微分空間のホモトピー論とその周辺について

原口　忠之（大分工業高等専門学校）

1　序

可微分多様体は，いうまでもなく，位相幾何学および微分幾何学において極めて重要な役割を果たす研究対象である。しかしながら，極限・余極限に関して閉じていないという事実からも見て取れるように，可微分多様体の圏は圏論的な取扱いが難しい対象である．本講演で紹介する微分空間は，多様体の圏がもつそのような不便さを解消するために導入された枠組みの一つであり，今後の発展が期待される研究対象である．1977 年に Chen[1] によって微分空間の起源となる”Chen space”が紹介されたのが始まりであり，1980 年に Souriau[8] によって微分空間は初めて定義された．その後，Zemmour[6] をはじめ多くの研究者によって，微分空間の基礎が整備された．とくに，微分空間は可微分多様体を一般化した空間であり，位相空間との間には深い関係性がある．また，微分空間の圏 **Diff** は極限・余極限に関して閉じており，デカルト閉圏であることが知られている．

さて，位相空間の圏 **Top** は有限生成モデル構造を持つ [5] ことが知られているが，圏 **Top** と密接に関連する圏 **Diff** がモデル構造を持つことは知られていない．島川和久氏との共同研究により，圏 **Diff** は有限生成モデル構造を持ち，圏 **Diff** と圏 **Top** のそれぞれのモデル構造の関係は Quillen 随

伴であることを証明した [4]．また，微分空間と密接な関係を持つ数値的生成空間とよばれる位相空間を定義する．数値的生成空間からなる圏 **Top** の充満部分圏を **NG** とするとき，圏 **NG** は極限・余極限で閉じており，デカルト閉圏であることが知られている [7]．圏 **NG** にも有限生成モデル構造を導入することができ，圏 **Top** の有限生成モデル構造と Quillen 同値であることを証明した [3].

本講演では，主に圏 **Diff** でホモトピー論を展開するために必要となる微分空間の基本的な性質を紹介すると同時に，圏 **Top** との関係性について触れる．

2　微分空間

この節では，微分空間の基本的な性質について説明する．詳細は [6] に記載されている．

定義 2.1 ([6, 1.5])**.** X を集合とし，D_X をユークリッド空間の開集合から X への写像からなる集合とし，D_X の元を X のプロットとよぶ．D_X が次の 3 つの条件を満たすとき，(X, D_X) を微分空間，D_X を X の微分構造とよぶ.

- **D1.** ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ から X の任意の元 x への定値写像 $C_x\colon \mathbf{R}^n \to X$ は，D_X に属する．
- **D2.** ユークリッド空間の開集合 U から X への任意の写像を $P\colon U \to X$ とする．U の任意の元 r に対して，ある開近傍 V_r が存在して，制限写像 $P|V_r$ が D_X に属するならば，P も D_X に属する．
- **D3.** D_X の任意の元 $P\colon U \to X$ と，ユークリッド空間の開集合の間の任意の無限回微分可能写像 $Q\colon W \to U$ に対して，合成写像 $P \circ Q$ は D_X に属する．

例 2.2. ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ の標準微分構造 $D_{\mathbf{R}^n}$ をユークリッド空間の任意の開集合から $\mathbf{R}^n$ への滑らかな写像全体からなる集合と定めるとき，**D1**. $\sim$ **D3**. の条件を満たすことは，明らかである．この微分空間 $(\mathbf{R}^n, D_{\mathbf{R}^n})$ を標準微分空間とよぶ.

定義 2.3. X と Y を微分空間とする．写像 $f\colon X \to Y$ が滑らかであるとは，X の任意のプロット $P\colon U \to X$ に対して，合成写像 $f \circ P\colon U \to Y$ が Y のプロットになるときをいう．さらに，f が微分同相であるとは，f が全単射で逆写像 f^{-1} も滑らかな写像であるときをいう.

ここで，対象を微分空間，射を滑らかな写像で定める圏を **Diff** とする．以下のことから，圏 **Diff** は極限・余極限に関して閉じている.

部分空間　A を微分空間 X の部分集合とする．$P\colon U \to A$ が，A のプロットであるとは，包含写像 $j\colon A \to X$ と P の合成写像 $j \circ P$ が X のプロットになるときをいう.

直積　X_λ を微分空間とする．$P\colon U \to \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ が直積 $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ のプロットであるとは，任意の $\lambda \in \Lambda$ と射影 $p_\lambda\colon \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \to X_\lambda$ に対して，合成写像 $p_\lambda \circ P$ が X_λ のプロットになるときをいう.

