

絡み目のアレクサンダー多項式の 零点の配置について

平澤 美可三 (名古屋工業大学)*¹
村杉 邦男 (トロント大学)

概 要

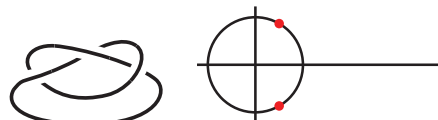
絡み目, 特に結び目について, そのアレクサンダー多項式の零点を複素平面上にプロットしてゆくと興味深い現象が見られる. 本講演では論文 [6],[7] に沿って現象の紹介や, 背景と応用, 零点の配置に関する事柄を証明する方法, 予想などについて解説し, 最近の研究によって得られた結果を発表する.

1. 導入

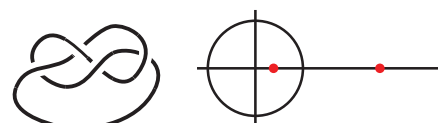
絡み目のアレクサンダー多項式は1928年に J.W. Alexander によって導入された. この多項式不変量については, 代数的, 幾何学的な様々な解釈 (再定義) がなされ, また様々な拡張も行われている. それに加え, アレクサンダー多項式には結び目, 絡み目の個性がうまく反映する状況が多数見いだされており, 研究課題としての興味は尽きない. 与えられた多項式について, それがある結び目か絡み目のアレクサンダー多項式になるかどうかは完全に判定できるが, 結び目のクラスを (例えば交代結び目や, 二橋結び目に) 限定した場合, そのクラスの中の結び目によって実現されるか否かの決定は未だに問題であり, 様々な研究がなされている.

本研究では, アレクサンダー多項式の係数よりも, むしろその零点の分布に注目することにする. 下はいくつかの結び目とそのアレクサンダー多項式および零点のプロットである. 円は単位円周であり, 零点との位置関係が重要になる.

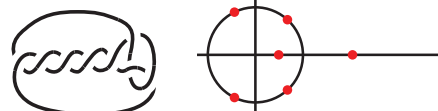
$$3_1: \quad t^2 - t + 1 = 0$$



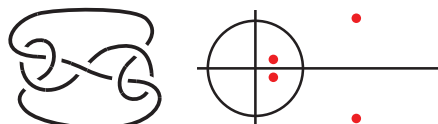
$$4_1: \quad t^2 - 3t + 1 = 0$$



$$8_2: \quad 1 - 3t + 3t^2 - 3t^3 + 3t^4 - 3t^5 + t^6$$



$$7_7: \quad 1 - 5t + 9t^2 - 5t^3 + t^4$$



本研究は科研費 (課題番号:25400086) の助成を受けたものである。

2010 Mathematics Subject Classification: 57M25, 57M27, 26C10

キーワード: knots and links, Alexander polynomial, distribution of zeros

*¹ 〒466-8555 名古屋市 昭和区御器所町 名古屋工業大学大学院 情報工学専攻

e-mail: hirasawa.mikami@nitech.ac.jp

2. アレクサンダー多項式の零点の配置と、絡み目の安定性

2.1. 零点による安定性の定義と背景

アレクサンダー多項式の零点 α が単位円周上にあるときには、単位円周上のもう一つの零点 $\bar{\alpha}$ と対になる。 α が実数のときにも対になって現れる。 α が実数でなく、単位円周上にないときには $\bar{\alpha}$ に加えて、 $1/\alpha$ と $1/\bar{\alpha}$ を伴って四つで一組になって現れる。これはアレクサンダー多項式の係数の対称性により α が零点ならば $1/\alpha$ も零点になるからである。

絡み目 L のアレクサンダー多項式 $\Delta_L(t)$ の零点の配置により、次の三種類の安定性を定義する。

定義 2.1 絡み目 L は、 $\Delta_L(t)$ の零点の配置に応じて次の様に呼ばれる。

- (1) 全ての零点が実数のとき、 *real stable* (*r-stable*).
- (2) 全ての零点が単位円周上にあるとき、 *circular stable* (*c-stable*).
- (3) 全ての零点が実数であるか、単位円周上にあるとき、 *bi-stable*.

