TOPOLOGY NEWS

Series B No. 2

1987年4月

目　次

i　先号の会計報告（2月末現在）

繰越分	7.110	
印刷費		65.600
送料		3.300
売上	62.350	
残高	560	

ii　今回も多くの方々の御協力によって発行することができました。
次号も学会の折に発行の予定です。御意見また記事などありましたら御連絡下さい。尚、原稿の締切は8月末となります。

トポロジーニュース連絡先

〒812　福岡市東区箱崎 6-10-1
九州大学理学部数学教室
矢野　公一

TEL (092) 641-1101　内線 4362

(3.3 KY)

Casson Handles, Exotic $\mathbb{R}^4$'s, $\#^\infty(S^2\times S^2)$
などについて

久我健一

ここでは、非コンパクト4次元多様体（の微分構造）に関係する話題を書きたいと思いますが、これに関する系統だった研究といったものがあるわけではなく、最近注目を集めたExotic $\mathbb{R}^4$の存在のように、他の次元では見られないような、通常と異なる微分構造をもつものがみつかってきた、という段階です。

Exotic $\mathbb{R}^4$の存在を示すためには、全く異った2つの議論が必要で　1つは、それが$\mathbb{R}^4$と位相同型であることを示すためのFreedmanによる議論と、もう1つは、それが、$\mathbb{R}^4$と微分同相でないことを示すための、適当なバンドル上の(Anti-) Self-dual connectionのmoduli空間を用いたDonaldsonによる議論です。

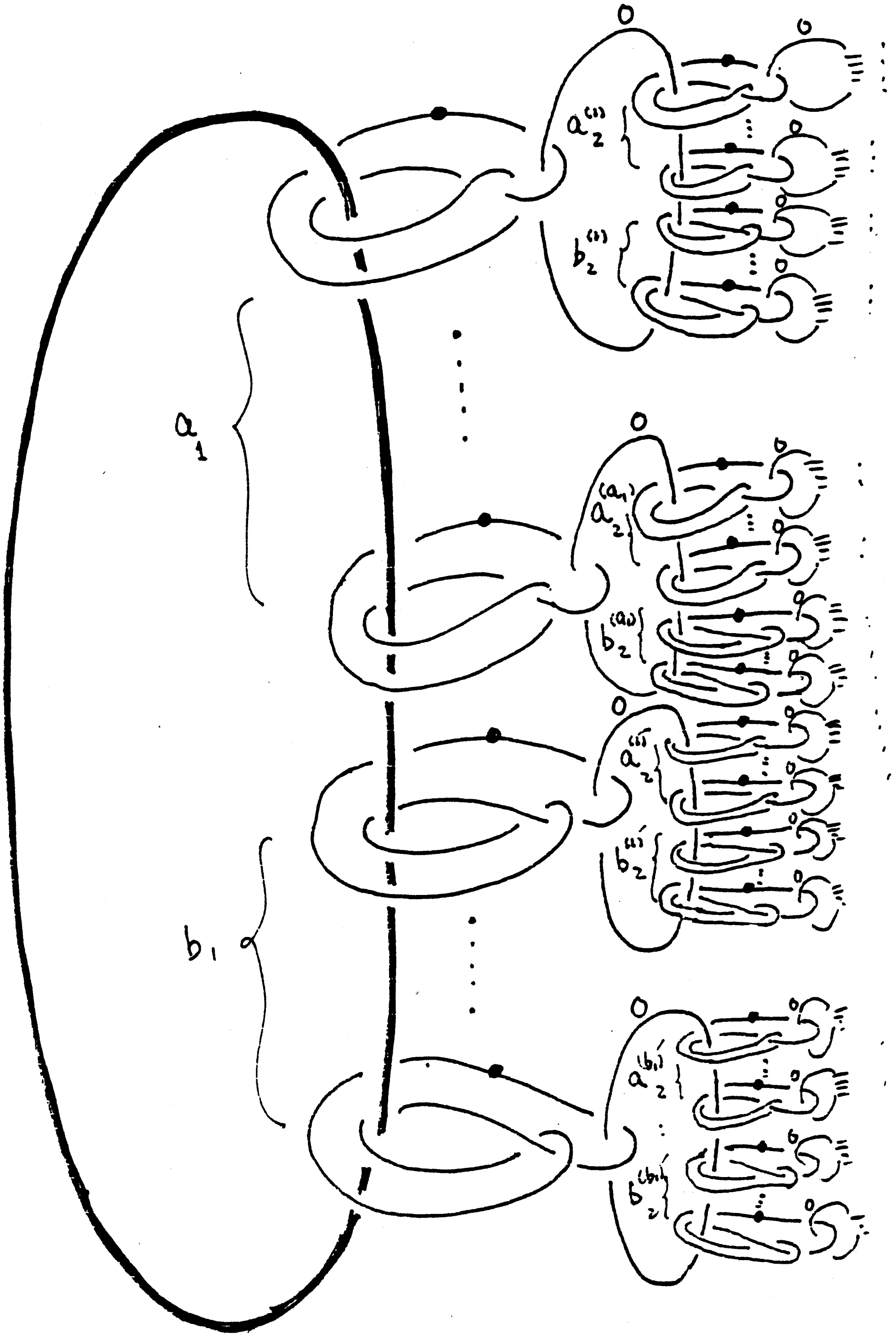
Donaldsonの議論がきわめて強力であることは言うまでもありませんが、それによって（例えば$\mathbb{R}^4$上の微分構造の）全てが判別できる、というものではないように思われますし、また例えばExotic$(\mathbb{R}^4\setminus\{pt\})$の存在であれば、4-多様体中の曲面のsurgeryの考察によっても証明可能なRochlinの定理によって示すこともできます。

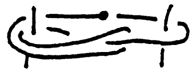
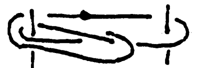
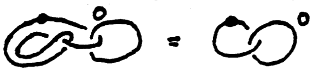
また、2つの4次元多様体が微分同相になるという肯定的結論を得るための（微分同相を構成する）理論が全く欠けているので、例えば、可算無限個の微分構造が発見されている（almost definiteな）コンパクト4-多様体がありますが、それが全ての微分構造を尽くしているかわかりませんし、あるいは、全てのExotic $\mathbb{R}^4$を含む(Universal) $\mathbb{R}^4$の存在も言えますが、そのどの（部分）Exotic $\mathbb{R}^4$が同じか、ということもわかりません。

そのように考えてみると、実際に4次元多様体で何が起きているのか、というようなことを、その構成の仕方からさかのぼって見なおしてみることは、意味のあることだと思います。

