Infinite-dimensional manifolds and universal spaces

越野克久　(筑波大学数理物質系数学域)

概　要

本講演では、σ-局所コンパクト距離付け可能空間からなるクラス、またはその部分クラスに対する普遍空間と、それをモデル空間とする無限次元多様体の位相的特徴付けについて解説する。また、上記の普遍空間と同相になる線形位相空間の凸集合について紹介する。

1. 序

本講演では、空間はすべてハウスドルフ空間とし、写像はすべて連続写像とする。空間 E に対して、各点が E のある開集合と同相な開近傍を持つパラコンパクト空間を、E-多様体と呼び、E をモデル空間という。E-多様体が無限次元多様体であるとは、モデル空間 E が無限次元空間のときをいう。稠密度が τ のヒルベルト空間を $\ell_2(\tau)$ と書くことにする。即ち、

$$\ell_2(\tau) = \left\{ x = (x(\gamma))_{\gamma<\tau} \in \mathbb{R}^\tau \,\middle|\, \sum_{\gamma<\tau} x(\gamma)^2 < \infty \right\}.$$

また、ヒルベルト立方体を $\mathbf{Q}$ と表す。1960 年代後半から盛んに研究されてきた無限次元多様体論において、これらは無限次元多様体のモデル空間として、最も代表的なものである。1980 年、1981 年には、H. Toruńczyk [21, 22] によって、$\ell_2(\tau)$-多様体と $\mathbf{Q}$-多様体の位相的特徴付けが得られた。

各ボレル階層 B に対して、絶対 B-空間とは、それを含む任意の距離付け可能空間の中で B-集合となるものをいう。ヒルベルト空間は、絶対 G_δ-空間からなるクラス、即ち、完備距離付け可能空間からなるクラスに対する普遍空間である。ここで、空間 X がクラス $\mathcal{C}$ に対する普遍空間であるとは、$\mathcal{C}$ の任意の元が X に位相的に埋め込むことができるときをいう。近年では多くの研究者によって、非完備な絶対ボレル空間からなるクラスに対する普遍空間と、それをモデル空間とする無限次元多様体が研究されている。M. Bestvina と J. Mogilski [7] によって、各ボレル階層に関する、可分絶対ボレル空間の普遍空間が、可分ヒルベルト空間の部分空間として存在することが証明された。また、K. Sakai and M. Yaguchi [20] や K. Mne [18] によって、非可分絶対ボレル空間についても同様のことが成り立つことが知られている。。

ヒルベルト空間 $\ell_2(\tau)$ の標準正規直行基底で張られる部分空間を $\ell_2^f(\tau)$ で表すこととする。即ち、

$$\ell_2^f(\tau) = \{x \in \ell_2(\tau) \mid 有限個の\gamma < \tau を除いて、x(\gamma) = 0\}.$$

稠密度 τ が $\aleph_0$ に等しいとき、可分ヒルベルト空間 $\ell_2(\aleph_0)$ とその部分空間 $\ell_2^f(\aleph_0)$ を単に ℓ_2、ℓ_2^f と書く。空間 $\ell_2^f(\tau)$ とヒルベルト立方体 $\mathbf{Q}$ の積空間 $\ell_2^f(\tau) \times \mathbf{Q}$ は、絶対 F_σ-空間からなるクラス、即ち、σ-局所コンパクト距離付け可能空間のクラスに対する普遍空間であることが知られている。ここで、空間が局所コンパクト部分集合の可算和で表されるとき、σ-局所コンパクトであるといい、特にコンパクト部分集合の可算和で表さ

れる場合、σ-局所コンパクトであるという。一方、$\ell_2^f(\tau)$ は、その部分クラスである強可算次元 σ-局所コンパクト距離付け可能空間のクラスに対する普遍空間である。有限次元閉集合の可算和で表される空間を、強可算次元であるという。本講演では、$\ell_2^f(\tau)$ や $\ell_2^f(\tau) \times \mathbf{Q}$ をモデル空間とする無限次元多様体の位相的特徴付けや、これらと同相になる線形位相空間の凸集合について、講演者が得た結果を中心に解説する。