絡み目の場合、アレクサンダー多項式は多変数で考える事ができるので、stability も以下の枠組みで捉えられる。しかし現状ではまだ一変数についての研究が始まったばかりである（多変数多項式の stability については D.G.Wagner の論説 [16] が詳しい）。 $\mathcal{H} \subset \mathbb{C}$ を複素平面内の開半平面で閉包が原点を含むものとする。 n 変数多項式 $f(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ は \mathcal{H} 内の任意の点列 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ に対して $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq 0$ であるとき、 \mathcal{H} -stable であるという。特に \mathcal{H} が右半平面 $\{\alpha \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(\alpha) > 0\}$ であるとき、 f は *Hurwitz-stable* といわれる。また \mathcal{H} が上半平面 $\{\alpha \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(\alpha) > 0\}$ のとき、 f は *stable polynomial* と呼ばれ、特に f が実係数多項式であるとき、 *real stable* と呼ばれる。定義から従う様に、 f が実一変数多項式のとき、 f が real stable であるとは、 f の零点が全て実数であることであり、 f が Hurwitz-stable であるとは、 f の全ての零点 α について、 $\text{Re}(\alpha) \leq 0$ となることである。 \leq を $<$ に置き換えられるとき *strongly Hurwitz-stable* という。この概念はシステムの安定性と関係して、制御工学などでも用いられる。strongly Hurwitz-stability の判定にはラウス・フルビッツの行列式やリアプノフの安定性理論が使われる。

結び目のアレクサンダー多項式に関する新たなタイプの予想として次が挙げられる。

Hoste 予想 (2002). 交代結び目 K のアレクサンダー多項式について、任意の零点の実部は -1 より大きい。即ち、 $\Delta_K(-(t+1))$ は strongly Hurwitz-stable である。

リアプノフの安定性理論によると、次が成り立つ。

定理 2.2 M を実多項式 f の同伴行列とする。そのとき次は同値である。

- (i) f が strongly Hurwitz-stable となる。
- (ii) 実正定値行列 V, W が存在して、 $VM + M^T V = -W$ となる。

応用として次が知られている。 [10] では多くの二橋結び目が Hoste 予想を満たすことが示され、また stability に関する定理もいくつか証明されている。

定理 2.3 [10] 二橋絡み目 (結び目) のアレクサンダー多項式の任意の定点 α について、 $-3 < \text{Re}(\alpha) < 6$ となる。

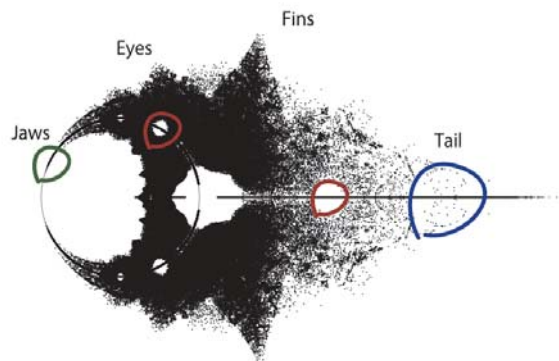
2.2. 零点の配置

Hoste の予想する零点の実部の下限 -1 に対し、実部の上限は存在しない。実際に任意の実数に対し、零点の実部がそれより大きくなる交代結び目を構成する事ができた (3.1節参照)。I.D.Jong は種数2の交代結び目について、アレクサンダー多項式の係数と結び目符号に関する不等式を証明している [3]。それらも鑑み、交代結び目については種数による零点の実部の上からの評価が予想される。

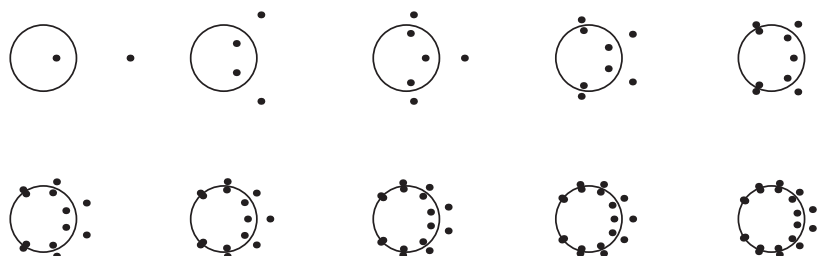
二橋結び目については、交代結び目でもあり、アレクサンダー多項式の公式もいくつか知られているにも関わらず、アレクサンダー多項式の特徴付けは未解決問題である。係数の性質としては、符号が交代し、次数が種数の二倍になり、定数項が最小種数ザイフェルト曲面をアニュラスのプラミングで表したときのフルツイストの個数の総積 (の絶対値) になる。また後でも述べる台形予想が Hartley [4] によって示され、中西-Suketa [13] の不等式も成り立つ。