そこで、標題に書いたように、3種類の非コンパクト4次元多様体について、そのような観点から順に書きたいと思うのですが、とはいっても、書ける内容も限られているし、同時にあまり大事でないかもしれない事にも触れるかもしれないので、要領を得ず、かつまた、上に述べた状況で、全く洗練されていないことなど、申し訳ありません。

1. Casson Handles : (Interior = standard $\mathbb{R}^4$, boundary = $S^1\times\mathbb{R}^2$). Casson Handles の名は聞かれたことがあると思いますが、これはある種の非コンパクト可微分4次元多様体の総称で、位相的には $D^2\times\mathbb{R}^2$ である、というのがFreedmanによる定理でありました。このCasson Handleを、最も直接的に定義する方法はそのLink表示を与えることです。次ページが、それです。ここで一番左の大きな円周は4次元球 D^4 の表面 S^3 上のunknotted $S^1\times\mathbb{R}^2$ で、これがCasson handleのバウンダリーとなります。その他のcirclesは、その各々は全て S^3 中のunknotted circleですが $\overset{0}{\bigcirc}$ と $\dot{\bigcirc}$ の2種類があります。はじめの $\overset{0}{\bigcirc}$ は、そのcircleに沿って D^4 に4次元2-handleをframing 0でattachすることを意味します。また $\dot{\bigcirc}$ は、(注  = $\dot{\bigcirc}$ unknotted) 4次元1-handleを意味しますが、それはどういうことか、というと、$S^3=\partial D^4$ 中のunknotを境界とするような標準的な2次元円板を D^4 内に考え、その開正則近傍を D^4 から取り除くと、$S^1\times D^3$ が得られますが、これは D^4 に1-handleを付けたことと同じです。つまり $\dot{\bigcirc}$ は、それに沿って D^4 の内側からattachした2-handleを除くものとみなし、それとdualなcoreをもつ1-handleを表わすわけです。図の中の数


0
$a_2^{(1)}$
$b_2^{(1)}$
a_1
$a_2^{(a_1)}$
$b_2^{(a_1)}$
$a_2^{(1)}$
$b_2^{(1)}$
b_1
$a_2^{(b_1)}$
$b_2^{(b_1)}$

$a_1, b_1, a_2^{i_1}, b_2^{i_1}, \cdots$ 等は0以上の任意の整数を表わします。(ここで a_i に対応するlink  と b_i に対応するlink  の違いに注意して下さい)。この表示は右方へ無限に続いているわけですが、これによって表わされているCasson handleは何かというと、無限個の1-handleを付け(あるいはD^4の内側から付けられたdualな2-handleを取り除き)、無限個の2-handlesを全て表示に従ってframing 0でattachした後、バウンダリーとなる左端の$S^1 \times R^3$を除いて残りのboundaryを取ったものです。可微分構造はもちろん、はじめの通常のD^4と、付けられる通常のhandle体から来ているわけです。数字、$a_1, b_1, a_2^{i_1}, b_2^{i_1} \cdots$ 等のとり方によって異るCasson handleができます。例えば全て$=0$とすればLink表示は、左端のcircleだけとなり、これはstandard $(D^2 \times R^2, S^1 \times R^2)$になります。図の中の  が1-handleと2-handleのcancelling pairであることに注意すれば、もし $a_1, b_1, a_2^{i_1}, b_2^{i_1}, \cdots$ が有限個を除いて0なら、(つまりLink表示が有限なら)、右方から左にむかって次々にcancellingが進み、左端のcircleだけが残って、standard $(D^2 \times R^2, S^1 \times R^2)$になります。このように考えると、このLink表示が無限に続いているということが本質的であることがわかると思います。次の2つの命題も、Link表示から直ちに従います。

1.1 Proposition　Casson handleのinteriorは常にStandard R^4とdiffeomorphic. i.e. $\mathrm{Int}(CH) \cong R^4_{\mathrm{stand.}}$

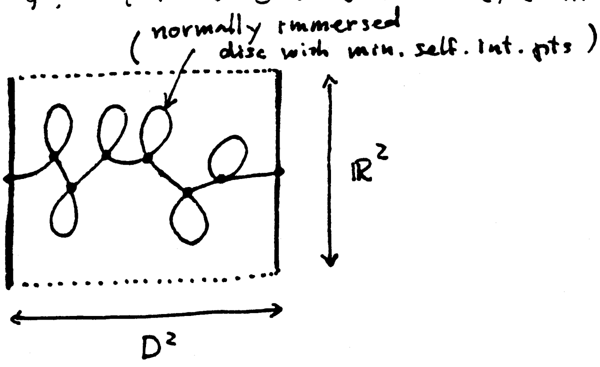
1.2 Proposition　Casson handleは(バウンダリーも含めて)standard R^4にdiffeomorphicに埋め込める。

Casson Handleはもちろん、位相多様体の分類で重要な役割を果しますが、可微分多様体としても興味深い対象です。非コンパクト位相多様体としては非常に簡単な$D^2 \times R^2$であり、かつまた上のPropositionsから、Interiorの微分構造はstandard R^4であるのに、実は無限に異なるdiffeomorphism typesをもつのです。すなわち、

1.3 Theorem (Gompf [G], [K]) $D^2\times\mathbb{R}^2$ 上の可微分構造で、interiorへの制限は standard $\mathbb{R}^4$ となるが、互いに微分同相でないものが(少なくとも可算)無限個存在する。

これは、ホモロジーが有限生成の位相多様体で無限個の異なる可微分構造が確認された最初の多様体です。この証明は次のようにしてなされます。まず $(p,q)\in H^2(S^2\times S^2;\mathbb{Z})$ を $S^2\times S^2$ の、標準的生成元に関する2次元ホモロジー類 $(p,q\in\mathbb{Z})$ とします。もし p と q とが互いに素ならば、このホモロジー類は、$S^2\times S^2$ の中で、4次元球体 D^4 に1つの Casson Handle ($\mathcal{H}_{pq}$) を attach したもの $D^4\cup\mathcal{H}_{pq}$ で表現されます。(そもそも Casson Handle はこのようなことをするために考案されました。これは、上の定義からすぐ従うというよりも、そのようにして考案された Casson Handle が、多様体として上の定義にのべた Link 表示をもつということです。[C] [F]) さて、$D^2\times\mathbb{R}^2$ 上の各可微分構造 $\mathcal{H}$ に対して $i(\mathcal{H}) = \min\{\#$ of self-intersections of normally immersed 2-disk D in $\mathcal{H}$ with $\partial D = S^1\times * \subset S^1\times\mathbb{R}^2 = \partial(D^2\times\mathbb{R}^2)\}$ とおけば、(∂D は $\partial(D^2\times\mathbb{R}^2)$ の中で up to diffeomorphism で一意なので)、これは $\mathcal{H}$ の invariant $\in\{0,1,2,\cdots\}$ になります。従って上の定理を示すためには $i(\mathcal{H})$ がいくらでも大きいものが存在すること、を示せば十分ですが、実際 $i(\mathcal{H}_{pq}) \geq [(|pq|+2)/2]$ (for $|p|,|q|\geq 4$) なのです。それはどのようにして示すのか、とい