直和　X_λ を微分空間とする．$P\colon U \to \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ が直和 $\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ のプロットであるとは，任意の $r \in U$ に対して，r の開近傍 V_r とある X_λ のプロット $Q\colon V_r \to X_\lambda$ が存在して，$P|V_r = j_\lambda \circ Q$ を満たすときをいう．ただし，$j_\lambda\colon X_\lambda \to \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ を包含写像とする.

商空間　微分空間 (X, D_X) から集合 Y への全射な写像を $\pi\colon X \to Y$ とする．π によって生成される Y の商微分構造を $\pi_*(D_X)$ とし，$(Y, \pi_*(D_X))$ を商微分空間とよび，π を商写像とよぶ．$P\colon U \to Y$ が $\pi_*(D_X)$ に関する Y のプロットであるとは，任意の $r \in U$ に対して，r の開近傍 V_r と X のプロット $Q\colon V_r \to X$ が存在して，$P|V_r = \pi \circ Q$ を満たすときをいう.

命題 2.4 ([6, 1.51])**.** $\pi\colon X \to Y$ を商写像，$f\colon X \to Z$ を滑らかな写像とする．このとき，$g \circ \pi = f$ を満たすような写像 $g\colon Y \to Z$ は滑らかな写像となる．

X, Y を微分空間とする．X から Y への滑らかな写像全体からなる集合を $C^\infty(X,Y)$ とする．次のようにして，$C^\infty(X,Y)$ に写像微分構造 D_{C^∞} を導入する．$P\colon U \to C^\infty(X,Y)$ が D_{C^∞} に関する $C^\infty(X,Y)$ のプロットであるとは，X の任意のプロット $Q\colon V \to X$ に対して，合成写像

$$U \times V \xrightarrow{P\times Q} C^\infty(X,\ Y) \times X \xrightarrow{ev} Y$$

が Y のプロットになるときをいう．ただし，$ev\colon C^\infty(X,Y) \times X \to Y$ を $ev(f,\,x) = f(x)$ と定める．また，微分空間対 $(X,\,(X_\lambda))$, $(Y,\,(Y_\lambda))$ に対して, 空間対の間の滑らかな写像全体からなる集合 $C^\infty((X,\,(X_\lambda)),\,(Y,\,(Y_\lambda)))$ は $C^\infty(X,\,Y)$ の部分空間と考える．このとき，次の結果を得ることから，圏 **Diff** はデカルト閉圏である．

定理 2.5 ([6, 1.60])**.** X, Y, Z を微分空間とするとき，写像空間 $C^\infty(X,\,C^\infty(Y,\,Z))$ と $C^\infty(X \times Y,\,Z)$ は微分同相になる．

3　微分空間のホモトピー群

この節では，微分空間のホモトピー群を定義し，簡単な性質について触れる．詳細は [4] に記載している．$I = [0,1]$ を単位区間とする．$\mathbf{R}$ から I への滑らかな写像で，$\lambda|_{(-\infty,\,0]}(t) = 0$, $\lambda|_{[1,\,\infty)}(t) = 1$ であり，$(0,\,1)$ 上で単調増加であるような関数 $\lambda\colon \mathbf{R} \to I$ が存在する．λ によって生成される集合 I の商微分構造を $\lambda_*(D_{\mathbf{R}})$ とする．この商微分空間 $(I,\,\lambda_*(D_{\mathbf{R}}))$ を $\tilde{I}$ で表す．また，標準微分空間 $\mathbf{R}$ の部分空間として I を考えるときは，単に I と表す．

$X,\ Y$ を微分空間とする．滑らかな写像 $f_0,\ f_1\colon X \to Y$ に対して，f_0 と f_1 がホモトピックであるとは，あるホモトピー $H\colon X \times I \to Y$ が存在して，$H(x,0) = f_0(x),\ H(x,1) = f_1(x)$ を満たすときをいい，$f_0 \simeq f_1$ と書く．滑らかな写像 $f\colon X \to Y,\ g\colon Y \to X$ が存在して，

$$f \circ g \simeq 1_X\colon X \to X,\ g \circ f \simeq 1_Y\colon Y \to Y$$

を満たすとき，X と Y はホモトピー同値とよび，$X \simeq Y$ と書く．I と $\tilde{I}$ は微分同相ではないが，ホモトピー同値となる．さらに，次の命題を得る．