問題. 二橋結び目のアレクサンダー多項式を特徴付けよ。

下図は20交点までの二橋結び目のアレクサンダー多項式の零点をプロットしたものである。特徴のある形に興味を引かれるが、似た様な形は他の結び目でも現れる。しかし零点の配置からも何らかの条件付けができると期待したい。



二橋結び目の内、どのようなクラスがヒレや目の周りの様な特徴ある形の部分に対応するのだろう。例えば $K = \underbrace{[2, 2, \dots, 2]}_n, \underbrace{[-2, -2, \dots, -2]}_n$ とするとき、 n の増加に伴って零点は下図の様に三日月型の中に細かく入ってゆくことが観察される。



二橋結び目が real stable や c -stable になる十分条件がだいぶ分かってきているが、3章で述べる様にそれを満たさなくても stable になる離散的な例が見つかっており完全決定には至っていない。

問題. real stable 又は c -stable な二橋結び目を特徴付けよ。

この章の残りでは安定性と、結び目理論のいくつかの概念との関連を述べる。

2.3. 実零点とアレクサンダー多項式の係数の関係

交代結び目のアレクサンダー多項式 $\Delta_K(t) = \sum_{j=0}^{2n} (-1)^j c_j t^{2n-j}$ について、次の台形予想が未だに未解決である。

台形予想. 交代結び目のアレクサンダー多項式の係数は次の様に台形をなす。

$$c_0 < c_1 < \cdots < c_k = c_{k+1} = \cdots = c_{2n-k} > c_{2n-k+1} \cdots > c_{2n}$$

台形予想は二橋結び目 [4] や多くの交代的代数結び目 [12] について証明されているがまだ限定的である。上の様になる数列を単峰 (unimodal) ともいう。[17] によると、real stable なアレクサンダー多項式は台形予想を満たすことがわかる。

グラフ理論でも単峰多項式が現れるが、2012年には永く予想されていた次が示された。

定理 2.4 [5]. グラフの彩色多項式の係数列は単峰である。

2.4. アレクサンダー多項式の零点と結び目符号の関係

結び目については符号と安定性に関する。

定理 2.5 real stable な結び目 K の符号 $\sigma(K)$ は 0 となる。

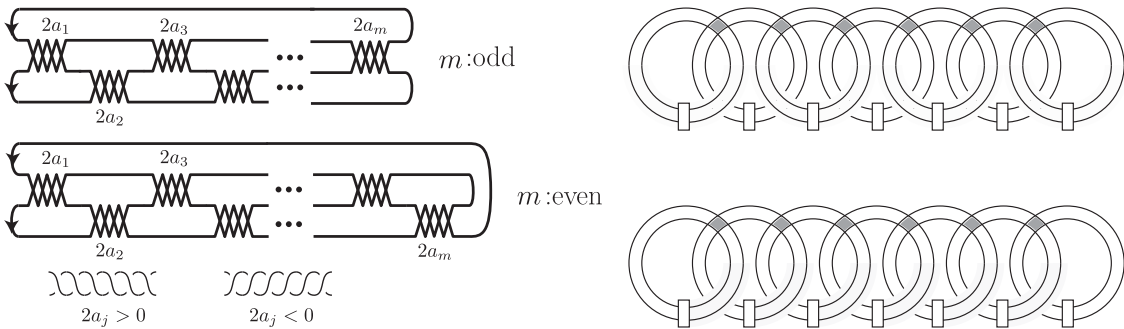
ミルナーの結果 [11] により、 $\sigma(K)$ が 0 でなければ単位円周上に少なくとも2つの零点が並ぶ。単位円周上の上半分を 1 から -1 まで動くとする。初期値を 0 として、単位円周上の零点を超える度に ± 2 だけ値が変わって行って、 -1 に到達したときの値が $\sigma(K)$ となる。しかし上の定理の逆は成り立たない。二橋結び目でも反例がある。また絡み目については定理自体が成り立たない。ここで述べたミルナーの原理は c -stable な結び目を量産するときにも用いた。