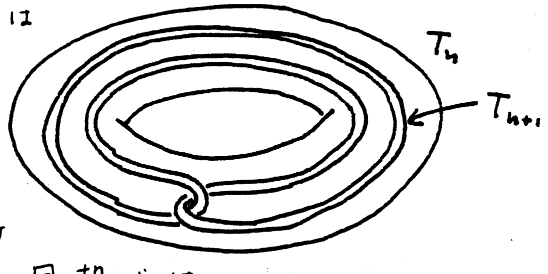
$i(\mathcal{H})=6$ for:



うと．$S^2\times S^2$ の中の immersed 2-sphere（= $\mathcal{H}_{pq}$ 中の immersed 2-disc と．4-球体 D^4 中の standard な 2-disc を合せたもの）の self-intersections は $S^2\times S^2\#\overline{\mathbb{C}P^2}$'s の中で適当に解消され．（適当なホモロジー類の追加をした後）それを blow down することによって definite 4-manifold を作ることができますが．ここで．はじめの self-intersection が少いと．出来る definite 4-manifold の交叉型式が non-standard となって．それが standard であることを主張する Donaldson の定理に反するのです．（1.3の証明の outline おわり）

1.4．簡単な decomposition argument の例（Andrews-Rubin decomposition）．それでは．$D^2\times\mathbb{R}^2$ 上の可微分構造の状況がよくわかったか．というと．そうでもありません．ちょっと考えてみれば．Link表示で定義した Casson Handles が．無限個の diffeo types をもつということ．それは例えば 1.3の証明のように．$(p,q)\in H_2(S^2\times S^2;\mathbb{Z})$ を表わす immersed 2-sphere の self-intersection pts の数が．(p,q) を大きくすれば．いくらでも多くなる．という事から従ったわけですが．その証明は困難であっても，直観的には認めやすいものと思われます．けれども．Casson Handle が $D^2\times\mathbb{R}^2$ と homeomorphic という事実は直観からは．かなりかけ離れているように思います．逆に言えば．そのような事がおこってしまうので．定理 1.3 の証明にしても．Donaldson の定理のような大がかりな道具立てを必要とする程．微妙な問題となってしまうと言えると思います．ですから Casson handle $\approx(D^2\times\mathbb{R}^2,\partial)$ の位相同型がどうなっているのか．を見ることは．大切なことだと思います．もちろんそれを見るためには Freedman の4次元 Poincaré 予想の証明をすることに他ならないので，ここではできませんが，そこで用いられた位相同型を作る方法：decomposition 理論の最も簡単な例をやることは意味があると思います．実際次の例は Freedman の証明の1つの動機づけを与えたものです

$W \subset \mathbb{R}^3$ を Whitehead continuum とします。これは unknotted solid tori $\mathbb{R}^3 \supset T_1 \supset T_2 \supset \cdots \supset T_n \supset T_{n+1} \supset \cdots \supset W = \bigcap_{n=1}^{\infty} T_n$ による定義列をもち、各 T_{n+1} は T_n の中に右図のように入っています。W はいわゆる cell-like set で、$\mathbb{R}^3$ において W を1点につぶした空間 $\mathbb{R}^3/W$ は $\mathbb{R}^3$ と homotopy 同値ですが、同相ではありません（多様体でないからです）ところが、

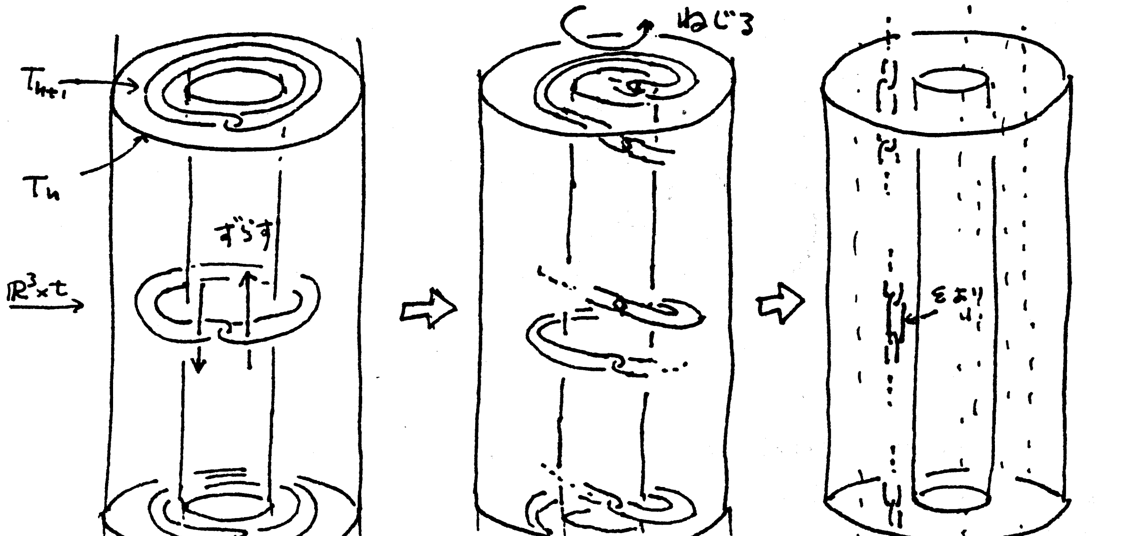


Proposition (Andrews-Rubin) $(\mathbb{R}^3/W) \times \mathbb{R}^1 \underset{\text{位相同型}}{\approx} \mathbb{R}^4$. （この場合

証明には Bing shrinking criterion を使うのですが、それは大まかに言えば、いくらでも小さい $\varepsilon > 0$ と、いくらでも大きい番号 n に対し、自己同相 $h : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^1$ で、

