホモトピー類$[X,P(S^n,*)]$は特異コホモロジーと同型になる．ここでこの同型をよく見ると，（横断的に交わるようなよい場合には）XからS^nへの無限個の写像が$*$の対蹠点と交叉した部分を合わせたサイクルを対応させるものとなっている．特にXが連結向き付け可能なn次元多様体のとき，$[X,P(S^n,*)]$と$H^n(X;\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}$は$X$から$S^n$への無限個の写像が$*$と交叉した回数を重複度込みで数え上げたものとなっている．

今，$F(X,A)$から$P(X,A)$に向けて固有空間の情報を（次元を除いて）忘れるという写像

$$j:(S,\{V_x\}_{x\in S})\longmapsto(S,\{\dim V_x\}_{x\in S}).$$

が定まり，この写像はコホモロジー理論の間の自然変換$j_*:\tilde{k}^*\to H^*(\cdot;\mathbb{Z})$を定める．

定義 4.1. 連結向き付け可能なn次元閉多様体Xで添え字づけられた連続な交換するFredholm n組の族$\{D(x)\}$に対して，$\mathrm{jsf}(\{D(x)\}):=\langle j_*(\Phi[\{D(x)\}]),[X]\rangle$を$\{D(x)\}$の結合スペクトル流と定義する．

Fredholm n組と$F(S^n,*)$の関係を思い出すと，$*$の対蹠点とはFredholm n組のスペクトルの言葉では0に対応している．上の議論と併せると，この定義は確かにスペクトルが0を交叉する回数を数えたものとなっていることがわかる．

指数定理の証明に対しては，以下の事実が本質的である．一般コホモロジーh^*には，Chern指標の一般化である有理同型（Chern-Dold指標 [Dol] と呼ばれる）$h^*(X)\to H^*(X,h^*(\mathrm{pt})\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q})$が存在する．

命題 4.2. 群準同型$j_*\otimes_{\mathbb{Z}}\mathrm{id}_{\mathbb{Q}}$は，$n$次 *Chern-Dold* 指標$\mathrm{ch}_n$と一致する．

証明の概略. Chern-Dold指標の定義から，以下の図式

$$\begin{tikzcd}
k^n(X)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q} \arrow[r, "\mathrm{ch}"'] \arrow[d, "j_*"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H^n(X;k^*(\mathrm{pt})\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes j_*"] \\
H^n(X;\mathbb{Q}) \arrow[r, "\sim", "\mathrm{ch}=\mathrm{id}"'] & H^n(X;H^*(\mathrm{pt})\otimes\mathbb{Q})
\end{tikzcd}$$

が交換することがわかる．□

次に，この結合スペクトル流の指数定理について説明する．まずは幾何学的なセッティングから始める．

Bをn次元閉Spin^{c}多様体，$Z\to M\to B$をB上のファイバー束，EをM上の複素ベクトル束とする．今，接束の分解$TM=T_VM\oplus T_HM$を固定すると，$\mathfrak{S}_{\mathbb{C}}(B):=\mathrm{Spin}^c(M)\times_c\mathbb{C}\ell_n$上の$\mathbb{C}\ell_n$-Dirac作用素$\not{\mathfrak{D}}_B$の「引き戻し」$\pi^*\not{\mathfrak{D}}_B$が，

$$\begin{aligned}\pi^*\not{\mathfrak{D}}_B:&\Gamma(M,\pi^*\mathfrak{S}^E_{\mathbb{C}}(B))\xrightarrow{d}\Gamma(M,\pi^*\mathfrak{S}^E_{\mathbb{C}}(B)\otimes T^*M)\\ &\xrightarrow{p_{T^*_HM}}\Gamma(M,\pi^*\mathfrak{S}^E_{\mathbb{C}}(B)\otimes T^*_HM)\xrightarrow{c}\Gamma(M,\pi^*\mathfrak{S}^E_{\mathbb{C}}(B)).\end{aligned}$$

のように定義できる．これは，$T_{\pi(x)}B \cong T^*_{\pi(x)}B$ の基底 $\{e_1, \dots, e_n\}$ を用いて

$$\pi^*\not{\mathfrak{D}}_B = \sum h(\pi^* e_i)\nabla^{\pi^*\mathfrak{S}^E_{\mathbb{C}}(B)}_{\pi^* e_i}.$$

と表示できる．

$\{D_1, \dots, D_n\}$ を E 上の１階のファイバー方向の擬微分作用素の n 組で，次の条件を満たすものとする．

1. 任意の i と j に対して，作用素 D_i と D_j は交換する．
2. 二乗和 $\sum_{i=1}^n D_i^2$ はファイバーごとに楕円型である．