2.5. 実零点と結び目群の bi-orderability の関係

アレクサンダー多項式の real stability は結び目群 (結び目補空間の基本群) の bi-orderability と関連している (Clay-Rolfsen [2] 参照)。狭義全順序集合 G が left-orderable であるとは G の任意の元 f, g, h に対し、 $f < g$ ならば $hf < hg$ となることである。さらに右から h をかけても順序が保たれるとき G は bi-orderable であるという。Rolfsen らの結果によって任意の結び目群は left-orderable となる。 K をファイバー結び目とする。そのとき K が real stable であり、かつ零点が全て正ならば結び目群 $G(K)$ は bi-orderable になる [14]。逆に $G(K)$ が bi-orderable のとき、 $\Delta_K(t)$ はある正の実数を零点としてもつ [2]。 K のデーン手術で bi-orderable な基本群が生じるときも同様である [2]。しかしながら、これらの結果にはファイバー結び目であることが必要で、非ファイバー結び目については全くわからない状況である。こうした状況を詳しく見るためには交代または非交代な非ファイバー結び目で、real stable なものを大量にもっておくとよい。本研究ではその様なものを量産する方法を与えている。ちなみに、交代結び目のときには係数の符号が交代することから、実の零点は全て正になる。

3. 安定な結び目の具体例

3.1. 二橋結び目について



二橋結び目（絡み目）は上図左の様な標準形を持ち、捻りの個数を並べた数列によって表現される。例えば $3_1 = [2, 2], 4_1 = [2, -2]$ である。二橋絡み目の最小種数ザイフェルト曲面は上図右の二通りの張り方があり得るが、特に下部のものを用いると、ザイフェルト行列 M が次の様にとれ、アレクサンダー多項式と相性がよい。

$$M = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & & \cdots & & 0 \\ 0 & a_2 & 1 & & & \\ & 0 & a_3 & 1 & & \\ & & 0 & a_4 & 1 & \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 0 & a_{m-1} & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 & a_m \end{bmatrix} \quad \Delta_K(t) = \det(tM - M^T).$$

安定な二橋結び目については下記が典型的である。

命題 3.1 結び目 K を数列 $[2a_1, 2b_1, \dots, 2a_n, 2b_n]$ で表すとき、

- (i) $\forall a_i, b_i > 0 \Rightarrow K$ は c -stable.
- (ii) $\forall a_i > 0, b_i < 0 \Rightarrow K$ は r -stable.

しかし逆は成り立たず、次の例がある。ここで K が *strictly bi-stable* であるとは、 bi -stable であって、更に実の零点と単位円周上の零点を両方とも持つということである。実零点も単位零点ももたないとき、*totally unstable* という。

命題 3.2 [7, Propositions 8.1, 8.3] $a, b, c > 0$ とする。

- (i) $[2a, -2, -2b, 2c]$ に対し、 $bc > 2a(c+1) \Rightarrow K$ は r -stable.
- (ii) $[2a, 2b, -2b, -2a]$ に対し、 $a \geq 4b \Leftrightarrow K$ は r -stable.

命題 3.3 [7, Proposition 12.2] $K = [2, 2k, -2, -2]$ のとき、

- (i) $k < 0 \Leftrightarrow K$ は *strictly bi-stable*.
- (ii) $k = 1, 2, 3 \Leftrightarrow K$ は *totally unstable*.
- (iii) $k \geq 4 \Leftrightarrow K$ は c -stable.