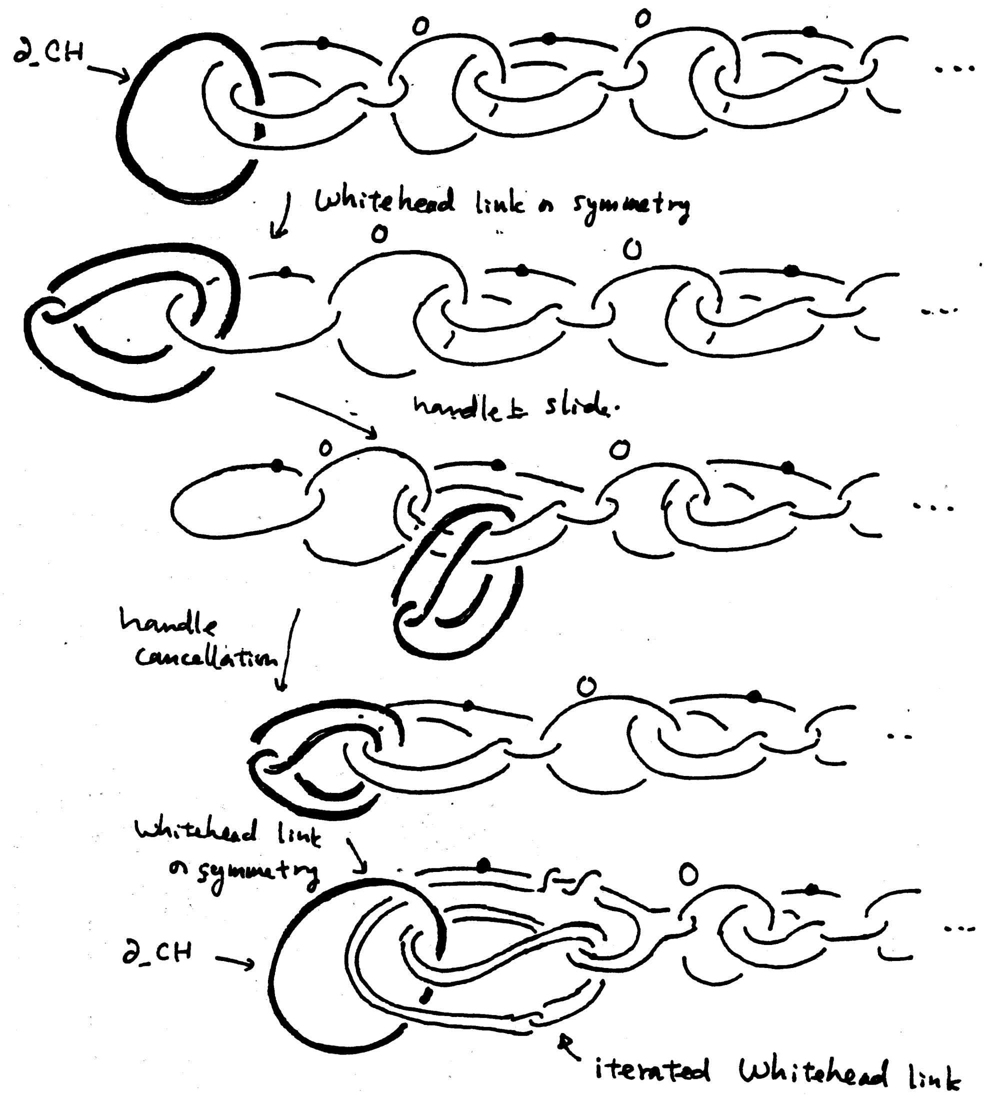
$\mathrm{Support}(h) \subset T_n \times \mathbb{R}^1$, $\quad h(W \times \{t\}) \subset T_n \times (t-\varepsilon, t+\varepsilon)$,

$\mathrm{diam}\, h(W \times t) < \varepsilon$ （各 $t \in \mathbb{R}^1$）となるものが存在すれば、つまり、あまり周囲を動かすことなく一斉に $W \times \{t\}$ を小さくできれば、つぶしてしまっても、homeo type は変わらないという、もっともなものです。ここで自己同相 h は、第4の方向（$\times \mathbb{R}^1$）を用いて巧妙に構成されます。その状況は下図を見れば一目瞭然でしょう。



1.5 Casson handle で iterated Whitehead links が出る状況:

それでは、どのようにして Casson handle と上に書かれたような Whitehead continuum とが関連するのか、ということを最も simple な Casson handle のときに示す図を書いて、このセクションを終えます。



2. Exotic $\mathbb{R}^4$'s

2.1 (Uni-)versal $\mathbb{R}^4$. 4次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^4$ の Exotic smoothing の存在は Freedman の位相的な議論と Donaldson の定理を仮定すれば比較的容易に導くことができます。$\mathbb{CP}^2$ から適当な (4-ball) $\cup$ (Casson handle) (の位相的スパイン $\approx S^2$)

をぬきとると、残り（complement）は Exotic $\mathbb{R}^4$ となります。この場合の Exotic $\mathbb{R}^4$ はコンパクト多様体 $\mathbb{CP}^2$ に smooth にうめこまれています。さらに S^4 に smooth にうめこまれた Exotic $\mathbb{R}^4$ も存在します。しかし、ここでは、多くの Casson Handles を有効に使って、"最も Exotic な" Exotic $\mathbb{R}^4$ を作ってみます。これは Freedman と Taylor による構成です

<u>Theorem</u>（Freedman－Taylor [F-T]）$\mathbb{R}^4$ と位相同型な smooth 4-manifold $\mathcal{U}$ が構成できて、$\mathbb{R}^4$ と位相同型な任意の smooth 4-manifold は $\mathcal{U}$ の中に smooth に埋め込める。

この $\mathcal{U}$ は、どんなコンパクト（4-）多様体にも smooth に埋め込めないのではないかと予想されています。どんなコンパクト 4-多様体の中にも、埋め込みの像の closure が、位相的 locally flat 4-ball になるように埋め込むことはできないことまではわかっています。また一意性：同様の性質をもつ $\mathcal{U}'$ があれば $\mathcal{U} \cong \mathcal{U}'$ か？は、証明されていません（一意性が成立する根拠はないと思います）。

この $\mathcal{U}$ を構成するためには下の Proposition を示せば十分です。

<u>Proposition</u> [F-T]．$\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$ の universal smoothing H が一意に存在する。すなわち、$\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$ と位相同型な smooth 4-多様体は必ず H の中に smooth に埋め込める。また、このような性質をもつ H' は常に H と微分同相。