2. 無限次元多様体の特徴付け

無限次元多様体の位相的特徴付けにおいて、次の二つの概念は中心的な役割を果たしている。

定義 1 (Z-集合)**.** 空間 X の閉集合 A が Z-集合であるとは、X の任意の開被覆 $\mathcal{U}$ に対して、X の恒等写像の $\mathcal{U}$-近似 $f : X \to X$ で、その像 $f(X)$ が A と交わらないものが存在することをいう。ここで、$f(X)$ の閉包が A と交わらないとき、A を強 Z-集合と呼ぶ。

定義 2 (強普遍性)**.** 空間 X がクラス $\mathcal{C}$ に対して強普遍性を持つとは、次の条件を満たすことである*:*

- 空間 A が $\mathcal{C}$ に属しているとする。また、B を A の閉集合、$f : A \to X$ を A から X への写像で、B の像 $f(B)$ が X の Z-集合となるものとする。このとき、X の任意の開被覆 $\mathcal{U}$ に対して、f の $\mathcal{U}$-近似 $g : A \to X$ で、その像 $g(A)$ が Z-集合であり、B への制限について $g|_B = f|_B$ を満たすものが存在する。

ここで、空間 X の開被覆 $\mathcal{U}$ に対して、写像 $g : Y \to X$ が $f : Y \to X$ の $\mathcal{U}$-近似であるとは、Y の各点 y について、$f(y)$ と $g(y)$ がともに $\mathcal{U}$ のある元に含まれることをいう。

1984 年に、J. Mogilski [19] によって、ℓ_2^f-多様体と $(\ell_2^f \times \mathbf{Q})$-多様体に対して、次のような位相的特徴付けが与えられた。

定理 2.1 (J. Mogilski [19])**.** 連結空間 X が ℓ_2^f-多様体である必要十分条件は、次を満たすことである*:*

(1) X は強可算次元、σ-コンパクトな ANR である*;*

(2) X は、有限次元コンパクト距離付け可能空間からなるクラスに対して強普遍性を持つ*;*

(3) X の有限次元コンパクト部分集合は強 Z-集合となる。

定理 2.2 (J. Mogilski [19])**.** 連結空間 X が $\ell_2^f \times \mathbf{Q}$-多様体である必要十分条件は、次を満たすことである*:*

(1) X は、σ-コンパクトな ANR である*;*

(2) X は、コンパクト距離付け可能空間からなるクラスに対して強普遍性を持つ*;*

(3) X のコンパクト部分集合は強 Z-集合となる。

空間 X が ANR であるとは、X を閉集合として含む任意の距離付け可能空間 Y に対して、X が Y のある近傍のレトラクトになることをいう。特に、X が Y のレトラクトになるとき、X を AR という。定理 2.1、2.2 は、2003 年に K. Sakai と M. Yaguchi [20] によって、非可分の場合に拡張された。

定理 2.3 (K. Sakai and M. Yaguchi [20]). 任意の無限濃度τに対して、連結空間Xが$\ell_2^f(\tau) \times \mathbf{Q}$-多様体である必要十分条件は、次を満たすことである*:*

(1) Xは強可算次元、σ-局所コンパクトで、稠密度がτのANRであり、強Z-集合の可算和で表される*;*

(2) Xは、強可算次元、局所コンパクトで、稠密度がτ以下の距離付け可能空間からなるクラスに対して強普遍性を持つ。

定理 2.4 (K. Sakai and M. Yaguchi [20]). 任意の無限濃度τに対して、連結空間Xが$\ell_2^f(\tau) \times \mathbf{Q}$-多様体である必要十分条件は、次を満たすことである*:*

(1) Xは、σ-局所コンパクトで、稠密度がτのANRであり、強Z-集合の可算和で表される*;*

(2) Xは、局所コンパクトで、稠密度がτ以下の距離付け可能空間からなるクラスに対して強普遍性を持つ。

一般に、より大きく複雑なクラスに対する強普遍性を示すことは難しい。講演者は、このSakaiとYaguchiの特徴付けの強普遍性に関する条件を弱めて、より適用しやすい特徴付けを与えた。そこで、次の概念を導入する。