命題 3.1. $f_0,\ f_1\colon X \to Y$ を滑らかな写像とする．このとき，次の 3 つの条件は同値である．

1. ある滑らかな写像 $F\colon X \times \mathbf{R} \to Y$ が存在して，$F(x,0) = f_0(x),\ F(x,1) = f_1(x)$ を満たす．
2. f_0 と f_1 はホモトピックである．
3. ある滑らかな写像 $F\colon X \times \tilde{I} \to Y$ が存在して，$F(x,0) = f_0(x),\ F(x,1) = f_1(x)$ を満たす．

f_0 と f_1 のホモトピーを $F\colon X \times I \to Y$，f_1 と f_2 のホモトピーを $G\colon X \times I \to Y$ とする．このとき，$F * G\colon X \times I \to Y$ を

$$F * G(x,\,t) = \begin{cases} F(x,\,\lambda(3t)) & 0 \leq t \leq \dfrac{1}{2} \\ G(x,\,\lambda(3t-2)), & \dfrac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

と定めると，$F * G$ は滑らかな写像となる．したがって，$\simeq$ は $C^\infty(X,Y)$ における同値関係となる．なお，関係 $\simeq$ に関する同値類をホモトピー類とよび，$C^\infty(X,Y)$ におけるホモトピー類の全体を $[X,Y]$ と書く．また，微分空間対 $(X,(X_\lambda)),\ (Y,(Y_\lambda))$ に対して，$C^\infty((X,(X_\lambda)),(Y,(Y_\lambda)))$ におけるホモトピー類の全体を $[X,(X_\lambda)\,;Y,(Y_\lambda)]$ と書く．

定義 3.2. 微分空間 X の点 x, y に対して，$\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$ を満たすような滑らかな写像 $\gamma\colon I \to X$ が存在するとき，$x \sim y$ で表す．関係 $\sim$ は X に関する同値関係となる．この同値関係による同値類の全体を $\pi_0 X$ と書く．

定理 2.5 によって，次の命題を得る．

命題 3.3. 微分空間対 $(X, (X_\lambda))$, $(Y, (Y_\lambda))$ に対して，集合として $[X, (X_\lambda); Y, (Y_\lambda)]$ と $\pi_0 C^\infty((X, (X_\lambda)), (Y, (Y_\lambda)))$ は同型である．

ここで，特別な微分構造をもつ球体 $\tilde{D}^n$，球面 $\tilde{S}^{n-1}$ を定める．任意の $n \geq 0$ に対して，$\tilde{D}^n$ を単位 n 次球面 $S^n \subset \mathbf{R}^{n+1}$ の上半球面とし，

$$\tilde{D}^n = \{(v_1, \cdots, v_{n+1}) \in S^n \mid v_{n+1} \geq 0\}$$

と表す．全射な写像 $q_n\colon \tilde{D}^n \times \mathbf{R} \to \tilde{D}^{n+1}$ を

$$q_n\,(v_1,\ \cdots, v_n, v_{n+1}, t) = (v_1,\ \cdots, v_n, v_{n+1}\mathrm{cos}\pi\lambda(t), v_{n+1}\mathrm{sin}\pi\lambda(t))$$

と定める．$q_1(t) = (\mathrm{cos}\pi\lambda(t), \mathrm{sin}\pi\lambda(t))$ で定まる全射な写像 $q_1\colon \mathbf{R} \to \tilde{D}^1$ によって，生成される商微分構造を $\tilde{D}^1$ に導入する．このとき，$\tilde{I}$ と $\tilde{D}^1$ は微分同相になる．ここで，写像 $q_{n-1}\colon \tilde{D}^{n-1} \times \mathbf{R} \to \tilde{D}^n$ によって，生成される商微分構造を $\tilde{D}^n$ に帰納的に導入する．さらに，集合 S^{n-1} に $\tilde{D}^n$ の部分微分構造を導入した空間を $\tilde{S}^{n-1}$ で表す．q_n を $\tilde{D}^n \times \{0\} \cong \tilde{D}^n$ に制限する写像は包含写像 $\tilde{D}^n \to \tilde{D}^{n+1}$ と一致することがわかる．その一方で q_n を $\tilde{D}^n \times \{1\} \cong \tilde{D}^n$ に制限する写像は，$\tilde{S}^n$ の下半球面

$$\tilde{D}^n_- = \{(v_1, \cdots v_{n+1}) \in \tilde{S}^n \mid v_{n+1} \leq 0\}$$