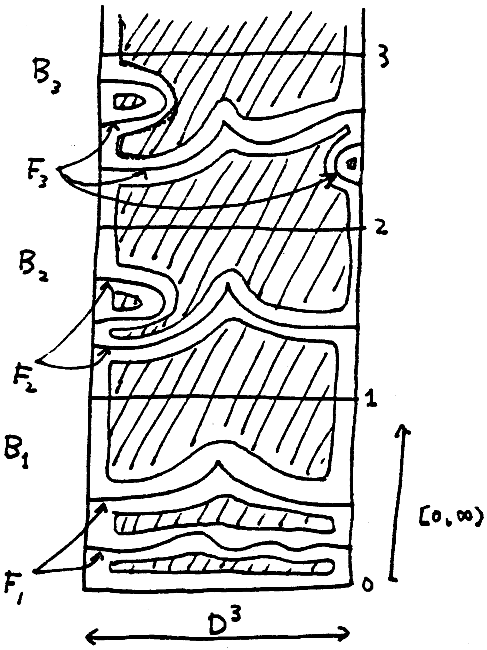
上の Proposition が言えれば $\mathcal{U} = \mathrm{Interior}(H)$ とすればよいのです。実際、任意の Exotic $\mathbb{R}^4$，$\mathcal{R}$ に対し、$\mathcal{R}$ の end に向っていく smooth arc をとり、その管状近傍を用いれば $\mathcal{R}$ を $\mathbb{R}^4 \cup$（open 3-disk のバウンダリー）の smoothing に拡張でき、これは $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$ の smoothing だと思えるからです。

Proposition の H を構成するために、$\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$ を $D^3 \times [0, \infty)$ と書きなおします（角は適当にとります）。次に

$i(n)$　$n=1,2,\cdots$ を、例えば $1,2,1,2,3,1,2,3,4,1,2,3,4,5,1,\cdots$ というように、どの自然数も無限回現われるような数列とします。次に Casson Handle の可算列 $\mathcal{H}(1), \mathcal{H}(2), \cdots$ をとるのですが、これは、任意の Casson Handle $\mathcal{H}'$ に対しある $\mathcal{H}(i)$ が、バウンダリーが一致するように $\mathcal{H}'$ に smooth に埋め込めるというようにします。前セクションの定義から、Casson Handle の Link 表示は非可算無限個あるのに、このようなことができるというのは、どんな Casson Handle に対しても、その6段目までの中に、ある Casson Handle が埋め込める、という Freedman の発見があるからです。従って可算個の可能性しかない6段タワー各々に対してそれに含まれる Casson Handle をとればいいわけです。

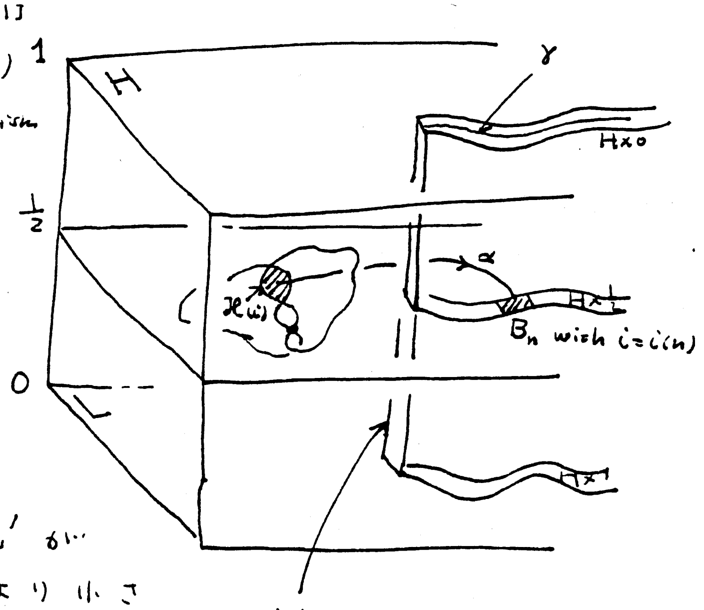
次に各 $\mathcal{H}(i)$ に対し、位相的 Core $\mathcal{C}(i)$ をとります。($\mathcal{C}(i) \approx D^2$) この $\mathcal{C}(i)$ は、実際には中心の1点以外で smooth にとれることがわかります。従ってこの1点を中心とする、small 4-ball $B(i)$ (= standard 4-ball) をとって、$F(i) = B(i) \cap \mathcal{C}(i)$ は、$B(i)$ の中心以外では smooth な, locally flat surface で、$\partial F(i) \subset \partial B(i)$ は、smooth link とすることができます。

そこで $\mathcal{H}_n = \mathcal{H}(i(n))$, $B_n = B(i(n))$, $F_n = F(i(n))$, $L_n = \partial F_n$ とおき、$D^3 \times [0,\infty)$ の各 $D^3 \times [n-1,n]$ に B_n を $L_n \subset \partial D^3 \times (n-1,n)$ となるように並べます (smooth に埋め込み：右図)。次に、各 F_n の近傍に、(surface F_n 上の unique C^∞ structure) × (fiber $\mathbb{R}^2$) の形の smooth structure をとります。これは $D^3 \times [0,\infty)$ の smooth structure と一般には compatible ではありませんが、∂F の付近では $\partial(D^3 \times [0,\infty))$ の $D^3 \times [0,\infty)$ における近傍の smooth structure と一致



しています。そこで $D^3\times[0,\infty)$ における $\partial(D^3\times[0,\infty))\cup(\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n)$ の近傍（前ページの図の白い部分）に smooth structure が入っているわけですが、この smooth structure は Quinn の結果（$\pi_{n-1}(Top(4)/O(4))=0$, $n\leq 3$）と immersion theory から全体（図の ▨ 部分）へ拡張され、これによって $D^3\times[0,\infty)$ の smooth structure が得られます。これが Proposition の Universal half-space H です。

このHが Proposition にのべたような universality をもつことは次のように証明されます。L を $D^3\times[0,\infty)$ の任意の smooth structure（smooth 4-manifold）とします。このとき $(D^3\times[0,\infty))\times[0,1]$ に smooth structure W^5 をとって $(D^3\times[0,\infty))\times\{0\}$ では L、$(D^3\times[0,\infty))\times\{1\}$ では H となるようにすることができます（smooth h-cobordism）。そこでこの h-cobordism の flow の singularity に触れないように (smooth) proper half-open arc $\gamma\subset H$ をとって、smooth なうめこみ $W^5\supset\gamma\times[0,1]$ をとります。次にこの近傍 $n(\gamma)\times[0,1]$ の smooth structure を $H\times[0,1]$ でとりかえます。少し説明が大ざっぱになりますが、



この $W'=(W$ の $n(\gamma)\times[0,1]$ を $H\times[0,1]$ でとりかえたもの$)$ は smooth product cobordism になります。それはどうしてかというと、本質的な問題となるのは (1/2)-レベルでの 2-handle と 3-handle の handle cancellation ですが、このための Whitney trick を行なう部分に Casson Handle $\mathcal{H}'$ がとれます。必要ならより小さいものととりかえることによって $\mathcal{H}'=\mathcal{H}(i)$ $(\exists i)$ とできます。

