

## Lefschetz ファイバー空間へのチャートの応用について

遠藤 久顕 (東京工業大学)\*

Lefschetz ファイバー空間は、曲面をファイバーとする曲面上のファイバー空間であり、ノードつき曲面を特異ファイバーとして含む。Lefschetz ファイバー空間のトポロジーは、S. Lefschetz による ‘Lefschetz pencil’ の研究に始まり、楕円曲面のトポロジーやシンプレクティック多様体の研究などと密接に関連して発展してきた。

一方、チャートは曲面上のラベルつき有限グラフであり、2次元ブレイドを記述するために鎌田聖一氏によって1992年頃に導入された。それ以降、チャートを用いた2次元ブレイドや曲面絡み目の研究が盛んに行われている。

2000年代初めに松本幸夫氏と鎌田氏は、関係のないように見えるこれら2つの対象が、モノドロミーという概念を介して結びつくことを見出した。これを受けて、Lefschetz ファイバー空間の研究にチャートを応用する仕事はいくつか現れたが、その数はまだあまり多いとは言えない。本稿では、Lefschetz ファイバー空間へのチャートの応用に関する研究の現状を報告する。

### 1 チャートとその一般論

チャートはもともと2次元ブレイドを表示する方法として[Ka1]で導入された。その後、主に曲面絡み目との関係から様々な研究がなされ、一般化なども考察された。最も広い意味のチャートの一般論は、鎌田氏[Ka2]と長谷川功氏[Ha2]によって定式化された。ここでは、主に[Ka2]に従ってチャートの定義を振り返る。

$\mathcal{X}$  を集合とし、 $B$  を連結な有向閉曲面とする。 $v \in B$  に対し、 $v$  の周りを反時計回りに1周する小さな単純閉曲線  $m_v$  を、 $v$  のメリディアンという。 $B$  の基点  $b_0$  と、 $m_v$  上の1点から  $b_0$  への道  $n$  をとる。 $b_0$  を基点とする  $B$  内のループ  $l_v := n^{-1} \cdot m_v \cdot n$  を、 $v$  の1つのメリディアンループという(図1)。

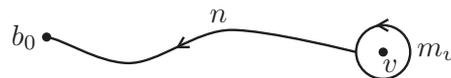


図1: メリディアンループ  $l_v$

$\Gamma$  を  $B$  上の有限グラフとし、 $\Gamma$  の各辺は向きづけられており、かつ  $\mathcal{X}$  の元がラベルとして与えられているとする。

**定義 1.1**  $\Gamma$  の辺と横断的に交わる道  $\eta : I \rightarrow B$  を考える。 $\eta$  が始点を出発して終点に至るまでに、 $\Gamma$  と有限個の点  $b_1, b_2, \dots, b_n$  でこの順番に交わるとする。各  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) に対し、 $b_i$  において  $\eta$  と交わる  $\Gamma$  の辺のラベルを  $x_i$  とする。 $b_i$  において、 $\Gamma$  の辺が  $\eta$  の進行方向に向かって左から右へ通過するとき  $\varepsilon_i = +1$ 、右から左へ通過するとき  $\varepsilon_i = -1$  と定める。このとき、 $\mathcal{X} \cup \mathcal{X}^{-1}$  の元を文字とする語  $w_\Gamma(\eta) := x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \cdots x_n^{\varepsilon_n}$  を、 $\Gamma$  に対する  $\eta$  の**交叉語**という(図2)。◇

\* 〒152-8551 東京都目黒区大岡山2-12-1 東京工業大学 大学院理工学研究科 数学専攻  
e-mail: endo@math.titech.ac.jp

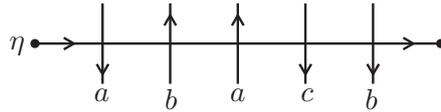


図 2: 交叉語  $w_\Gamma(\eta) = ab^{-1}a^{-1}cb$

$\mathcal{R}, \mathcal{S}$  を  $\mathcal{X} \cup \mathcal{X}^{-1}$  の元を文字とする語の集合とし,  $\mathcal{C} := (\mathcal{X}, \mathcal{R}, \mathcal{S})$  とおく. また, 表示  $\langle \mathcal{X} | \mathcal{R} \rangle$  によって定まる群を  $G$  とする. つまり,  $\mathcal{X}$  上の自由群を  $F(\mathcal{X})$ ,  $F(\mathcal{X})$  における  $\mathcal{R}$  の正規閉包を  $N(\mathcal{R})$  とするとき,  $G := F(\mathcal{X})/N(\mathcal{R})$  である.

**定義 1.2**  $\Gamma$  が次の条件 (1), (2), (3) をみたすとき,  $\Gamma$  を  $B$  上の  $\mathcal{C}$ -チャートという:

(1)  $\Gamma$  の頂点の集合は, 互いに交わらない 2 つの部分集合 (白頂点の集合と黒頂点の集合) の和集合である;

(2)  $v$  が  $\Gamma$  の白頂点のとき, メリディアン  $m_v$  の  $\Gamma$  に対する交叉語の逆  $w_\Gamma(m_v)^{-1}$  は,  $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1}$  のある元  $r$  の巡回置換である (このとき,  $v$  は  $r$  型であるという);

(3)  $v$  が  $\Gamma$  の黒頂点のとき, メリディアン  $m_v$  の  $\Gamma$  に対する交叉語  $w_\Gamma(m_v)$  は,  $\mathcal{S}$  のある元  $s$  の巡回置換である (このとき,  $v$  は  $s$  型であるという).

$B$  上に  $\mathcal{C}$ -チャート  $\Gamma$  と基点  $b_0$  を同時に考えるときは,  $b_0 \notin \Gamma$  を仮定する.  $\diamond$

例 1.3 の  $\mathcal{C}$ -チャートが鎌田氏によって導入された元来のチャートであり, 2次元ブレイドと密接に関係する. 単にチャートという場合はこの  $\mathcal{C}$ -チャートを指すことが多い.