定理 3.4 [7, Theorem 13.1] $K = [2a_1, 2a_2, \dots, 2a_{2m}, 2b_1, -2c_1, \dots, 2b_p, -2c_p]$, ただし各 $a_j, b_j, c_j > 0$ とする。そのとき K は bi -stable であり、実零点を $2p$ 個と単位零点を $2m$ 個もつ。

3.2. サーレムファイバー結び目

bi-stable な結び目の内、興味深いものにサーレムファイバー結び目がある。これは、bi-stable であって、かつ実零点が2つだけというものである。この場合には結び目の Mahler measure が最大実根で実現される。Mahler measure は零点の分布がどれだけ単位円周上から離れているかを計っている。プレツェル結び目 $P(-2, 3, 7)$ はサーレムファイバー結び目で、このアレクサンダー多項式の最大零点（の絶対値）1.1762... が Mahler measure の最小値であると予想されている（レーマー予想 [9]）。

二橋結び目の中では数列が複数個の 2 と唯一つの -2 から成るものはサーレムファイバー結び目になるが、それ以外は非常に稀である。[8] ではコンピュータ検索によって2つの二橋サーレムファイバー結び目が報告されている。 $[2, 2, \dots, 2, -2, -2, -2]$ と $[2, 2, \dots, 2, -2, \dots, -2]$ である。今回さらに三つを見つけた。 $[2, 2, \dots, 2, -2, 2, -2, -2]$, $[2, 2, \dots, 2, -2, -2, -2, 2]$, $[2, 2, \dots, 2, -2, \dots, -2, 2, 2, 2]$ がそうである。

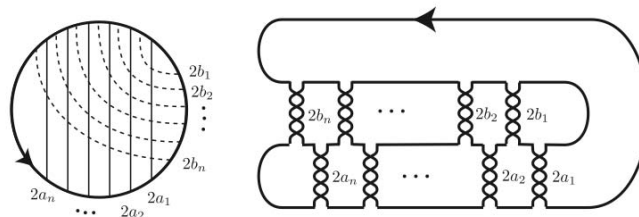
4. 安定結び目の構成

4.1. real stable な結び目の構成

結び目のザイフェルト曲面 M を使ったアレクサンダー多項式の表示を次の様に変形する。 $\Delta_K(t) = \det(tM - M^T) = \det M \det(tE - M^{-1}M^T)$. すると $\frac{\Delta}{\det M}$ は $N = M^{-1}M^T$ の固有多項式とみなせる。もし N が対称行列であれば全ての固有値が実数になり、それゆえ K は real stable になる。 M が正定値のブロックと負定値のブロックに分かれる状況では次が成り立つ。

命題 4.1 M を次の形の実正方行列とする、ただし A は正定値対称行列、 B は負定値対称行列、 H は任意とする。 $M = \begin{bmatrix} A & O \\ H & B \end{bmatrix}$ とする。そのとき、 $M^{-1}M^T$ は共役によって実対称行列にできる。

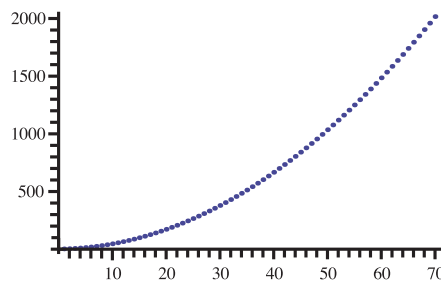
先に述べた標準形に置かれた二橋結び目は、連分数展開を經由して有理数に対応づけられる事から有理数結び目 (rational knot) とも呼ばれる。stable な結び目のクラスを構成するために、quasi-rational knots (link) を定義した。まず円板の表と裏にそれぞれ同じ側では交わらないアークを引き、偶数のウェイトを置く。quasi-rational 結び目とは、円板にアークに沿ってウェイト分だけ捻ったバンドを取り付けて得られる曲面の境界とする。二橋結び目は quasi-rational 結び目の簡単な場合になっている。quasi-rational 結び目の例として、下図の様にアークを引いた結び目を考える。



ウェイトを用いて次の様に表記する. $K = X(2a_1, 2a_2, \dots, 2a_n \mid 2b_1, 2b_2, \dots, 2b_n)$. K は上図右の様な形になる. これを X -type と呼ぶ. 例として, $X(2 \mid -2)$ は 4_1 , $X(2, 2 \mid -2, -2)$ は 8_{12} そして $X(2, 2, 2 \mid -2, -2, -2)$ は 12_{a0125} である. ウェイトが全て非零のとき, K がファイバー結び目になることは全てのウェイトが ± 2 であることと同値である. 上に述べた命題により次が示せる.