定義 3. 濃度$n \leq \aleph_0$、τに対して、空間Xがτ-離散n-包体性を持つとは、次の条件を満たすときをいう*:*

- $f : \bigoplus_{\gamma<\tau} D_\gamma \to X$を$n$-立方体の位相和から$X$への写像とする。このとき、$X$の任意の開被覆$\mathcal{U}$に対して、$f$の$\mathcal{U}$-近似$g : \bigoplus_{\gamma<\tau} D_\gamma \to X$で、集合族$\{g(D_\gamma) \mid \gamma < \tau\}$が離散的となるものが存在する。

この性質を使い、$\ell_2^f(\tau)$-多様体に次のような位相的特徴付けを与えた。

定理 A (K. Koshino [16]). 任意の無限濃度τに対して、連結空間Xが$\ell_2^f(\tau)$-多様体となる必要十分条件は、次を満たすことである*:*

(1) Xは強可算次元、σ-局所コンパクトで、稠密度がτのANRである*;*

(2) Xは、すべての非負整数nに対してτ-離散n-包体性を持つ*;*

(3) X、有限次元コンパクト距離付け可能空間からなるクラスに対して強普遍性を持つ*;*

(4) Xの有限次元コンパクト部分集合は強Z-集合となる。

$(\ell_2^f(\tau) \times \mathbf{Q})$-多様体についても、同様の結果が得られた。

定理 2.5 (K. Koshino [16]). 任意の無限濃度τに対して、連結空間Xが$\ell_2^f(\tau) \times \mathbf{Q}$-多様体となる必要十分条件は、次を満たすことである*:*

(1) Xは、σ-局所コンパクトで、稠密度がτのANRである*;*

(2) Xは、すべての非負整数nに対してτ-離散n-包体性を持つ*;*

(3) X、有限次元コンパクト距離付け可能空間からなるクラスに対して強普遍性を持つ*;*

(4) X の有限次元コンパクト部分集合は強 Z-集合となる。

上記の二つの定理において、空間 X が AR の場合、モデル空間の $\ell_2^f(\tau)$ や $\ell_2^f(\tau) \times \mathbf{Q}$ そのものと同相になる。

3. 無限次元多様体の組

空間 X とその部分空間 Y の組を、(X, Y) と書くこととする。空間組 (X, Y) が (X', Y') と同相であるとは、X から X' への同相写像 $f : X \to X'$ で $f(Y) = Y'$ を満たすものが存在するときをいう。空間 X の部分空間 Y の位相的な埋め込まれ方を考えるとき、空間組 (X, Y) が既知の空間組と同相かどうかを調べることは有効である。空間組 (E, F) に対して、パラコンパクト空間の組 (X, Y) が (E, F)-多様体組であるとは、X の各点毎に、E のある開集合 V と同相な開近傍 U が存在し、$(U, U \cap Y)$ が $(V, V \cap F)$ と同相になるときをいう。R.D. Anderson [2] は、空間組 (ℓ_2, ℓ_2^f)、$(\ell_2 \times \mathbf{Q}, \ell_2^f \times \mathbf{Q})$ に対して、*f.d. cap*-集合と *cap*-集合と呼ばれる概念によって、ある位相的特徴付けを与えた。このことは、T.A. Chapman [8, 9] によって、(ℓ_2, ℓ_2^f)-多様体組と $(\ell_2 \times \mathbf{Q}, \ell_2^f \times \mathbf{Q})$-多様体組の特徴付けに拡張された。さらに、M. Bestvina と J. Mogilski [7] は、ℓ_2-多様体と $\mathbf{Q}$-多様体に吸収的集合という概念を導入し、これらは空間組に関する概念へと一般化された [3, 6]。一方、J.E. West [23] は 1970 年に、非可分 $(\ell_2(\tau), \ell_2^f(\tau))$-多様体組の位相的特徴付けを与えた。

定義 4. 空間組 (X, Y) に対して、Y が弱 $\mathcal{M}_0^f(X)$-吸収的であるとは、次の条件を満たすことである*:*

- A を X の有限次元コンパクト部分集合とし、B を Y に含まれる A の閉集合とする。このとき、X の任意の開被覆 $\mathcal{U}$ に対して、A の恒等写像の $\mathcal{U}$-近似 $f : A \to X$ が存在し、f は Y への埋め込みであり、B への制限について $f|_B = \mathrm{id}_B$ を満たす。