**例 1.3** (単純チャート [Ka1])  $m \geq 3$  とし,  $\mathcal{C} = (\mathcal{X}, \mathcal{R}, \mathcal{S})$  を次のように定める.

$$\mathcal{X} := \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{m-1}\},$$

$$\mathcal{R} := \{\sigma_i \sigma_j \sigma_i^{-1} \sigma_j^{-1} \ (i+1 < j), \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i^{-1} \sigma_{i+1}^{-1} \ (i = 1, \dots, m-2)\},$$

$$\mathcal{S} := \{\sigma_1^{\pm 1}, \sigma_2^{\pm 1}, \dots, \sigma_{m-1}^{\pm 1}\}$$

このとき,  $G$  は  $m$  次ブレイド群  $B_m$  であり,  $\langle \mathcal{X} | \mathcal{R} \rangle$  は  $B_m$  の Artin による有限表示である. 白頂点には 4 価のものと 6 価のものがあり, 4 価のものを交叉, 6 価のものを白頂点と呼び分ける. 黒頂点はすべて 1 価である (図 3, ラベル  $\sigma_i$  を  $i$  と略記).  $\diamond$

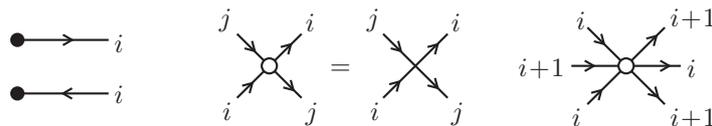


図 3: 単純チャートの黒頂点, 交叉, 白頂点

チャートとモノドロミーの関係について述べる.

**定義 1.4**  $\Gamma$  を  $B$  上の  $\mathcal{C}$ -チャートとし,  $b_0 \in B$  を基点とする. また,  $\Gamma$  の黒頂点の全体を  $\Delta_\Gamma$  と書く.  $b_0$  を基点とする  $B$  のループ  $\eta$  に対し,  $\eta$  の  $\Gamma$  に対する交叉語  $w_\Gamma(\eta)$  を考えることにより, 準同型  $\rho_\Gamma : \pi_1(B - \Delta_\Gamma, b_0) \rightarrow G : [\eta] \mapsto [w_\Gamma(\eta)]$  が矛盾なく定義される. これを  $\Gamma$  から定まる準同型という.  $\diamond$

**定義 1.5**  $\Delta$  を  $B$  の有限部分集合とし,  $b_0 \in B - \Delta$  を基点とする. 準同型  $\rho : \pi_1(B - \Delta, b_0) \rightarrow G$  を,  $G$ -モノドロミー表現という. 次の条件をみたす  $G$ -モノドロミー表現  $\rho$  の全体を  $\mathcal{M}(B, \Delta, b_0; \mathcal{C})$  と書く: 「任意の  $v \in \Delta$  と,  $b_0$  を基点とする  $v$  の任意のメリディアンループ  $l_v$  に対し,  $\rho([l_v])$  は  $G$  において  $\mathcal{S}$  のある元 (が代表する  $G$  の元) に共役である」.  $B$  上の  $\mathcal{C}$ -チャート  $\Gamma$  に対し,  $\rho_\Gamma \in \mathcal{M}(B, \Delta_\Gamma, b_0; \mathcal{C})$  である.  $\diamond$

**定理 1.6** (Kamada [Ka2], Hasegawa [Ha2]) 任意の  $\rho \in \mathcal{M}(B, \Delta, b_0; \mathcal{C})$  に対し, ある  $\mathcal{C}$ -チャート  $\Gamma$  が存在して,  $\rho_\Gamma = \rho$  が成り立つ.  $\diamond$

$\Gamma, \Gamma'$  を  $B$  上の  $\mathcal{C}$ -チャートとする.

**定義 1.7** 次の (1), (2), (3), (4) の操作の有限回の合成を  $\mathcal{C}$ -**変形** という.

(1) **W型変形**:  $D$  を  $B - \{b_0\}$  内の円板とし,  $D$  の境界  $\partial D$  は  $\Gamma, \Gamma'$  の辺と横断的に交わるとする.  $\Gamma \cap D$  と  $\Gamma' \cap D$  がともに黒頂点を含まず,  $\Gamma \cap (B - \text{Int } D) = \Gamma' \cap (B - \text{Int } D)$  であるとき,  $\Gamma$  を  $\Gamma'$  (あるいは  $\Gamma'$  を  $\Gamma$ ) に取り替える. 単純チャートの場合は CI-変形と呼ばれる. チャンネルチェンジ (図 4(a)), フープの生成と消去 (図 4(b)), 白頂点の対生成と対消滅 (図 4(c)) などの変形が代表的な例である.

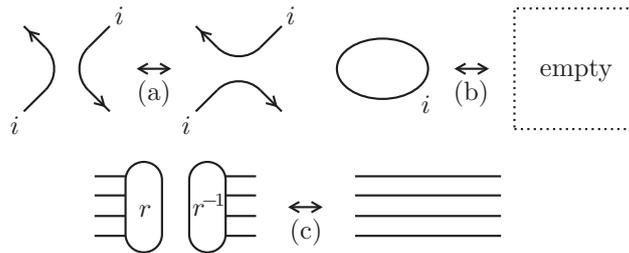


図 4: W型変形

(2) **通過変形**:  $s, s'$  を  $\mathcal{S}$  の元とし,  $w$  を  $\mathcal{X} \cup \mathcal{X}^{-1}$  の元を文字とする語とする.  $s'$  と  $ws w^{-1}$  が  $G$  の同じ元を代表すると仮定する.  $\Gamma$  が  $s$  型の黒頂点を含むとき, 局所的に図 5 の変形を行い,  $\Gamma$  を  $\Gamma'$  (あるいは  $\Gamma'$  を  $\Gamma$ ) に変える. ただし, ラベル  $T$  のついた箱は辺と白頂点のみを含む. 単純チャートの場合は本質的に CII-変形と CIII-変形に当たる.

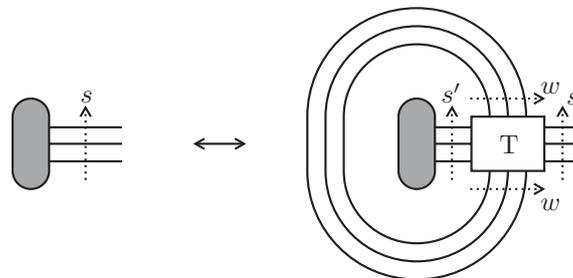


図 5: 通過変形

(3) **共役変形**: 基点  $b_0$  の周りにメリディアンに平行なフープを加える変形, およびその逆の変形である (図 6).