命題 4.2 全ての a_j が正, b_j が負ならば, X -type は r -stable な交代結び目になり, 台形予想を満たす.

先に [10] の結果で二橋結び目の零点 α については $-3 < \text{Re}(\alpha) < 6$ であることを述べたが, X -type の結び目の零点の実部には上限は存在しない. $X(2, \dots, 2 \mid -2, \dots, -2)$ について, 種数に応じて零点の最大実部をプロットすると次の様になる.



4.2. c -stable な結び目の構成

M を結び目 K ザイフェルト行列とすると, $M + M^T$ は実対称行列であり, その符号 $\sigma(M + M^T)$ はザイフェルト行列の選び方によらない K の不変量になる. 先に述べた Milnor の結果により, $\sigma(K) \leq \#(\text{単位円周上の零点})$ となる. それ故, $\sigma(K) = \deg \Delta_K(t)$ になれば, K は c -stable になる. 先に quasi-rational 結び目の例として挙げた X -type について, $X(2, 2, 2 \mid 2, 2, 2)$ は c -stable にならず, strictly bi-stable であるが, $X(4, 2, 2 \mid 2, 2, 2)$ は c -stable になる.

$\sigma(K)$ の性質を用いて様々な c -stable な結び目を構成できる. 特に任意のザイフェルト曲面から次の様にして c -stable な結び目が無限に得られる.

定理 4.3 F を結び目の任意なザイフェルト曲面とし, $\text{rank} H_1(F, \mathbb{Z}) = n$ とする. すると F 上に n 本の適切に埋め込まれた互いに交わらないアーク $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ で, $F \setminus \cup_i \alpha_i$ が円板になるものが取れる. ある自然数 N が存在して, F を各 α_j に沿って N 回以上捻って得られる曲面を \tilde{F} とすると, \tilde{F} の境界は c -stable な結び目になる. 最初の F が最小種数曲面でなくても, \tilde{F} は最小種数になる.

ザイフェルト曲面のバンドを捻って行くとアレクサンダー多項式の係数は激しく変化してゆくのだが, 零点は統制された形で移動してゆき, やがて単位円周上に並ぶ様子がコンピュータ実験によって確認できる. このことから, アレクサンダー多項式の係数だけを見るのではなく, 零点も考慮することが結び目の性質を調べるにあたって重要だと思われる. 一般の reciprocal な多項式について, 零点が全て単根で単位円周上に乗ることと同値な条件が [15] で与えられているが, 我々の現状ではまだ結び目の研究には使いこなせていない.

4.3. bi-stable な結び目の構成

アレクサンダー多項式 $\Delta_K(t)$ に対し, 補正多項式 $F(x)$ を次の様に構成する. まず $\Delta_K(t)$ に t の負ベキをかけて t と $1/t$ での値が等しくなる様にする. 次に $x = t + \frac{1}{t}$ と置き換えて x の多項式を得る. これはコンウェイ多項式 (z^2 の多項式) において, z^{2n} を $(x-2)^n$ に置き換えたものになっている. 例: $\Delta = t^6 - 3t^5 + 2t^4 - t^3 + 2t^2 - 3t + 1 \rightarrow t^3 - 3t^2 + 2 - 1 + 2\frac{1}{t} - 3\frac{1}{t^3} + \frac{1}{t^3} = t^3 + \frac{1}{t^3} - 3(t^2 + \frac{1}{t^2}) + 2(t + \frac{1}{t}) - 1 = (t + \frac{1}{t})^3 - 3(t + \frac{1}{t}) - 3((t + \frac{1}{t})^2 - 2) + 2(t + \frac{1}{t}) - 1 = x^3 - 3x^2 - x + 5$

ここで次が成りたつ.

定理 4.4 K が bi-stable $\Leftrightarrow F(x)$ が r -stable. そのとき, $\#(\Delta$ の実根の個数) = $2N$, ただし $N = \#(F(x)$ の実根 α で $|\alpha| \geq 2$ となるもの).

この定理により, 例えば先に命題 3.7 で述べた様に, $[2, 2k, -2, -2]$ の安定性が完全に決定できる.