このとき，$\{D_1(x), \dots, D_n(x)\}_{x\in B}$ は（ファイバーを $L^2(Z_x, E_x)$ とする Hilbert 空間束を自明化すると）非有界な交換する Fredholm n 組を定める．また，$L^2(M, \pi^*\mathfrak{S}^E_{\mathbb{C}}(B))$ に作用する擬微分作用素 $\pi^*\not{\mathfrak{D}}_B + \sum c_i D_i(x)$ は楕円型である．

以上のような条件のもとで，定理2.2が成立する．

定理 2.2 の証明の概略. B を偶数次元とする（奇数次元の場合は S^1 を直積して偶数次元の場合に帰着する）．このとき，Bott 周期性により $K^n(X)$ と $K^0(X)$ は同型である．Fredholm 作用素 $\{\sum c_i D_i(x)\}$ が定める $K^n(X)$ の元を $[\mathrm{ind}\, D]^2$，Bott 周期性によってこの元に対応する $K^0(X)$ の元を $[\![\mathrm{ind}\, D]\!]$ と書くとする．また，底空間 B の Dirac 作用素が定める K ホモロジー類を $[\not{D}_B]$ と書く．このとき，KK 理論における非有界 Kasparov 積 [Kuc97] を用いることで，指数 $\mathrm{ind}(\pi^*\not{\mathfrak{D}}_B + \sum c_i D_i(x))$ はペアリング $\langle [\![\mathrm{ind}\, D]\!], [\not{D}_B]\rangle$ によって計算できることがわかる．一方このペアリングは，Chern-Dold 指標を介して

$$\begin{aligned}\langle [\![\mathrm{ind}\, D]\!], [\not{D}_B]\rangle &= \langle \mathrm{ch}([\![\mathrm{ind}\, D]\!]), \mathrm{ch}([\not{D}_B])\rangle \\ &= \langle \mathrm{ch}(\Phi\{D(x)\}), \mathrm{Td}(B) \cap [B]\rangle \\ &= \langle \mathrm{ch}_n(\Phi(\{D(x)\})), [B]\rangle = \mathrm{jsf}\{D(x)\}.\end{aligned}$$

と計算できる．ここで，k^n 群の Chern-Dold 指標による像は n 次以上のコホモロジーにしか含まれないため Todd 類の寄与が 0 次の項以外なくなることが本質的である．　□

5. ベクトル束によって捩じられた族の場合

最後に，交換する Fredholm n 組の，ベクトル束によって捩じられた族とそのスペクトル流について説明する．

まず，$GL(n;\mathbb{R})$ の $F(S^n, *)$（あるいは $F_n(\mathcal{H})$ や $\mathrm{Hom}(C_0(\mathbb{R}^n), C(X) \otimes \mathbb{K}(\mathcal{H}))$）への作用を，次のように定義する．

$$g \cdot (T_0, T_1, \dots, T_n) := \left(\sum g_{1j}T_j, \dots, \sum g_{nj}T_j\right).$$

今，V を B 上の実ベクトル束とする．ファイバー束 $GL(V) \times_{GL(n;\mathbb{R})} F(S^n, *)$（resp. $F_n(\mathcal{H})$）を F_V（resp. $F_V(\mathcal{H})$）と書く．同様にして，$GL(n, \mathbb{R})$ は交換する Fredholm n 組の空間 $\mathcal{F}_n(\mathcal{H})$（resp. $\mathscr{F}_n(\mathcal{H})$）にも作用する．対応するファイバー束を $F_V(\mathcal{H})$（resp. $\mathscr{F}_V(\mathcal{H})$）と書くこととする．

[2] この表記は，Fredholm 作用素が定める K 群の元がベクトル束を用いた定式化のもとで指数束（index bundle）に対応していることから来ている．

今，切断 $T = T(x) \in \Gamma(X, F_V(\mathcal{H}))$ (resp. $\Gamma(X, \mathscr{F}_V(\mathcal{H}))$ を有界な（resp. 非有界な）交換する Fredholm n 組の V によって捩じられた族（V-twisted family）と呼ぶこととする．すると，2 節で触れたように，V_x の正規直交基底 $\{v_1, \ldots, v_n\}$ の取り方に依らず，付随する Dirac 作用素 $c(v_1)T_{v_1}(x) + \cdots + c(v_n)T_{v_n}$ が well-defined であることがわかる．