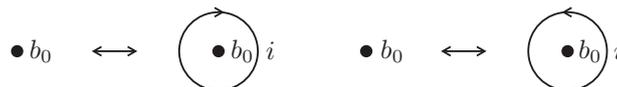


図 6: 共役変形

(4)  $b_0$  を止めた  $B$  のアイソトピー.  $\diamond$

**定義 1.8**  $\rho : \pi_1(B - \Delta, b_0) \rightarrow G, \rho' : \pi_1(B - \Delta', b_0) \rightarrow G$  を 2 つの  $G$ -モノドロミー表現とする.  $G$  の内部自己同型  $\iota : G \rightarrow G$  と,  $B$  の向きを保つ自己微分同相

$h : (B, \Delta) \rightarrow (B, \Delta')$  が存在して,  $\rho' = \iota \circ \rho \circ h_{\#}^{-1}$  であり,  $h$  が  $b_0$  を止めて  $\text{id}_B$  にアイソトピックであるとする. このとき,  $\rho$  は  $\rho'$  に同値であるという.  $\diamond$

**定理 1.9** (Kamada [Ka2], Hasegawa [Ha2])  $B$  上の  $\mathcal{C}$ -チャート  $\Gamma, \Gamma'$  に対し, 次の (1), (2) は同値である:

- (1)  $\Gamma, \Gamma'$  の定める準同型  $\rho_{\Gamma}, \rho'_{\Gamma'}$  が互いに同値である;
- (2)  $\Gamma$  と  $\Gamma'$  が  $\mathcal{C}$ -変形によってうつり合う.  $\diamond$

定理 1.6 と定理 1.9 により,  $\mathcal{M}(B, \Delta_{\Gamma}, b_0; \mathcal{C})$  の同値による商集合と,  $B$  上の  $\mathcal{C}$ -チャートの  $\mathcal{C}$ -変形に関する同値類の全体とが, 1対1に対応することがわかる.

## 2 Lefschetz ファイバー空間とモノドロミー表現

ここでは, Lefschetz ファイバー空間に関する基礎事項を簡単に復習しておく. [GS, Chapter 8] に詳しい解説がある.

**定義 2.1**  $M, B$  を連結で向きづけられた 4, 2次元可微分閉多様体とし,  $g$  を 0 以上の整数とする. 可微分写像  $f : M \rightarrow B$  が種数  $g$  の **Lefschetz ファイバー空間** であるとは,  $f$  が次の条件 (1), (2), (3) をみたすことである:

- (1)  $f$  の臨界値集合  $\Delta \subset B$  は有限であり,  $f$  の  $f^{-1}(B - \Delta)$  への制限は, 種数  $g$  の向きづけられた閉曲面  $\Sigma_g$  をファイバーとするファイバー束である;
- (2) 各  $v \in \Delta$  に対し, **特異ファイバー**  $F_v := f^{-1}(v)$  上に唯 1 つの臨界点  $p$  が存在して,  $p, v$  を中心とする局所複素座標  $(z_1, z_2), w$  によって,  $f$  は  $w = f(z_1, z_2) = z_1 z_2$ , または  $\bar{z}_1 z_2$  と表示される (このとき局所複素座標は  $M, B$  の向きと両立するものをとる);
- (3) 特異ファイバーは自己交叉数  $\pm 1$  の球面を含まない.  $\diamond$

**注意** 定義 2.1 における Lefschetz ファイバー空間は, 多くの文献の中で ‘achiral Lefschetz fibration’ と呼ばれているものである.  $\diamond$

$\Sigma_g$  の写像類群を  $\mathcal{M}_g$  と書く.  $\mathcal{M}_g$  の積の表記を次のように約束する:  $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{M}_g$  に対して  $\psi_1 \psi_2$  はまず  $\psi_1$  を施してから次に  $\psi_2$  を施すことを意味するものとする.

$f : M \rightarrow B$  を定義 2.1 の Lefschetz ファイバー空間とする. 基点  $b_0 \in B - \Delta$  と, 向きを保つ微分同相写像  $\varphi_0 : \Sigma_g \rightarrow F_0 := f^{-1}(b_0)$  をとる.  $b_0$  を基点とするループ  $\ell : I \rightarrow B - \Delta$  に対し,  $\varphi_0$  を拡張して ‘自明化’  $\varphi : I \times \Sigma_g \rightarrow \ell^* M \rightarrow M$  を構成することができる.  $\varphi$  の  $\{1\} \times \Sigma_g$  への制限を  $\varphi_1 : \Sigma_g \rightarrow F_0$  と書くとき,  $f$  の  $\varphi_0$  に関する **モノドロミー表現**

$$\rho : \pi_1(B - \Delta, b_0) \rightarrow \mathcal{M}_g : [\ell] \mapsto [\varphi_0^{-1} \circ \varphi_1]$$

が矛盾なく定義される. 特に,  $v \in \Delta$  のメリディアンループ  $\ell_v$  に対し,  $\rho([\ell_v])$  は  $\Sigma_g$  上のある単純閉曲線  $c$  に沿う Dehn ツイスト  $t_c^{\pm 1}$  となることが知られている (これを性質 (\*) と呼ぶ).  $c$  を特異ファイバー  $F_v$  に対する **消滅サイクル** という.  $\Sigma_g - c$  が連結であるとき,  $c$  や対応する特異ファイバーは **非分離型** であるといい,  $c$  が  $\Sigma_g$  を種数  $h, g - h$  の部分曲面に分けるときの,  $c$  や対応する特異ファイバーは種数  $h$  の **分離型** であるという. また, 定義 2.1(2) において,  $p$  の近傍での  $f$  の表示が  $w = z_1 z_2$  であるとき,  $p$  を含む特異ファイバーは **正** であるといい,  $w = \bar{z}_1 z_2$  であるとき, **負** であるという. 正, 負の非分離型特異ファイバーの本数を  $n_0^{\pm}(f)$  とし, 正, 負の種数  $h$  の分離型特異ファイバー ( $1 \leq h \leq [g/2]$ ) の本数を  $n_h^{\pm}(f)$  とする. ただし  $g = 1$  のとき, 分離型特異ファイバーは存在しない. また,  $M$  の符号数を  $\sigma(M)$  で表す.

$B = S^2$  とし,  $\Delta$  の濃度を  $n$  とする.  $b_0$  を基点とする  $\Delta$  の点のメリディアンループの組  $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n)$  であって, 互いに  $b_0$  のみを共有し,  $b_0$  の周りを反時計回りに進むとき添字の小さい順番に並んでいるものを考える. これらは  $\pi_1(B - \Delta, b_0)$  の生成元の集合の完全代表系を与える. このとき,  $(\rho(\ell_1), \rho(\ell_2), \dots, \rho(\ell_n))$  を  $f$  の **Hurwitz システム** という. Hurwitz システムを与えると,  $\rho$  が1つに定まる.