定理 3.1 (J.E. West [23])**.** 任意の無限濃度 τ に対して、空間組 (X, Y) が $(\ell_2(\tau), \ell_2^f(\tau))$-多様体組である必要十分条件は、次を満たすことである*:*

(1) X は、$\ell_2(\tau)$-多様体である*;*

(2) Y は強可算次元、σ-局所コンパクトである*;*

(3) Y は、弱 $\mathcal{M}_0^f(X)$-吸収的である。

これらの無限次元多様体組はある位相的な一意性を持つことから、無限次元トポロジーにおいて無限次元多様体組の研究は重要な位置を占める。例えば、$(\ell_2(\tau), \ell_2^f(\tau))$-多様体組はホモトピー型で分類される。

定理 3.2 (J.E. West [23])**.** 無限濃度 τ に対して、(X, Y) と (X', Y') が $(\ell_2(\tau), \ell_2^f(\tau))$-多様体組であるとする。このとき、$X$ と X'、または Y と Y' がホモトピー同値ならば、(X, Y) と (X', Y') は同相である。

$(\ell_2(\tau)\times\mathbf{Q},\ell_2^f(\tau)\times\mathbf{Q})$-多様体組に関しても、同様のことが成り立つ。

一般に、空間組 (X,Y) と (E,F) が与えられたとき、X が E-多様体、Y が F-多様体であったとしても、(X,Y) が (E,F)-多様体組であるとは限らない。そこで、次のような問が自然に立てられる。

問題 1. 空間組 (E,F) について、E-多様体 X と F-多様体 Y の組 (X,Y) は、いつ (E,F)-多様体組となり得るか？

$(\ell_2(\tau),\ell_2^f(\tau))$-多様体組や $(\ell_2(\tau)\times\mathbf{Q},\ell_2^f(\tau)\times\mathbf{Q})$-多様体組に関して、上の問いに対する次のような解が得られた。

定理 B (K. Koshino [16])**.** 任意の無限濃度 τ に対して、空間組 (X,Y) が $(\ell_2(\tau),\ell_2^f(\tau))$-多様体組であるための必要十分条件は、$X$ が $\ell_2(\tau)$-多様体であり、Y が $\ell_2^f(\tau)$-多様体であり、かつ Y が X の中でホモトピー稠密となることである。

定理 3.3 (K. Koshino [16])**.** 任意の無限濃度 τ に対して、空間組 (X,Y) が $(\ell_2(\tau)\times\mathbf{Q},\ell_2^f(\tau)\times\mathbf{Q})$-多様体組であるための必要十分条件は、$X$ が $\ell_2(\tau)\times\mathbf{Q}$-多様体であり、$Y$ が $\ell_2^f(\tau)\times\mathbf{Q}$-多様体であり、かつ Y が X の中でホモトピー稠密となることである。

ここで、空間 X の部分集合 Y がホモトピー稠密であるとは、X のホモトピー $h: X\times[0,1]\to X$ が存在し、X の各点 x について $h(x,0)=x$ であり、$h(X\times(0,1])\subset Y$ となることである。このことは、他のモデル空間では成り立たない。

注意. $\mathbf{Q}\times\ell_2$ と ℓ_2 は同相であり、$(-1,1)^{\aleph_0}\times\ell_2^f$ と $\ell_2\times\ell_2^f$ は同相であり、また、$(-1,1)^{\aleph_0}\times\ell_2^f$ は $\mathbf{Q}\times\ell_2$ の中でホモトピー稠密である。しかし、空間組 $(\mathbf{Q}\times\ell_2,(-1,1)^{\aleph_0}\times\ell_2^f)$ は $(\ell_2\times\ell_2,\ell_2\times\ell_2^f)$-多様体組とはならない。

4. 線形位相空間の凸集合

無限次元多様体論は、線形位相空間の凸集合の位相的分類に関する研究に遡り、これは現在でも無限次元トポロジーにおいて重要な問題の一つである。V. Klee [15]、T. Dobrowolski [11]、H. Toruńczyk [12, 13] らの研究成果から、次のことが成り立つ。