に移す．明らかに，$\tilde{D}^n \cap \tilde{D}^n_- = \tilde{S}^{n-1}$ が成り立つ．

補題 3.4. $\tilde{D}^n$ と $\tilde{D}^n_-$ は $\tilde{D}^{n+1}$ への滑らかな変位レトラクトである．

定義 3.5. 基点つき微分空間 (X, x_0) の n 次元ホモトピー群 $\pi_n(X, x_0)$ を

$$\pi_n(X, x_0) = \pi_0 C^\infty((\tilde{D}^n, \tilde{S}^{n-1}), (X, x_0))$$

と定める．同様に，基点つき微分空間対 $(X,\, A,\, x_0)$ の n 次元ホモトピー群 $\pi_n(X,\, A,\, x_0)$ を

$$\pi_n(X,\, A,\, x_0) = \pi_0 C^\infty((\tilde{D}^n,\, \tilde{S}^{n-1},\, \tilde{D}^{n-1}_-),\, (X,\, A,\, x_0))$$

と定める．また，任意の滑らかな写像 $f\colon (X,\, A,\, x_0) \to (Y,\, B,\, y_0)$ は，群準同型写像

$$f_*\colon \pi_n(X,\, A,\, x_0) \to \pi_n(Y,\, B,\, y_0)$$

を誘導する．ここで，微分空間の間の滑らかな写像 $f\colon X \to Y$ が，各 $n \geq 0$ に対して，全単射

$$f_*\colon \pi_n(X,\, x_0) \to \pi_n(Y,\, f(x_0))$$

を誘導するとき，弱ホモトピー同値写像とよぶ．

$(X,\, A,\, x_0)$ を基点つき微分空間対とする．準同型写像

$$i_*\colon \pi_n(A,\, x_0) \to \pi_n(X,\, x_0),\ j_*\colon \pi_n(X,\, x_0) \to \pi_n(X,\, A,\, x_0)$$

を包含写像 $i\colon (A,\, x_0) \to (X,\ x_0),\ j\colon (X,\, x_0,\, x_0) \to (X,\, A,\, x_0)$ によって誘導される写像とする．$n \geq 1$ に対して，

$$\Delta\colon \pi_n(X,\, A,\, x_0) \to \pi_{n-1}(A,\, x_0)$$

を $\phi\colon (\tilde{D}^n,\, \tilde{S}^{n-1},\, \tilde{D}^{n-1}_-) \to (X,\, A,\, x_0)$ のホモトピー類を，その制限

$$\phi|\tilde{D}^{n-1}\colon (\tilde{D}^{n-1}, \tilde{S}^{n-2}) \to (A,\, x_0)$$

のホモトピー類へ移す写像とする．Δ は $n \geq 2$ のとき群準同型である．補題 3.4 を用いて，位相空間のときと同様にすると，次の結果を得る．

命題 3.6. $(X,\, A,\, x_0)$ を基点つき微分空間対とする．このとき，次の完全系列を得る．

$$\cdots \to \pi_{n+1}(X,\, A,\, x_0) \xrightarrow{\Delta} \pi_n(A,\, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X,\, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X,\, A,\, x_0) \to$$
$$\cdots \to \pi_1(X,\, A,\, x_0) \xrightarrow{\Delta} \pi_0(A,\, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_0(X,\, x_0)$$

4　微分空間の圏のモデル構造と位相空間，数値的生成空間の圏のモデル構造との関係性

位相空間の圏は，モデル構造をもつ [2] ことが知られている．この節では，数値的生成空間 [7] からなる位相空間の圏の充満部分圏を定義し，この圏のモデル構造を紹介する [3]．さらに，微分空間の圏にモデル構造を導入し，圏 **Top** のモデル構造の関係性について触れる．

微分空間の圏 **Diff** と位相空間の圏 **Top** の間の関手を定める．(X, D_X) を微分空間とする．X の部分集合 A が D-開集合であるとは，X の任意のプロット $P\colon U \to X$ に対して，逆像 $P^{-1}(A)$ が U の開集合になるときをいう．D-開集合からなる族を $T(D_X)$ とすると，これは位相の公理を満たす．このとき，$(X, T(D_X))$ を D-位相空間とよび，これを TX とかく．また，滑らかな写像 $f\colon X \to Y$ に対して，$T(f)\colon TX \to TY$ は連続写像になる．したがって，微分空間 X を位相空間 TX に移す関手 $T\colon \mathbf{Diff} \to \mathbf{Top}$ を得る．

(X, O_X) を位相空間とする．ユークリッド空間の任意の開集合から X への連続写像全体からなる集合を $D(O_X)$ とすると，微分構造の公理を満たす．このとき，$(X, D(O_X))$ を D-微分空間とよび，これを DX とかく．連続写像 $f\colon X \to Y$ に対して，$D(f)\colon DX \to DY$ は滑らかな写像になる．よって，位相空間 X を微分空間 DX に移す関手 $D\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{Diff}$ を得る．これらの関手の間には次のような関係がある．

命題 4.1 ([7, 3.1])**.** 関手 $T\colon \mathbf{Diff} \to \mathbf{Top}$ は関手 $D\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{Diff}$ の左随伴関手である．