**定義 2.2**  $f : M \rightarrow B, f' : M' \rightarrow B$  を種数  $g$  の Lefschetz ファイバー空間とする. 向きを保つ微分同相写像  $H : M \rightarrow M', h : B \rightarrow B$  が存在して,  $f' \circ H = h \circ f$  が成り立つとき,  $f$  は  $f'$  に **同型** であるという. 特に,  $h$  が基点  $b_0$  を止めて恒等写像  $\text{id}_B$  にアイソトピックであるとき,  $f$  は  $f'$  に **狭義に同型** であるという.  $\diamond$

**定理 2.3** (Kas [Ks], Matsumoto [Ma])  $g \geq 2$  のとき, 種数  $g$  の Lefschetz ファイバー空間  $f : M \rightarrow B$  の狭義の同型類の全体と, 性質 (\*) をみたす準同型写像  $\rho : \pi_1(B - \Delta, b_0) \rightarrow M_g$  の (定義 1.8 の意味の) 同値類の全体は 1 対 1 に対応する.  $\diamond$

2つの Lefschetz ファイバー空間のファイバー和を定義する.

**定義 2.4** 種数  $g$  の Lefschetz ファイバー空間  $f : M \rightarrow B, f' : M' \rightarrow B'$  を考える.  $f, f'$  の正則値  $b_0 \in B, b'_0 \in B'$  をとり,  $F_0 := f^{-1}(b_0), F'_0 := f'^{-1}(b'_0)$  とおく.  $f, f'$  の正則値のみを含む円板  $D, D'$  をそれぞれ  $b_0, b'_0$  の近くに選ぶ. 向きを保つ微分同相写像  $\Phi : F_0 \rightarrow F'_0$  と向きを逆にする微分同相写像  $\partial D \rightarrow \partial D'$  によって,  $M - f^{-1}(\text{Int } D)$  と  $M' - f'^{-1}(\text{Int } D')$  を双方のファイバー構造を保つように接合することにより, 種数  $g$  の Lefschetz ファイバー空間  $f \# f' : M \#_F M' \rightarrow B \# B'$  がえられる. これを  $f$  と  $f'$  の ( $\Phi$  による) **ファイバー和** という.  $\Phi$  を強調するときには,  $f \# f'$  を  $f \#_\Phi f'$  と書く.

向きを保つ微分同相写像  $\varphi_0 : \Sigma_g \rightarrow F_0, \varphi'_0 : \Sigma_g \rightarrow F'_0$  をとると,  $f, f'$  の  $\varphi_0, \varphi'_0$  に関するモノドロミー表現  $\rho, \rho'$  がそれぞれえられる.  $\Phi \circ \varphi_0$  を考えることにより,  $f \# f'$  のモノドロミー表現  $\rho \# \rho'$  が構成され,  $\rho, \rho'$  との関係も具体的に書き下すことができる.  $\diamond$

### 3 Lefschetz ファイバー空間へのチャートの応用

第1節における  $\mathcal{C}$  を写像類群の表示に関係するよう選ぶことにより, 第1節と第2節の話がつながり, Lefschetz ファイバー空間の同型に関する問題をチャートの変形の問題に翻訳することが可能となる. 以下では, Lefschetz ファイバー空間へのチャートの応用に関するいくつかの研究を取り上げる.

$\Sigma_g$  上の単純閉曲線  $c_0, c_1, \dots, c_{2g}, c_{2g+1}, s_1, \dots, s_{[g/2]}$  を図7のようにとり,  $c_i, s_h$  に沿う右向き Dehn ツイストをそれぞれ  $\zeta_i, \sigma_h$  と書く. ただし,  $s_h$  は  $g \geq 2$  のとき,  $c_0$  は  $g \geq 3$  のときにのみ考える.  $M_g$  の元として  $\sigma_h = (\zeta_1 \zeta_2 \cdots \zeta_{2h})^{4h+2}$  であることに注意する.

#### ① 同型による分類

$\mathcal{C} = (\mathcal{X}, \mathcal{R}, \mathcal{S})$  を次のようにとる.

$$\mathcal{X} := \{\zeta_1, \zeta_2\}, \mathcal{R} := \{r_1 := \zeta_1 \zeta_2 \zeta_1 \zeta_2^{-1} \zeta_1^{-1} \zeta_2^{-1}, r_2 := (\zeta_1 \zeta_2)^6\}, \mathcal{S} := \{\zeta_1^{\pm 1}, \zeta_2^{\pm 1}\}$$

このとき,  $\langle \mathcal{X} | \mathcal{R} \rangle$  はトーラスの写像類群  $G = \mathcal{M}_1 \cong \text{SL}(2, \mathbb{Z})$  の有限表示である. この  $\mathcal{C}$  に対し, 連結な有向閉曲面  $B$  上の  $\mathcal{C}$ -チャートの  $\mathcal{C}$ -変形による同型類の全体は,  $B$  上の種数 1 の Lefschetz ファイバー空間の狭義の同型類の全体と 1 対 1 に対応する.

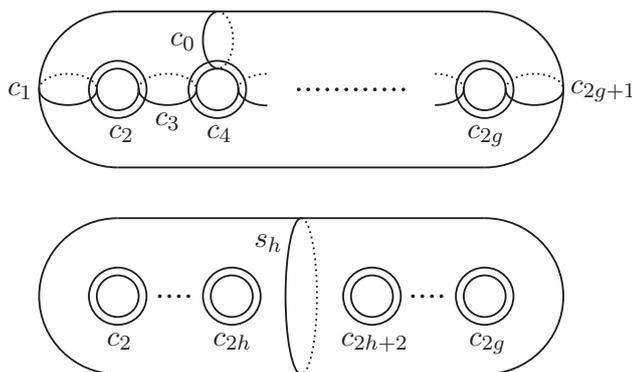


図 7:  $\Sigma_g$  上の単純閉曲線

次の結果は松本幸夫・松本堯生・鎌田聖一・脇慶太の 4 氏によるものであり, Lefschetz ファイバー空間の研究にチャートを利用した最初のものである.

**定理 3.1** (Kamada–Matsumoto–Matumoto–Waki [KMMW]) 種数 1 の Lefschetz ファイバー空間  $f : M \rightarrow B$ ,  $f' : M' \rightarrow B$  が  $n_0^+(f) \neq n_0^-(f)$  をみたすとき, 次の (1), (2) は同値である:

- (1)  $f$  と  $f'$  は互いに同型である;
- (2)  $n_0^\pm(f) = n_0^\pm(f')$ .  $\diamond$

証明の要所は,  $B$  上の任意の  $\mathcal{C}$ -チャートが  $\mathcal{C}$ -変形によって基本的な  $\mathcal{C}$ -チャートのいくつかのコピーの非交和に分解する, という技術的な補題である.  $n_0^+(f) \neq n_0^-(f)$  という仮定は本質的であり,  $n_0^+(f) = n_0^-(f)$  の場合は, 特異ファイバーの本数で同型類が決まらない例が存在する (岩瀬順一氏, 戸田正智氏の研究がある). また, Baykur と鎌田氏 [BK] や早野健太氏 [Hy] は, 同様の考察を種数 1 の ‘broken Lefschetz fibration’ に対して行っている.