定理 4.1. C を線形位相空間の閉凸集合とする。このとき、C が可分、完備距離付け可能な AR であるならば、$[0,1]^n\times[0,1)^m\times(0,1)^k$ と同相になる。ここで、$0\le n,k\le\aleph_0$、$0\le m\le 1$ である。特に、C が無限次元でコンパクトの場合、ヒルベルト立方体 $\mathbf{Q}$ と同相になり、局所コンパクトでない場合、可分ヒルベルト空間 ℓ_2 と同相になる。

完備距離付け可能な局所凸線形位相空間のことを、フレッシェ空間と呼ぶ。無限次元フレッシェ空間は、稠密度の等しいヒルベルト空間と同相になることが知られている [1, 14, 22]。また、Dugundji の拡張定理によると、フレッシェ空間の凸集合は AR である。上記の定理 4.1 に加え、T. Banakh と R. Cauty [5] の研究結果から、フレッシェ空間の閉凸集合に対する、完全な位相的分類が与えられる。

定理 4.2 (T. Banakh and R. Cauty [5])**.** C をフレッシェ空間の閉凸集合とする。このとき、C は $[0,1]^n\times[0,1)^m\times\ell_2(\tau)$ と同相になる。ここで、$0\le n\le\aleph_0$、$0\le m\le 1$、$0\le\tau$ である。特に C が局所コンパクトでない場合、稠密度の等しいヒルベルト空間と同相になる。

D. Curtis、T. Dobrowolski、J. Mogilski [10] は、線形位相空間の F_σ-凸集合について研究し、次の結果を得た。

定理 4.3 (D. Curtis, T. Dobrowolski and J. Mogilski [10])**.** C を完備距離付け可能な線形位相空間の σ-コンパクト凸集合とする。また、C の閉包 $\overline{C}$ が AR であり、かつ局所コンパクトでないとする。このとき、C が強可算次元ならば、空間組 $(\overline{C}, C)$ は (ℓ_2, ℓ_2^f) と同相になり、C が無限次元局所コンパクト凸集合を含むならば、空間組 $(\overline{C}, C)$ は (ℓ_2, ℓ_2^Q) と同相になる。

講演者は、I. Banakh と T. Banakh との共同研究によって、この結果が非可分の場合にも同様に成り立つことを証明した。

定理 C (I. Banakh, T. Banakh and K. Koshino [4, 17])**.** C をフレッシェ空間の、稠密度が $\tau > \aleph_0$ である σ-局所コンパクト凸集合とする。$\overline{C}$ を C の閉包とする。このとき、C が強可算次元であることと、空間組 $(\overline{C}, C)$ が $(\ell_2(\tau), \ell_2^f(\tau))$ と同相になることは同値である。また、C ヒルベルト立方体と同相な部分集合を含むことと、空間組 $(\overline{C}, C)$ が $(\ell_2(\tau) \times \mathbf{Q}, \ell_2^f(\tau) \times \mathbf{Q})$ と同相になることは同値である。

この結果の応用として、充満単体複体の位相について述べたい。無限濃度 τ に対して、次の線形空間を考える:

$$\ell_1(\tau) = \left\{ x \in \mathbb{R}^\tau \;\middle|\; \sum_{\gamma \in \tau} |x(\gamma)| < \infty \right\}.$$

ここで、線形空間 $\ell_1(\tau)$ は、$\|x\|_1 = \sum_{\gamma \in \tau} |x(\gamma)|$ で定まるノルムによって、バナッハ空間になることが知られている。よって、$\ell_1(\tau) = (\ell_1(\tau), \|\cdot\|_1)$ はフレッシェ空間である。頂点の濃度が τ の単体複体 K に関して、K の頂点と $\ell_1(\tau)$ の単位ベクトルを一対一に対応させることで得られる K の幾何的実現を距離位相多面体と呼び、$|K|_m$ と表すこととする。ここで $|K|_m$ は、$\ell_1(\tau)$ のノルム $\|\cdot\|_1$ から導出される距離を持つ。頂点の濃度が τ の充満単体複体とは、どんな有限個の頂点も単体を張るような複体であり、$\Delta(\tau)$ と表される。この $\Delta(\tau)$ の距離位相多面体に関して、次が成り立つ。

系 4.4 (K. Koshino [16])**.** 任意の無限濃度 τ に関して、空間組 $(\overline{|\Delta(\tau)|_m}, |\Delta(\tau)|_m)$ は $(\ell_2(\tau), \ell_2^f(\tau))$ と同相である。ここで、$\overline{|\Delta(\tau)|_m}$ は $|\Delta(\tau)|_m$ の閉包とする。

参考文献

[1] R.D. Anderson, *Hilbert space is homeomorphic to the countable infinite product of lines*, Bull. Amer. Math. Soc. **72** (1966), 515–519.