ポイントは、この$\mathcal{H}(i)$が$D^2\times\mathbb{R}^2$とdiffeomorphicであったなら、smooth Whitney trickが行なえてsmooth product structureが得られることになりますが一般に$\mathcal{H}(i)$は（前セクションTh 1.3のとおり）$D^2\times\mathbb{R}^2$とdiffeomorphicではありません。けれどもHの作り方からあるnで$i=i(n)$となり、この$B_n\subset H$は$\mathcal{H}(i)$のcoreの中心がsmoothになってしまうようにsmooth structureが入っていました。従って（1/2）レベルにおいて、$\mathcal{H}(i)$の中心から、$n(r)\times\{1/2\}$ととりかえた$H\times\{1/2\}$の中のB_nにむかうarc αに沿うisotopyによって$\mathcal{H}(i)$の中心のBallをB_nにもっていき、$\mathcal{H}(i)$のcoreをF_nとつなげることによって、smooth Whitney trickを行なうsmooth Whitney diskができてしまうわけです。各iに対し$i=i(n)$となるB_nは、endへ向って無限にあるわけですから、全てのWhitney diskを同時にとることができるわけです。

このようにW'がsmooth productになってしまうので、diffeomorphism $(L\setminus n(r)\times\{0\})\cup(H\times\{0\})\cong(H\setminus n(r)\times\{1\})\cup(H\times\{1\})$ができます。ここで$L\setminus(n(r)\times\{0\})\cong L$ですから$L$の右辺へのinto diffeomorphismができています。ところでですが、ここでLのところを standard $D^3\times[0,\infty)$でおきかえてみると、左辺$=H\times\{0\}$となり右辺が実はHとdiffeomorphicであることがわかります。従ってLは実はHへのinto diffeomorphismをもったことになります。

このようなHがuniqueであることも同様に証明されます。

2.2 "Small" exotic $\mathbb{R}^4$. 今、最も"大きい" exotic $\mathbb{R}^4$ Uを作ってみましたが（Freedman - Taylorに従って）、それが実際$\mathbb{R}^4_{\mathrm{stand}}$とdiffeomorphicでない、ことを示すことは別問題で、例えば、$\mathbb{C}P^2$の中にexotic $\mathbb{R}^4$を作って、それがDonaldsonの定理から$\overline{\mathbb{C}P}^2$には埋め込むことができないことがわかるけれども、Uは、そのexotic $\mathbb{R}^4$を含むので、

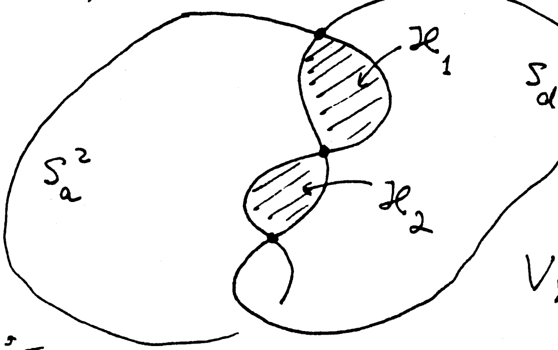
U も $\overline{\mathbb{CP}}^2$ には埋め込めないから exotic である、と言えばなんとか exotic であることだけは言えるわけです。もう少し詳しく見れば、U は、どのような exotic $\mathbb{R}^4$ の中に埋め込めたとしても、必らず image が non-compact になる（end に触れてしまう）ことがわかります。従ってどんな compact 4-manifold にも、topological locally flat 4-ball の interior になるような埋め込みはできない。多分、compact 4-manifold へのいかなる埋め込みもたないであろうと予想されます。従って U は、"非常に大きい" わけです。

それでは standard $\mathbb{R}^4$ に埋め込めるような exotic $\mathbb{R}^4$ は存在するでしょうか。答えは Yes です。これは Donaldson による compact h-cobordism conjecture への反例から従います。

<u>Theorem</u> (Donaldson–Freedman) standard $\mathbb{R}^4$ に（従って S^4 に）埋め込める exotic $\mathbb{R}^4$ が存在する。

今、5次元 compact h-cobordism (W^5, V_0^4, V_1^4) で、$V_0 \cong V_1$ でないものが存在する (Donaldson)、を仮定し、また proper homotopy $\mathbb{R}^4$ は $\mathbb{R}^4$ と homeo (Freedman) を仮定して、上の "small" exotic $\mathbb{R}^4$ が存在するということを証明します。

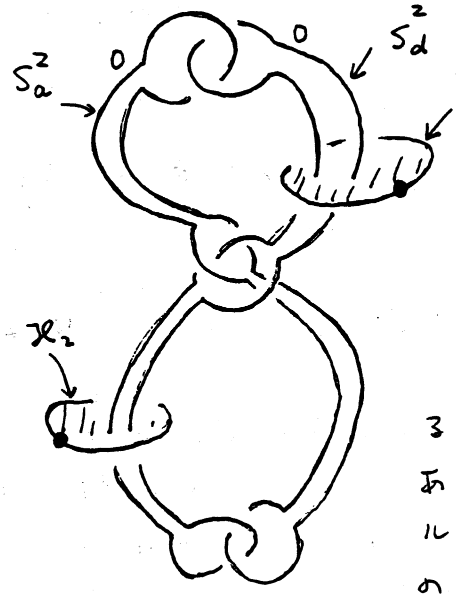
W^5 の $(1/2)$-level $V_{1/2}$ を見ると、ここには 3-handle と 2-handle から来る ascending spheres $S^2_{a,1}, S^2_{a,2}, \cdots S^2_{a,n_a}$ と discending spheres $S^2_{d,1}, S^2_{d,2} \cdots S^2_{d,n_d}$ があるわけですが、その最も典型的な状況は右のようになっています。



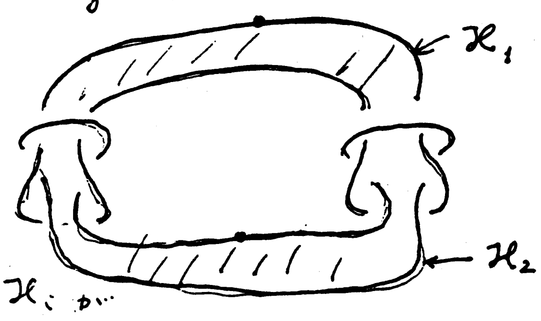
簡単のためこの状況で説明をすると、右図のように2つの Casson Handles $\mathcal{H}_1$ と $\mathcal{H}_2$ とがとれて、それらを合わせた全体のホモトピー