### ● 同型の判定

$\mathcal{C} = (\mathcal{X}, \mathcal{R}, \mathcal{S})$  を次のようにとる.

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &:= \{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4, \zeta_5\}, \\ \mathcal{R} &:= \{r_1(i, j) := \zeta_i \zeta_j \zeta_i^{-1} \zeta_j^{-1} (|i - j| > 1), r_2(i) := \zeta_i \zeta_{i+1} \zeta_i \zeta_{i+1}^{-1} \zeta_i^{-1} \zeta_{i+1}^{-1} (i = 1, 2, 3, 4), \\ &\quad r_3 := (\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \zeta_4 \zeta_5 \zeta_4 \zeta_3 \zeta_2 \zeta_1)^2, r_4 := (\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \zeta_4 \zeta_5)^6, \\ &\quad r_5(i) := \zeta_i \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \zeta_4 \zeta_5 \zeta_4 \zeta_3 \zeta_2 \zeta_1 \zeta_i^{-1} (\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \zeta_4 \zeta_5 \zeta_5 \zeta_4 \zeta_3 \zeta_2 \zeta_1)^{-1} (i = 1, 2, 3, 4, 5)\}, \\ \mathcal{S} &:= \{\zeta_1^{\pm 1}, \zeta_2^{\pm 1}, \zeta_3^{\pm 1}, \zeta_4^{\pm 1}, \zeta_5^{\pm 1}, (\zeta_1 \zeta_2)^{\pm 6}\} \end{aligned}$$

このとき,  $\langle \mathcal{X} | \mathcal{R} \rangle$  は種数 2 の閉曲面の写像類群  $G = \mathcal{M}_2$  の Birman–Hilden 表示である. この  $\mathcal{C}$  に対し, 連結な有向閉曲面  $B$  上の  $\mathcal{C}$ -チャートの  $\mathcal{C}$ -変形による同型類の全体は,  $B$  上の種数 2 の Lefschetz ファイバー空間の狭義の同型類の全体と 1 対 1 に対応する.

さて, Chakiris [Ch] および筆者 [En2] は, 種数 2 の Lefschetz ファイバー空間  $f_Q : M_Q \rightarrow$

$S^2$ ,  $f_{PI} : M_{PI} \rightarrow S^2$  を構成した. これらの Hurwitz システム  $Q$ ,  $PI$  は

$$Q : ((\zeta_1 \zeta_2)^6, (\zeta_1 \zeta_2)^{-3} \zeta_3 (\zeta_1 \zeta_2)^3, (\zeta_1 \zeta_2)^{-3} \zeta_2 (\zeta_1 \zeta_2)^3, (\zeta_1 \zeta_2)^{-3} \zeta_4 (\zeta_1 \zeta_2)^3, (\zeta_1 \zeta_2)^{-3} \zeta_3 (\zeta_1 \zeta_2)^3, \\ \zeta_3, \zeta_2, \zeta_4, \zeta_3, \zeta_5, \zeta_4, \zeta_3, \zeta_2, \zeta_1, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4, \zeta_5), \\ PI : (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4, \zeta_5, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4, \zeta_5, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4, \zeta_5, (\zeta_1 \zeta_2)^6, \zeta_1^{-1} \zeta_2^{-1} \zeta_3 \zeta_2 \zeta_1, \\ \zeta_2^{-1} \zeta_3^{-1} \zeta_4 \zeta_3 \zeta_2, \zeta_3^{-1} \zeta_4^{-1} \zeta_5 \zeta_4 \zeta_3)$$

である.  $f_Q, f_{PI}$  とも非分離型の特異ファイバーを 18 本, 分離型の特異ファイバーを 1 本もつ. 松本幸夫氏の分数符号数 [Ma] を用いると,  $\sigma(M_Q) = \sigma(M_{PI}) = -11$  となる. Freedman の定理から  $M_Q$  と  $M_{PI}$  が同相であることはわかるが, これらが微分同相か否か, あるいは  $f_Q$  と  $f_{PI}$  が同型か否かは筆者にはわからなかった (Chakiris は知っていたのであろう). この問題は引野貴之氏によって 2009 年の秋に解決された.

**定理 3.2** (Hikino [Hi])  $f_Q$  と  $f_{PI}$  は互いに同型である.  $\diamond$

定理 3.2 は,  $f_Q$  と  $f_{PI}$  に対応する  $\mathcal{C}$ -チャートを描き, それらが  $\mathcal{C}$ -変形でうつりあうことを具体的に示すことにより証明される.

### ③ 不変量の構成

$g \geq 2$  とし,  $\mathcal{C} = (\mathcal{X}, \mathcal{R}, \mathcal{S})$  を次のようにとる.

$$\mathcal{X} := \{\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{2g+1}\}, \\ \mathcal{R} := \{r_1(i, j) := \zeta_i \zeta_j \zeta_i^{-1} \zeta_j^{-1} (|i - j| > 1), r_2(i) := \zeta_i \zeta_{i+1} \zeta_i \zeta_{i+1}^{-1} \zeta_i^{-1} \zeta_{i+1}^{-1} (1 \leq i \leq 2g), \\ r_3 := (\zeta_1 \zeta_2 \cdots \zeta_{2g+1} \zeta_{2g+1} \cdots \zeta_2 \zeta_1)^2, r_4 := (\zeta_1 \zeta_2 \cdots \zeta_{2g+1})^{2g+2}, \\ r_5 := \zeta_i \zeta_1 \zeta_2 \cdots \zeta_{2g+1} \zeta_{2g+1} \cdots \zeta_2 \zeta_1 \zeta_i^{-1} (\zeta_1 \zeta_2 \cdots \zeta_{2g+1} \zeta_{2g+1} \cdots \zeta_2 \zeta_1)^{-1} (1 \leq i \leq 2g+1)\}, \\ \mathcal{S} := \{\zeta_1^{\pm 1}, \zeta_2^{\pm 1}, \dots, \zeta_{2g+1}^{\pm 1}, (\zeta_1 \zeta_2 \cdots \zeta_{2h})^{4h+2} (1 \leq h \leq [g/2])\}$$

このとき,  $\langle \mathcal{X} | \mathcal{R} \rangle$  は種数  $g$  の超楕円的写像類群  $G = \mathcal{H}_g$  の Birman–Hilden 表示である. この  $\mathcal{C}$  に対し,  $S^2$  上の  $\mathcal{C}$ -チャートの  $\mathcal{C}$ -変形による同型類の全体は,  $S^2$  上の種数  $g$  の超楕円的 Lefschetz ファイバー空間の ‘超楕円的な意味の’ 狭義の同型類の全体と 1 対 1 に対応する.