捩れがない場合に対して前節まででなされた議論は，この場合にも同様に成り立つ．まず，集合 $\Gamma(X, F_V)$，$\Gamma(X, F_V(\mathcal{H}))$，$\mathrm{Hom}_{C(X)}(C_0(V), C(X) \otimes \mathbb{K}(\mathcal{H}))$ は互いに同相である．これらの連結成分は，主束 $GL(V) \times_{GL(n,\mathbb{R})} \mathcal{G}_k^{\mathrm{mod}}$ に付随する捩れ連結 K 群（twisted reduced connective K-group）$\tilde{k}^V(X)$ を成す（[AS04]）．3 節の j に対応する写像 $j : F_V \to P_V$ は $j_* : \Gamma(X, F_V) \to \Gamma(X, P_V)$ を誘導する．今，$\Gamma(X, F_V)$ の連結成分が $\tilde{k}^V(X)$ と，$\Gamma(X, P_V)$ の連結成分が $H^V(X; \mathbb{Z})$ と同型であることから，j_* は V によって捩じられた連結 K 群とコホモロジー群の準同型を定める．

今，V が $\mathrm{S}pin^c$ 構造を持つと仮定しよう．このとき，V が定める K 群，コホモロジー群の捩れは自明になる．従って，この j_* は捩れのない連結 K 群とコホモロジー群の間の準同型となり，特に $H^V(X; \mathbb{Z})$ は自然に $\mathbb{Z}$ と同型になる．4 節の議論と同様にして，この場合にも結合スペクトル流が定義できる．

これに対して，4 節と同様の条件のもとで，指数定理 2.2 が成り立つ．証明は，次の二つのステップに分けて行う．まず，捩れのない場合のスペクトル流の指数定理を多様体が閉でない場合の Callias 型の指数定理（[Cal78], [Bun95]）に一般化する．この定理の証明は，Gromov-Lawson [GL83] の相対指数定理の証明で用いられた不等式評価のアナロジーを用いることで証明できる．そして，捩れ Thom 同型によって，元の空間の指数定理をベクトル束 V の上の Callias 型指数定理に帰着する．

参考文献

[And97] J. E. Andersen. Geometric quantization of symplectic manifolds with respect to reducible non-negative polarizations. *Comm. Math. Phys.*, Vol. 183, No. 2, pp. 401–421, 1997.

[APS76] M. F. Atiyah, V. K. Patodi, and I. M. Singer. Spectral asymmetry and Riemannian geometry. III. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, Vol. 79, No. 1, pp. 71–99, 1976.

[AS69] M. F. Atiyah and I. M. Singer. Index theory for skew-adjoint Fredholm operators. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, No. 37, pp. 5–26, 1969.

[AS04] Michael Atiyah and Graeme Segal. Twisted K-theory. *Ukr. Mat. Visn.*, Vol. 1, No. 3, pp. 287–330, 2004.

[Bla98] B. Blackadar. *K-theory for operator algebras*, Vol. 5 of *Mathematical Sciences Research Institute Publications*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1998.

[Bun95] U. Bunke. A K-theoretic relative index theorem and Callias-type Dirac operators. *Math. Ann.*, Vol. 303, No. 2, pp. 241–279, 1995.

[Cal78] C. Callias. Axial anomalies and index theorems on open spaces. *Comm. Math. Phys.*, Vol. 62, No. 3, pp. 213–234, 1978.

[DN90] M. Dădărlat and A. Némethi. Shape theory and (connective) K-theory. *J. Operator Theory*, Vol. 23, No. 2, pp. 207–291, 1990.

[Dol] A. Dold. Relations between ordinary and extraordinary homology. In *mimeographed notes of the Colloquium on Algebraic Topology*, pp. 2–9.

[DT58] A. Dold and R. Thom. Quasifaserungen und unendliche symmetrische Produkte. *Ann. of Math. (2)*, Vol. 67, pp. 239–281, 1958.

[FFY10] H. Fujita, M. Furuta, and T. Yoshida. Torus fibrations and localization of index I—polarization and acyclic fibrations. *J. Math. Sci. Univ. Tokyo*, Vol. 17, No. 1, pp. 1–26, 2010.

[GL83] M. Gromov and H. B. Lawson. Positive scalar curvature and the Dirac operator on complete Riemannian manifolds. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, No. 58, pp. 83–196 (1984), 1983.

[Kas80] G. G. Kasparov. The operator K-functor and extensions of C^*-algebras. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, Vol. 44, No. 3, pp. 571–636, 719, 1980.

[Kuc97] D. Kucerovsky. The KK-product of unbounded modules. *K-Theory*, Vol. 11, No. 1, pp. 17–34, 1997.

[Seg77] G. Segal. K-homology theory and algebraic K-theory. In *K-theory and operator algebras (Proc. Conf., Univ. Georgia, Athens, Ga., 1975)*, pp. 113–127. Lecture Notes in Math., Vol. 575. Springer, Berlin, 1977.

[Wit82] E. Witten. Supersymmetry and Morse theory. *J. Differential Geom.*, Vol. 17, No. 4, pp. 661–692 (1983), 1982.