次に数値的生成空間を定義する．$\nu = TD$ とする．位相空間 X が νX と同相であるとき，X を数値的生成空間とよぶ．数値的生成空間からな

る圏 $\mathbf{Top}$ の充満部分圏を $\mathbf{NG}$ で表す．X を位相空間とするとき，νX と $\nu(\nu X)$ は同相になるため，関手 $\nu\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{NG}$ を得る．このとき，包含関手 $i\colon \mathbf{NG} \to \mathbf{Top}$ は関手 ν の左随伴関手になる．

命題 4.2 ([7, 4.4])**.** 任意の CW 複体は，数値的生成空間となる．

$n \geq 0$ に対して，n 次元球面 S^{n-1} から n 次元球体 D^n への包含写像全体からなる集合を I' とする．$I = [0, 1]$ を単位区間とし，$n \geq 0$ に対して，$I^n \times \{0\}$ から $I^n \times I$ への包含写像全体からなる集合を J とする．位相空間の間の連続写像 $f\colon X \to Y$ は，各 $n \geq 0$ に対して，全単射

$$f_*\colon \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, f(x_0))$$

を誘導するとき，弱ホモトピー同値写像であるという．弱ホモトピー同値写像の射のクラスを $W_{\mathbf{Top}}$ とする．このとき，次の結果が知られている．

定理 4.3 ([5, 2.4.19])**.** 圏 $\mathbf{Top}$ は，I' を *generating cofibration*，J を *generating trivial cofibration*，$W_{\mathbf{Top}}$ を *weak equivalence* の射のクラスとする有限生成モデル構造 *(cofibrantly generated model structure)* をもつ．

次に，圏 $\mathbf{NG}$ のモデル構造を紹介する．命題 4.2 より，射のクラス I'，J は，圏 $\mathbf{NG}$ に含まれる．さらに数値的生成空間にホモトピー群を定義できる．数値的生成空間の間の弱ホモトピー同値写像の射のクラスを $\mathbf{W}_{\mathbf{NG}}$ とする．このとき，次の結果を得る．

定理 4.4 ([3, 3.3])**.** 圏 $\mathbf{NG}$ は, I' を *generating cofibration*, J を *generating trivial cofibration*，$W_{\mathbf{NG}}$ を *weak equivalence* の射のクラスとする有限生成モデル構造を持つ．さらに，$(i, \nu)\colon \mathbf{NG} \to \mathbf{Top}$ は *Quillen* 同値になる．

圏 $\mathbf{Diff}$ のモデル構造について述べる．各 $n \geq 0$ に対して，$\tilde{S}^{n-1}$ から $\tilde{D}^n$ への包含写像全体からなる集合を I'_D とし，$\tilde{D}^n$ から $\tilde{D}^{n+1}$ への包含写像全体からなる集合を J_D とする．弱ホモトピー同値写像の射のクラスを

$\mathbf{W}_{\mathbf{Diff}}$ とする．このとき，次の結果を得る．

定理 4.5 ([4, 5.1])**.** 圏 **Diff** は，I'_D を *generating cofibration*，J_D を *generating trivial cofibration*，$W_{\mathbf{Diff}}$ を *weak equivalence* の射のクラスとする有限生成モデル構造を持つ．

命題 4.6. (T, D): **Diff** $\to$ **Top** は *Quillen adjunction* である．

参考文献

[1] K. T. Chen. Iterated path integrals. Bull. Amer. Math. Soc., 83(5):831-879, 1977. ISSN 0002-9904.

[2] W. G. Dwyer and J. Spalinski. Homotopy theories and model categories, Handbook of Algebraic Topology, Elsevier, 1995, 73-126.

[3] Tadayuki Haraguchi, On model structure for coreflective subcategories of a model category, arXiv:1304.3622.

[4] T. Haraguchi and K. Simakawa, A model structure on the category of diffeological spaces, arXiv:1311.5668.

[5] M. Hovey, Model categories, Mathematical Surveys and Monographs, 63, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.

[6] P. Iglesias-Zemmour, Diffeology, CNRS, Marseille, France, and The Hebrew University of Jerusalem, Israel.

[7] K. Shimakawa, K. Yoshida, and T. Haraguchi, Homology and cohomology via bifunctors, arXiv:1010.3336v1.

[8] J.-M. Souriau. Groupes differentiels. In Differential geometrical methods in mathematical physics (Proc. Conf., Aix-en-Provence/Salamanca, 1979) , volume 836 of Lecture Notes in Math. , pages 91-128. Springer, Berlin, 1980.