さて,  $S^2$  上の  $\mathcal{C}$ -チャート  $\Gamma$  に対し,  $\Gamma$  に含まれるラベル  $r_4^{\pm 1}$  の白頂点の個数の偶奇を  $w(\Gamma) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  とおく. 次が成り立つ.

**定理 3.3** (Kamada-E. [EK2])  $g$  が奇数のとき,  $w(\Gamma)$  は  $\mathcal{C}$ -変形で不変である.  $\diamond$

$g$  を 3 以上の奇数とし,  $f : M \rightarrow S^2$  を種数  $g$  の超楕円的 Lefschetz ファイバー空間とする.  $f$  のモノドロミー表現  $\rho : \pi_1(S^2 - \Delta, b_0) \rightarrow \mathcal{H}_g$  に対し, 定理 1.6 より  $\rho_\Gamma = \rho$  をみたす  $S^2$  上の  $\mathcal{C}$ -チャート  $\Gamma$  が存在する. このとき定理 3.3 より,  $w(f) := w(\Gamma)$  は  $f$  の ‘超楕円的な意味の’ 狭義の同型類に関する不変量である.

不変量  $w$  の幾何学的な意味にふれておく.  $\mathcal{H}_g$  は  $2g+2$  点つき球面の写像類群  $\mathcal{M}_{0,2g+2}$  の中心拡大である. 一方, 球面上の  $2g+2$  次ブレイド群  $B_{2g+2}(S^2)$  も  $\mathcal{M}_{0,2g+2}$  の中心拡大である. 自然な全射  $B_{2g+2}(S^2) \rightarrow \mathcal{M}_{0,2g+2}$  の核の生成元が  $r_4$  に対応する元であり, Dirac ブレイドと呼ばれる位数 2 の元である. モノドロミー表現  $\pi_1(S^2 - \Delta, b_0) \rightarrow \mathcal{H}_g \rightarrow \mathcal{M}_{0,2g+2}$  に内在する Dirac ブレイドを 2 を法として数え上げた量が  $w$  に他ならない.

**例 3.4** (非分離型特異ファイバーのみをもつ例, [En1, En2, EN] 参照)  $g$  を 3 以上の奇数とし, 次の Hurwitz システム  $C_1, I^{g+1}$  に対応する種数  $g$  の超楕円的 Lefschetz ファイバー空間  $f_{C_1}: M_{C_1} \rightarrow S^2, f_{I^{g+1}}: M_{I^{g+1}} \rightarrow S^2$  を考える.

$$C_1: (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{2g+1})^{2g+2}, \quad I^{g+1}: (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{2g+1}, \zeta_{2g+1}, \dots, \zeta_2, \zeta_1)^{g+1}$$

$f_{C_1}, f_{I^{g+1}}$  とも  $2(g+1)(2g+1)$  本の特異ファイバーをもち, すべてが非分離型である.  $M_{C_1}, M_{I^{g+1}}$  はどちらも単連結であり, 局所符号数 [En1] の計算から,  $\sigma(M_{C_1}) = \sigma(M_{I^{g+1}}) = -2(g+1)^2$  である. 従って, Freedman の定理より,  $M_{C_1}$  と  $M_{I^{g+1}}$  は互いに同相である. しかし, 対応する  $\mathcal{C}$ -チャートを描くことにより,  $w(f_{I^{g+1}}) = 0, w(f_{C_1}) = 1$  であることがわかるので,  $f_{I^{g+1}}$  と  $f_{C_1}$  は ‘超楕円的な意味の’ 狭義の同型ではない (実は通常の意味の同型でないこともわかる).

$f_{I^{g+1}}$  は  $f_{I^2}$  の  $(g+1)/2$  個のコピーのファイバー和であるから,  $f_{I^{g+1}}$  と  $f_{C_1}$  が同型でないことは, ファイバー和の性質に関する Stipsicz-Smith の定理や Usher の定理からも従う (全空間が互いに微分同相でないこともわかる). ただ, これらの定理はシンプレクティック幾何や双曲幾何を用いており, 不変量  $w$  による判定のほうが初等的である.  $\diamond$

**例 3.5** (分離型特異ファイバーを含む例 [En2])  $g$  を 3 以上の奇数とし, 次の Hurwitz システム  $Q, R$  に対応する種数  $g$  の超楕円的 Lefschetz ファイバー空間  $f_Q: M_Q \rightarrow S^2, f_R: M_R \rightarrow S^2$  を考える.

$$\begin{aligned} Q: & (\zeta_{g+2}\zeta_{g+3} \cdots \zeta_{2g}\zeta_{2g+1}\zeta_{2g}^{-1} \cdots \zeta_{g+3}\zeta_{g+2}^{-1}, \dots, \zeta_2\zeta_3 \cdots \zeta_g\zeta_{g+1}\zeta_g^{-1} \cdots \zeta_3^{-1}\zeta_2^{-1}, \\ & \zeta_1\zeta_2 \cdots \zeta_{g-1}\zeta_g\zeta_{g-1}^{-1} \cdots \zeta_2^{-1}\zeta_1^{-1}, (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{g-1})^2, (\zeta_1\zeta_2 \cdots \zeta_{g-1})^{2g}, \\ & (\zeta_{2g+1}, \dots, \zeta_2, \zeta_1)^{g+2}) \\ R: & ((\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{2g+1})^{g+1}, \zeta_{g+2}\zeta_{g+3} \cdots \zeta_{2g}\zeta_{2g+1}\zeta_{2g}^{-1} \cdots \zeta_{g+3}\zeta_{g+2}^{-1}, \dots, \\ & \zeta_2\zeta_3 \cdots \zeta_g\zeta_{g+1}\zeta_g^{-1} \cdots \zeta_3^{-1}\zeta_2^{-1}, \zeta_1\zeta_2 \cdots \zeta_{g-1}\zeta_g\zeta_{g-1}^{-1} \cdots \zeta_2^{-1}\zeta_1^{-1}, (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{g-1})^2, \\ & (\zeta_1\zeta_2 \cdots \zeta_{g-1})^{2g}, \zeta_{2g+1}, \dots, \zeta_2, \zeta_1) \end{aligned}$$

$f_Q, f_R$  とも非分離型の特異ファイバーを  $2(g^2 + 4g + 1)$  本, 分離型の特異ファイバーを 1 本もつ.  $M_Q, M_R$  はどちらも単連結であり, 局所符号数 [En1] の計算から,  $\sigma(M_Q) = \sigma(M_R) = -(g+1)^2$  である. 従って, Freedman の定理より,  $M_Q$  と  $M_R$  は互いに同相である. しかし, 対応する  $\mathcal{C}$ -チャートを描くことにより,  $w(f_Q) = 1, w(f_R) = 0$  であることがわかるので,  $f_Q$  と  $f_R$  は ‘超楕円的な意味の’ 狭義の同型ではない (実は通常の意味の同型でないこともわかる). これらは従来の方法では区別できなかった例である.  $\diamond$

#### ④ ファイバー和による安定化

$g \geq 3$  とし,  $\mathcal{C} = (\mathcal{X}, \mathcal{R}, \mathcal{S})$  を次のようにとる.