5. 二つの多項式の零点が交互に並ぶ状況

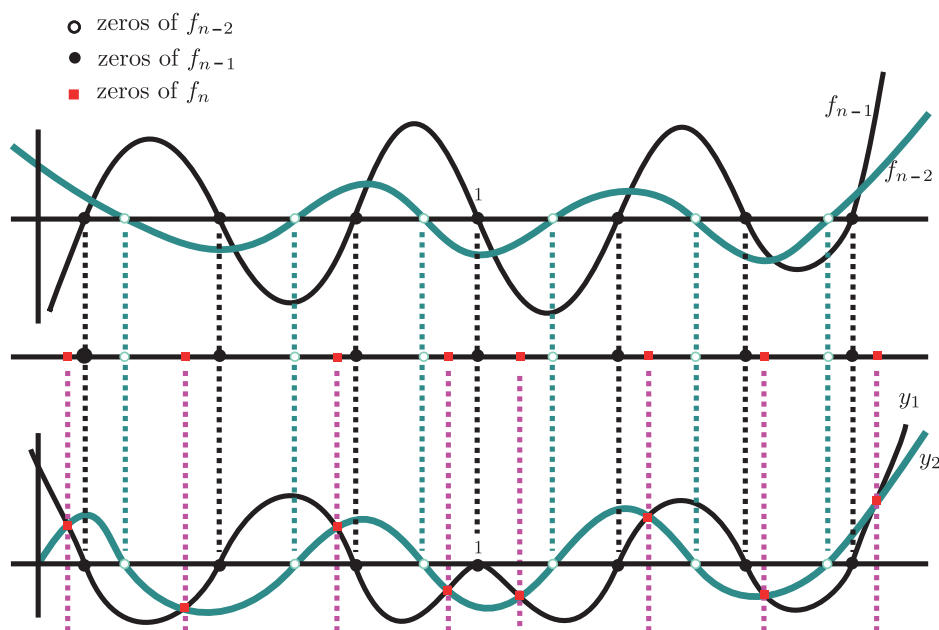
ここでは, 二つの多項式の零点が実軸上や単位円周上で交互に並ぶ状況に注目する. その性質を *interlacing property* と呼ぶ.

5.1. インターレースの具体例

例えば次が示せた.

定理 5.1 全ての $a_j > 0$ とし, $K = [2a_1, -2a_2, \dots, (-1)^{k-1}2a_k, \dots, (-1)^{n-1}2a_n]$, $K' = [2a_1, -2a_2, \dots, (-1)^{n-2}2a_{n-1}]$ とする. そのとき $\Delta_K(t)\Delta_{K'}(t)$ は単根のみで, $\Delta_K(t)$ と $\Delta_{K'}(t)$ の零点は実軸上で交互に並ぶ.

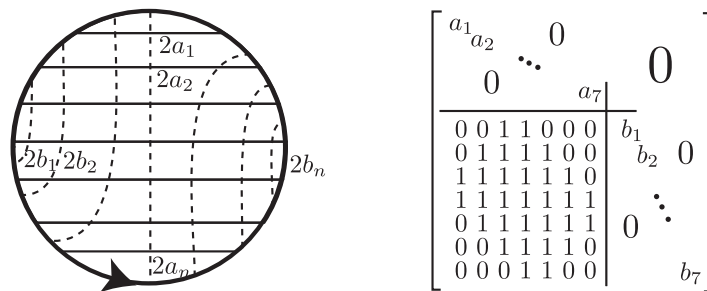
証明は n に関する帰納法を使い, 三つの多項式を同時に扱う. 鍵になるのは, 次の図の様に二つの interlacing な多項式のグラフの交わりとして第三の多項式の零点を interlace させることにある.



これに似た議論を使って, real stable な多項式のファミリーの最大零点を求めて行く事も出来る. 先に種数による最大零点の上からの評価を予想したが, それがファイバー結び目によって実現される様に思われる状況がある.