[2] R.D. Anderson, *On sigma-compact subsets of infinite-dimensional spaces*, (unpublished).

[3] J. Baars, H. Gladdines and J. van Mill, *Absorbing systems in infinite-dimensional manifolds*, Topology Appl. **50** (1993), no. 2, 147–182.

[4] I. Banakh, T. Banakh and K. Koshino, *Topological structure of non-separable sigma-locally compact convex sets*, Bull. Pol. Acad. Sci. Math. **61** (2013), 149–153.

[5] T. Banakh and R. Cauty, *Topological classification of closed convex sets in Fréchet spaces* Studia Math. **205** (2011), no. 1, 1–11.

[6] T. Banakh, T. Radul and M. Zarichnyi, Absorbing Sets in Infinite-Dimensional Manifolds, Mathematical Studies Monograph Series **1**, VNTL Publishers, Lviv, 1996.

[7] M. Bestvina and J. Mogilski, *Characterizing certain incomplete infinite-dimensional absolute retracts*, Michigan Math. J. **33** (1986), 291–313.

[8] T.A. Chapman, *Four classes of separable, metric, infinite-dimensional manifolds*, Bull. Amer. Math. Soc. **76** (1970), 399–403.

[9] T.A. Chapman, *Dense sigma-compact subsets of infinite-dimensional manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **154** (1971), 399–426.

[10] D.W. Curtis, T. Dobrowolski and J. Mogilski, *Some applications of the topological characterizations of the sigma-compact spaces* ℓ_2^f *and* Σ, Trans. Amer. Math. Soc. **284** (1984), 837–846.

[11] T. Dobrowolski, *An extension of a theorem of Klee*, General topology and its relations to modern analysis and algebra, V (Prague, 1981), Sigma Ser. Pure Math. **3**, Heldermann, Berlin, 1983, 147–150.

[12] T. Dobrowolski and H. Toruńczyk, *On metric linear spaces homeomorphic to* ℓ_2 *and compact convex sets homeomorphic to* $\mathbf{Q}$, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. **27** (1979), 883–887.

[13] T. Dobrowolski and H. Toruńczyk, *Separable complete ANR's admitting a group structure are Hilbert manifolds*, Topology Appl. **12** (1981), 229–235.

[14] M.I. Kadec, *A proof the topological equivalence of all separable infinite-dimensional Banach spaces* (Russian), Funkcional Anal. i Priložen, **1** (1967), 61–70.

[15] V. Klee, *Some topological properties of convex sets*, Trans. Amer. Math. Soc. **78** (1955), 30–45.

[16] K. Koshino, *Characterizing non-separable sigma-locally compact infinite-dimensional manifolds and its applications*, J. Math. Soc. Japan, (to appear).

[17] K. Koshino, *The topological types of non-separable sigma-locally compact convex sets*, (preprint).

[18] K. Mine, *Universal spaces of non-separable absolute Borel classes*, Tsukuba J. Math. **30** (2006), 137–148.

[19] J. Mogilski, *Characterizing the topology of infinite-dimensional* σ*-compact manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. **92** (1984), 111–118.

[20] K. Sakai and M. Yaguchi, *Characterizing manifolds modeled on certain dense subspaces of non-separable Hilbert spaces*, Tsukuba J. Math. **27** (2003), 143–159.

[21] H. Toruńczyk, *On CE-images of the Hilbert cube and characterization of* $\mathbf{Q}$*-manifolds*, Fund. Math. **106** (1980), 31–40.

[22] H. Toruńczyk, *Characterizing Hilbert space topology*, Fund. Math. **111** (1981), 247–262.

[23] J.E. West, *The ambient homeomorphy of incomplete subspaces of infinite-dimensional Hilbert spaces*, Pacific J. Math. **34** (1970), 257–267.