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &:= \{\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_{2g}\}, \\ \mathcal{R} &:= \{r_1(i, j) \mid 1 \leq i < j - 1 \leq 2g - 1\} \cup \{r_1(0, j) \mid j = 1, 2, 3, 5, \dots, 2g\} \\ &\quad \cup \{r_2(i) \mid i = 0, 1, \dots, 2g - 1\} \cup \{r_3, r_4, r_5\}, \\ \mathcal{S} &:= \{\ell_1(i)^{\pm 1} \mid i = 0, 1, \dots, 2g\} \cup \{\ell_2(h)^{\pm 1} \mid h = 1, \dots, [g/2]\}, \end{aligned}$$

ただし,  $r_1(i, j), r_2(i), r_3, r_4, r_5, \ell_1(i), \ell_2(h)$  は次のように定める.

$$r_1(i, j) := \zeta_i\zeta_j\zeta_i^{-1}\zeta_j^{-1}, \quad r_2(0) := \zeta_0\zeta_4\zeta_0\zeta_4^{-1}\zeta_0^{-1}\zeta_4^{-1},$$

$$\begin{aligned}
 r_2(i) &:= \zeta_i \zeta_{i+1} \zeta_i \zeta_{i+1}^{-1} \zeta_i^{-1} \zeta_{i+1}^{-1} \quad (i = 1, \dots, 2g - 1), \\
 r_3 &:= (\zeta_3 \zeta_2 \zeta_1)^4 \zeta_4^{-1} \zeta_3^{-1} \zeta_2^{-1} \zeta_1^{-2} \zeta_2^{-1} \zeta_3^{-1} \zeta_4^{-1} \zeta_0^{-1} \zeta_4 \zeta_3 \zeta_2 \zeta_1^2 \zeta_2 \zeta_3 \zeta_4 \zeta_0^{-1}, \\
 r_4 &:= \delta_3 \zeta_1 \zeta_3 \zeta_5 \tau_1 \tau_2 \zeta_0^{-1} \tau_2^{-1} \tau_1^{-1} \tau_2 \zeta_0^{-1} \tau_2^{-1} \zeta_0^{-1}, \\
 r_5 &:= \zeta_{2g} \cdots \zeta_3 \zeta_2 \zeta_1^2 \zeta_2 \zeta_3 \cdots \zeta_{2g} \delta_g \zeta_{2g}^{-1} \cdots \zeta_3^{-1} \zeta_2^{-1} \zeta_1^{-2} \zeta_2^{-1} \zeta_3^{-1} \cdots \zeta_{2g}^{-1} \delta_g^{-1}, \\
 \ell_1(i) &:= \zeta_i \quad (i = 0, 1, \dots, 2g), \quad \ell_2(h) := (\zeta_1 \zeta_2 \cdots \zeta_{2h})^{4h+2} \quad (h = 1, \dots, [g/2]), \\
 \tau_1 &:= \zeta_2 \zeta_3 \zeta_1 \zeta_2, \quad \tau_i := \zeta_{2i} \zeta_{2i-1} \zeta_{2i+1} \zeta_{2i}, \\
 \nu_1 &:= \zeta_4^{-1} \zeta_3^{-1} \zeta_2^{-1} \zeta_1^{-2} \zeta_2^{-1} \zeta_3^{-1} \zeta_4^{-1} \zeta_0 \zeta_4 \zeta_3 \zeta_2 \zeta_1^2 \zeta_2 \zeta_3 \zeta_4, \quad \nu_i := \tau_{i-1} \tau_i \nu_{i-1} \tau_i^{-1} \tau_{i-1}^{-1}, \\
 \mu_1 &:= \zeta_2 \zeta_3 \zeta_4 \nu_1 \zeta_1^{-1} \zeta_2^{-1} \zeta_3^{-1} \zeta_4^{-1}, \quad \mu_i := \zeta_{2i} \zeta_{2i+1} \zeta_{2i+2} \nu_i \zeta_{2i-1}^{-1} \zeta_{2i}^{-1} \zeta_{2i+1}^{-1} \zeta_{2i+2}^{-1}, \\
 \delta_g &:= \mu_{g-1}^{-1} \cdots \mu_2^{-1} \mu_1^{-1} \zeta_1 \mu_1 \mu_2 \cdots \mu_{g-1}
 \end{aligned}$$

このとき,  $\langle \mathcal{X} | \mathcal{R} \rangle$  は種数  $g$  の有向閉曲面の写像類群  $G = \mathcal{M}_g$  の Wajnryb 表示である. この  $\mathcal{C}$  に対し, 連結な有向閉曲面  $B$  上の  $\mathcal{C}$ -チャートの  $\mathcal{C}$ -変形による同型類の全体は,  $B$  上の種数  $g$  の Lefschetz ファイバー空間の狭義の同型類の全体と 1 対 1 に対応する.

**定義 3.6** 種数  $g$  の Lefschetz ファイバー空間  $f : M \rightarrow S^2$  のすべての特異ファイバーが非分離型かつ正であり, 次の (1), (2), (3) をみたす消滅サイクル  $a_0, a_1, \dots, a_{2g}$  が存在するとき,  $f$  は**普遍**であるという:

- (1) 任意の  $i \in \{1, \dots, 2g - 1\}$  に対し,  $a_i$  と  $a_{i+1}$  は 1 点で横断的に交わる;
- (2)  $a_0$  と  $a_4$  は 1 点で横断的に交わる;
- (3) その他の組  $(i, j)$  に対し,  $a_i$  と  $a_j$  は交わらない.  $\diamond$

3 以上の任意の整数  $g$  に対し, 種数  $g$  の普遍 Lefschetz ファイバー空間  $f_0 : M_0 \rightarrow S^2$  が存在する. そのような  $f_0$  を 1 つとる.