5.2. ゆるい interlacing property をもつ結び目たち

上の議論は単根をもつ多項式に関するものであったが, 重根をもったりわずかに欠けているところを補正して interlacing property を論じることにもできる. 3.1 で quasi-rational 結び目の例として, X -type のファミリーを紹介したが, もうひとつ Y -type のファミリーを導入する. $Y(2a_1, 2a_2, \dots, 2a_{2n+1} \mid 2b_1, 2b_2, \dots, 2b_{2n+1})$ は下図左のようにアークを引いて得られるファミリーである. 右には $n=3$ のときのザイフェルト行列を載せた.



$Y(2 \mid -2)$ は 4_1 , $Y(2, 2, 2 \mid -2, -2, -2)$ は $12_{a_{1124}}$ である. 全ての a_j が正で, b_j が負ならば Y -type は real stable な交代結び目で台形予想を満たす.

12交点までの交代結び目で, 零点の最大実部が6を超えるものはただ二つ, $12_{a_{0125}}$ と $12_{a_{1124}}$ である. X -type と Y -type はそれらを含む列を構成する様に作ったものである. これらを使って交代結び目で零点の最大実部が発散する例が構成できた.

interlacing property を使って bi-stable な結び目を構成することもできる. 結び目符号の議論を使って, 単位円周上に必要個数の零点があることを示し, interlacing property を使って, 残りの零点が実軸上にあることを示す方法による.

6. まとめ

結び目のアレクサンダー多項式の零点の配置に注目することで, 様々な面白い現象が見つかった. 零点の性質は結び目理論の様々な概念とうまく結びついている. 証明するための新しい手法が開発でき, さらに広いクラスが扱える様になってきている. この研究はまだ始まったばかりであり, 更に深化すると期待している.

参考文献

- [1] J.W. Alexander, *Topological invariants of knots and links*, Trans. Amer. Math. Soc. 30 (1928) 275–306.
- [2] A.Clay and D.Rolfsen, *Ordered groups, eigenvalues, knots, surgery and L-spaces*, Math. Proc. Camb. Phill. Soc. 152 (2012) 115–129.
- [3] I.D.Jong, *Alexander polynomials of alternating knot of genus two II*, J. Knot theory Ramifications 19 (2010) 1075–1092.
- [4] R.Hartley, *On two-bridged knots polynomials*, J. Austral. Math. Soc. Ser A 28 (1979), 241–249.

- [5] June Huh, *Milnor numbers of projective hypersurfaces and the chromatic polynomial of graphs*, J. Amer. Math. Soc. 25 (2012) 907–927.
- [6] M.Hirasawa and K.Murasugi, *On stability of Alexander polynomials of knots and links (Survey)*, Proc. of Knots in Poland III, 2010, Banach Center Publications vol 100, 2013 Poland.
- [7] ———, *Various stabilities of the Alexander polynomials of knots and links*, arXiv:1207.1578 (2013) 92pages.
- [8] E. Hironaka, *Salem-Boyd sequences and Hopf plumbing*, Osaka J. Math. 43 (2006) 497–516.
- [9] D. Lehmer, *Factorization of certain cyclotomic functions*, Ann. of Math. 34 (1933), 461–479.
- [10] L.Lyubich and K.Murasugi, *On zeros of the Alexander polynomial of an alternating knot*, Topology Appl. 159 (2012) 290–303.
- [11] J.Milnor, *Infinite cyclic covers*, In Conf. Topology of 3-manifolds 1968 (ed.J.G.Hocking), Boston-London-Sydney: Prindle, Webber and Schmdit. 115–133.
- [12] K. Murasugi, *On the Alexander polynomial of alternating algebraic knots*, J. Austral. Math. Soc. Ser A 39 (1985), 319–333.
- [13] Y.Nakanishi and M.Suketa, *Alexander polynomials of two-bridge knots*, J. Austral. Math. Soc. Ser A 60 (1996) 334–342.
- [14] B.Perron and D.Rolfsen, *On orderability of fibred knot group*, Math. Proc. Camb. Phill. Soc. 135 (2003) 147–153.
- [15] M.Suzuki, *An inverse problem for a class of canonical systems and its applications to self-reciprocal polynomials*, arXiv:1308.0228 (2013)
- [16] D.G.Wagner, *Multivariate stable polynomials: Theory and Applications*, Bull. Amer. Math. Soc. 48 (2011) 53–84.
- [17] H.S.Wilf, *Generatingfunctionology*, Academic Press, 1990.