タイプは $S^2 \vee S^2$ になっています。$V_{1/2}$ において S_a^2(達)を surgery したものが V_1, S_d^2(達)を surgery したものが V_0 になっていることに注意して下さい。今 $U_{1/2} =$ (($S_a^2 \cup S_d^2$(達))の近傍)$\cup$($\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2$(達)) とおき、$U_1 \subset V_1$ を $U_{1/2}$ の S_a^2(達)を surgery したもの、$U_0 \subset V_0$ を、$U_{1/2}$ の S_d^2(達)を surgery したもの、とおくと、U_0 も U_1 も proper homotopy $\mathbb{R}^4$, 従って topological には $\mathbb{R}^4$ であることがわかります。

例えば前ページの図の場合 $(S_a^2 \cup S_d^2)$ の近傍 $\cup(\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2)$ を4次元多様体の Link 表示で書いてみると左下図のようになります。ここで3つの は3つの交叉に対応し $\mathcal{H}_i$ は、この 1-handle を消すように(D^4 の内側から) Casson handle がついているということ、従って 自身は Casson handle の cocore になっています。そこで S_a^2 を surgery するということは、S_a^2 に対応するループを 1-handle と思うことであり そうするとその 1-handle のループと S_d^2 に対応する 2-handle のループとは Cancelling pair となります。

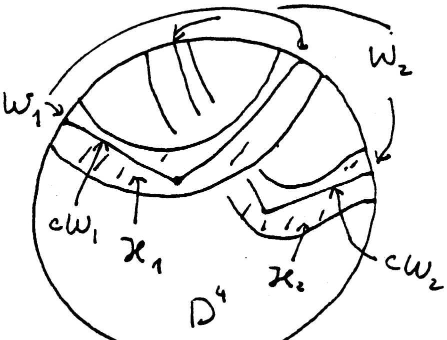


そこで実際に $\overset{S_a^2\ 0}{\bigcirc}$ を (1-handle) でとりかえ(surgery し) handle slides の後に cancelling を行なってみると、結局右図のよく知られた Ribbon Link になります。2つの標準的スライスが $\mathcal{H}_i$ の cocores となっているわけです。



そこで今 Casson handles $\mathcal{H}_i$ が

が最も簡単なものとすると、
これは 2-handle $D^2\times D^2$ の cocore のバウンダリー（バンド円周）に沿っておかれた Whitehead continuum W_i の，中心からの cone cW_i を $D^2\times\mathbb{R}^2$ からとりのぞいたもの $\mathcal{X}_i=(D^2\times\mathbb{R}^2\setminus cW_i)$ となります．従って前ページ右下図の Link に沿って2つの Whitehead continua W_1, W_2 を並べ，各スライスの中心から cones cW_1, cW_2 をとれば（右上図）$\mathrm{Int}\,D^4\setminus(cW_1\cup cW_2)$ が（この簡単な場合についての U_1 ということになります。）一般の



このように見れば U_0 も U_1 も $\mathrm{Int}\,D^4\cong\mathbb{R}^4_{standard}$ の中に C^∞ に埋め込まれるということがわかります。これら U_0 と U_1 がともに $\mathbb{R}^4_{standard}$ と diffeomorphic になってしまうとどうしていけないかというと，h-cobordism W^5 は U_0, U_1 の外では product になっているわけですが，もしともに $\cong\mathbb{R}^4$ ならば（U_0, U_1 が S^4 に C^∞ にうめこめることを用いれば）この C^∞ product による end $U_0\underset{diff}{\cong}$ end U_1 を $U_0\underset{diff}{\cong}U_1$ に拡張することができ，これは $U_0\cong U_1$ (diffeomorphic) を意味してしまうからです。

3. $\mathcal{S}_4$ で $\mathbb{R}^4$ 上の oriented smooth structures 全体（(ori-pres-) diffeomorphic なものは identify する）とします。$\mathcal{S}_4\ni R_1, R_2$ に対し $R_1\le R_2 \underset{def}{\Leftrightarrow} \exists$ into (ori-pres) diffeomorphism $R_1\to R_2$ とすると，明らかに $R_1\le R_2$ & $R_2\le R_3\Rightarrow R_1\le R_3$．けれど前セクションから

3.1 $R_1\le R_2$ & $R_2\le R_1\Rightarrow R_1=R_2$ は成立しない．

実際 2.2 の exotic $\mathbb{R}^4$ は standard $\mathbb{R}^4$ の中に埋め込めましたが，全ての exotic $\mathbb{R}^4$ は standard $\mathbb{R}^4$ を含んでいます．

3.2 極大元 $\mathcal{U}\in\mathcal{S}_4$ が存在する

（2.1）から．

また $\mathbb{CP}^2$ に含まれる exotic $\mathbb{R}^4$ $\mathcal{R}_1$ で $\overline{\mathbb{CP}^2}$ には埋め込めないものがありますから，$\mathcal{R}_2 \equiv (-\mathcal{R}_1)$ については $\mathcal{R}_1 \leqq \mathcal{R}_2$ でも $\mathcal{R}_2 \leqq \mathcal{R}_1$ でもありません．
従って"$\leqq$"関係は，きわめて大ざっぱには右のようになっています。

((Uni-)versal $\mathbb{R}^4$ ('s ?))

∪| ∪| ∪|

… exotic $\mathbb{R}^4$'s …

$\leqq$

$\geqq$

∪| ∪| ∪|

(small exotic $\mathbb{R}^4$'s

∩| ∪|

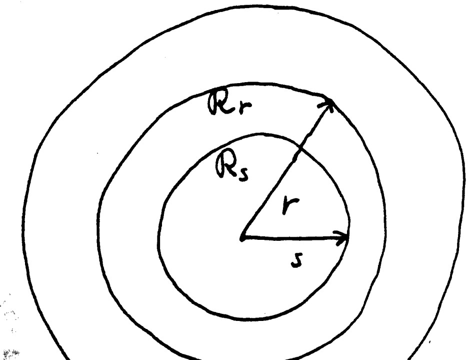
standard $\mathbb{R}^4$)

どのくらい沢山の exotic $\mathbb{R}^4$ が存在するかについては Taubes による次の結果があります

Theorem (Taubes [T]) 非可算無限個の異なる exotic $\mathbb{R}^4$'s が存在する.

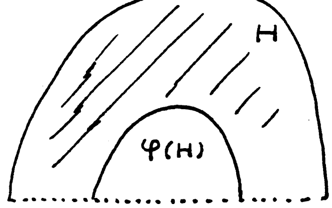
この非可算無限個は例えば，適当な exotic $\mathbb{R}^4$ $\mathcal{R}$ をとり，その topological parametrization $\mathcal{R} \approx \mathbb{R}^4$ を固定しておいたとき，半径 r の開円板に induce される smooth structure を $\mathcal{R}_r$ とすれば(下図) 十分大きな r_0 に対して $\{\mathcal{R}_r \mid r \geqq r_0\}$ として得られます (i.e. $s > r \geqq r_0$ に対し $\mathcal{R}_r \neq \mathcal{R}_s$).