**定理 3.7** (Hasegawa–Kamada–Tanaka–E. [EHKT]) 種数  $g$  の Lefschetz ファイバー空間  $f : M \rightarrow B$ ,  $f' : M' \rightarrow B$  に対し, 次の (1), (2) は同値である:

- (1) ある正の整数  $N$  が存在し,  $f \# N f_0$  と  $f' \# N f_0$  は互いに同型である;
- (2)  $n_0^\pm(f) = n_0^\pm(f')$ ,  $n_h^\pm(f) = n_h^\pm(f')$  ( $1 \leq h \leq [g/2]$ ),  $\sigma(M) = \sigma(M')$ .  $\diamond$

定理 3.7 は, Auroux や長谷川功氏 [Ha1, Ha2] による安定化定理の一般化に当たる. 永見誠二氏と筆者による符号数の計算法 [EN] と長谷川氏の議論 [Ha2] が証明において本質的である. 種数 2 の場合 [Ka3], 超楕円的な場合 [EK1] にも類似の結果がえられている.

**例 3.8** 種数  $g$  の Lefschetz ファイバー空間  $f : M \rightarrow S^2$ ,  $f' : M' \rightarrow S^2$  を考える.  $f, f'$  の正則値  $b_0, b'_0 \in S^2$  をとり,  $F_0 := f^{-1}(b_0)$ ,  $F'_0 := f'^{-1}(b'_0)$  とおく. 向きを保つ微分同相写像  $\Phi, \Psi : F_0 \rightarrow F'_0$  によって,  $f$  と  $f'$  の 2 通りのファイバー和  $f_1 := f \#_\Phi f'$ ,  $f_2 := f \#_\Psi f'$  が構成される.  $\Phi$  と  $\Psi$  がアイソトピックでないとき,  $f_1$  と  $f_2$  は必ずしも同型ではない. しかし,  $f_1 \# f_0$  と  $f_2 \# f_0$  は互いに同型である. 例えば, Fintushel–Stern により結び目手術を用いて構成された例や, Matsumoto–Cadavid–Korkmaz ファイバー空間のファイバー和など, ファイバー和の‘ひねり具合’を変えて構成された Lefschetz ファイバー空間たちは,  $f_0$  との 1 回のファイバー和によって互いに同型になる.  $\diamond$

定理 3.7 より, Lefschetz ファイバー空間のファイバーと底空間の種数を固定するとき, 特異ファイバーの型ごとの本数と全空間の符号数は安定同型類の完全不変量を与える. 従って, ファイバー和に関して加法的な不変量は原理的にこれらの不変量で決まってし

まう. そこで, ファイバー和に関して加法的でない不変量が重要となる. しかし, 同型の判定に有効なものとしては, モノドロミー表現の像と野坂武史氏による不変量 [No] の他に, そのような例は知られていないように思われる.

**謝辞** 第 61 回トポロジーシンポジウムにお招き下さいました, 石川昌治氏 (東北大学), 大鹿健一氏 (大阪大学), 大槻知忠氏 (京都大学数理解析研究所), 川村一宏氏 (筑波大学) に心から御礼申し上げます. 今回ご紹介するいくつかの研究は, 鎌田聖一氏 (大阪市立大学), 長谷川功氏 (厚生労働省), 田中心氏 (東京学芸大学) との共同研究に基づいています. 筆者は, 科学研究費補助金・基盤研究 (C), 課題番号 21540079, 25400082 による援助を受けています.

### 参考文献

- [BK] R. I. Baykur and S. Kamada, Classification of broken Lefschetz fibrations with small fiber genera, arXiv:1010.5814.
- [Ch] K. N. Chakiris, The monodromy of genus two pencils, Dissertation, Columbia University, 1978.
- [En1] H. Endo, Meyer's signature cocycle and hyperelliptic fibrations, with Appendix written by T. Terasoma, *Math. Ann.* **316** (2000), 237–257.
- [En2] H. Endo, A generalization of Chakiris' fibrations, in *Groups of Diffeomorphisms, Advanced Studies in Pure Mathematics* **52**, the Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2008, pp. 251–282.
- [EHKT] H. Endo, I. Hasegawa, S. Kamada, and K. Tanaka, Charts, signatures, and stabilizations of Lefschetz fibrations, arXiv:1403.7946.
- [EK1] H. Endo and S. Kamada, Chart description for hyperelliptic Lefschetz fibrations and their stabilization, arXiv:1306.2707, to appear in *Topology Appl.*
- [EK2] H. Endo and S. Kamada, Counting Dirac braids and hyperelliptic Lefschetz fibrations, in preparation.
- [EN] H. Endo and S. Nagami, Signature of relations in mapping class groups and non-holomorphic Lefschetz fibrations, *Trans. Amer. Math. Soc.* **357** (2004), 3179–3199.
- [GS] R. E. Gompf and A. I. Stipsicz, *4-Manifolds and Kirby Calculus*, Graduate Studies in Mathematics **20**, American Mathematical Society, 1999.
- [Ha1] 長谷川功, On  $C$ -moves of chart descriptions of Lefschetz fibrations, 研究集会「分裂族・モノドロミー・チャートのトポロジーと代数幾何」報告集, pp. 124–133, 2006 年.
- [Ha2] 長谷川功, Chart descriptions of monodromy representations on oriented closed surfaces, 東京大学博士論文, 2006 年 3 月 23 日.
- [Hy] K. Hayano, On genus-1 simplified broken Lefschetz fibrations, *Algebr. Geom. Topol.* **11** (2011), 1267–1322.
- [Hi] 引野貴之, レフシェッツファイバー空間のチャート表示とチャートによる同型証明, 大阪大学修士論文, 2010 年 2 月.
- [Ks] A. Kas, On the handlebody decomposition associated to a Lefschetz fibration, *Pacific J. Math.* **89** (1980), 89–104.
- [Ka1] S. Kamada, Surfaces in  $R^4$  of braid index three are ribbon, *J. Knot Theory Ramifications* **1** (1992), 137–160.
- [Ka2] S. Kamada, Graphic descriptions of monodromy representations, *Topology Appl.* **154** (2007), 1430–1446.
- [Ka3] S. Kamada, Chart description for genus-two Lefschetz fibrations and a theorem on their stabilization, *Topology Appl.* **159** (2012), 1041–1051.
- [KMMW] S. Kamada, Y. Matsumoto, T. Matsumoto and K. Waki, Chart description and a new proof of the classification theorem of genus one Lefschetz fibrations, *J. Math. Soc. Japan*, **57** (2005), 537–555.
- [Ma] Y. Matsumoto, Lefschetz fibrations of genus two – a topological approach, *Proceedings of the 37th Taniguchi Symposium on “Topology and Teichmüller Spaces”*, editor: S. Kojima, World Scientific, Singapore, 1996, pp. 123–148.
- [No] T. Nosaka, Bilinear-form invariants of Lefschetz fibrations over the 2–sphere, in preparation.