これを見ると，この $\{\mathcal{R}_r \mid r \geqq r_0\}$ はいかにも連続的につながっていますが，$\mathcal{S}_4$ 全体に適当なトポロジーを入れるのは，困難なようです．



例えば $\mathcal{E} = \mathcal{E}mb(\mathbb{R}^4, \mathcal{U})$ $\mathbb{R}^4$ から (Uni-)versal $\mathbb{R}^4$, $\mathcal{U}$ への topological embeddings とおけば embedding から induce される $\mathbb{R}^4$ 上の smooth structure を対応させることによって，全射 $\mathcal{E} \xrightarrow{q} \mathcal{S}_4$ ができますが，この quotient map q の様子が全くわからないので，$\mathcal{S}_4$ に入る quotient topology がどのようになるのか（例えば Hausdorff か）よくわかりません（例えば $\mathcal{E}$ に compact-open topology を入れると、$\mathcal{S}_4$ の open sets は $\mathcal{S}_4$ と $\emptyset$ だけになります）

もう少し有効かもしれないのは $\mathcal{E}' = C^\infty$ proper emb (H, H) = Universal Half space H の H 自身の中への smooth proper embeddings 全体、を用いるものです。(2.1)の議論によって、$\varphi : H \hookrightarrow H$ に対して $\mathrm{Int}\, H \setminus \varphi(H)$（右図▨部分）を対応させると、全射 $\mathcal{E}' \xrightarrow{q'} \mathcal{S}_4$ が得られます。利点はもちろん φ が smooth にとれることですが、それでも quotient map q' の様子はよくわかりません。



あるいはもっと naive に $\mathcal{S}_4 \ni R_1, R_2$ に対して $d(R_1, R_2) \in [0, \infty]$ を $d(R_1, R_2) = \inf_{d, \bar{d}} (\inf_h (\log \max(|h|, |h^{-1}|)))$ ここで d と $\bar{d}$ はそれぞれ R_1, R_2 の smooth structure と compatible な complete metric 全体をうごき、h は、orientation preserving homeomorphism $h : R_1 \to R_2$ 全体をうごき、$|h| = \sup_{x \neq y, \in R_1} \dfrac{\bar{d}(h(x), h(y))}{d(x, y)} \in [0, \infty]$ です。[S] では compact manifolds に対して次元だけできまる constant $c_n > 0$ があって、$d(M_1, M_2) < c_n \Rightarrow M_1 \cong M_2$ が示されていますが、これは non-compact な場合にも拡張できてとくに次を得ます。

<u>Proposition</u> $\mathcal{S}_4$ は distance d によって discrete space になる。

従って、この distance d は（$\mathcal{S}_4$ については）強すぎると思えます。

4. 一般の非コンパクト4次元多様体の微分構造について。

コンパクト4-多様体の中には、微分構造をもたないもの、あるいは、もつかどうかわからないものなどがあ

りますが、Quinn の smoothing についての結果から 全ての連結非コンパクト多様体は可微分構造をもつことが従います。
(4次元位相)

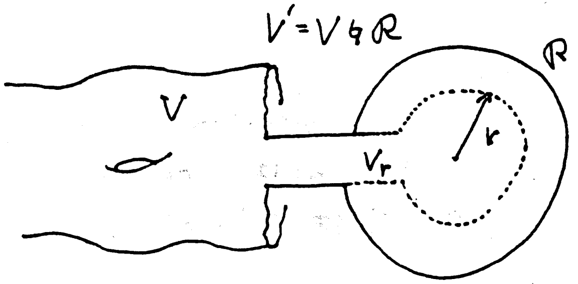
またコンパクト微分多様体上の可微分構造は、あっても高々可算個で、また実際可算無限個の異なる可微分構造をもつ4次元閉多様体もあります。これに対して、上に触れたように、最も簡単な$\mathbb{R}^4$でさえ非可算無限個の可微分構造をもつのですから、次はもっともなQuestionと思います。

<u>Question</u> 非コンパクト4次元多様体は(全て)非可算無限個の smooth structures をもつか？

このQuestionがもっともと思える1つのconstructionを示します。任意の非コンパクト4-多様体Vに対して、適当なexotic $\mathbb{R}^4$, $\mathcal{R}$ をend connected sumで付け: $V' \equiv V \natural \mathcal{R}$, この中に、Taubesのときのように、$V$と半径$r$の$\mathcal{R}$中の開円板を付けたもの

$V_r \equiv V \natural \mathcal{R}_r \subset V'$

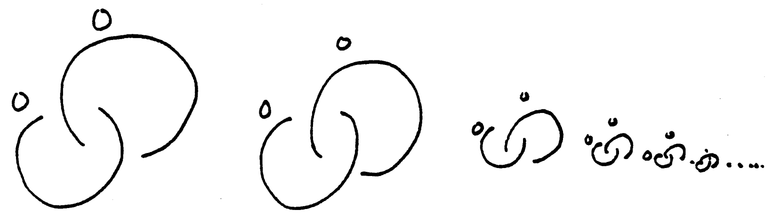
を考える(右図)と これはV上の連続濃度のsmooth structureを与えるでしょうか。



もちろん、V = standard $\mathbb{R}^4$であればそうなりますがVが十分複雑なsmooth structureをはじめからもっている場合には、必ずしも$V_r \not\cong V$とはなりません。例えばV = (Uni-)versal $\mathbb{R}^4$ や V = Universal half-space H などの場合には $V_r \cong V$ $(\forall r)$ となってしまいます。しかしこれらの場合は、Vをもっと簡単なsmooth structureでとりかえておけばよいわけで、そうすれば上のconstructionは成立するわけです。

そのような観点から見ても興味深い1つの開4-多様体を紹介して、おわりにします。

今、次ページのような無限Link表示を考えます。



多様体 $P \equiv \#_{n=1}^{\infty}(S^2\times S^2)_n$ は、上の表示に従って D^4 に可算無限個の 2-handles を attach した後、Interior をとることによって得られる4次元 smooth open manifold with one end です。smooth structure はもちろん、構成の中の standard 4-ball D^4 と standard 2-handles から来ている最も standard なものです。

この多様体が興味深いのは、この standard な structure が、すでに最も複雑な structure でもあること、つまり、P の他の smoothing をその部分多様体として含んでいるということが、比較的容易にわかる（あるいは (Uni-)versal $\mathbb{R}^4$, U なども C^∞ に埋め込める）からです。従って上の Question に対して反例があるとすれば、この多様体であろうと思います。

[F-T] M. H. Freedman & L. R. Taylor. A Universal smoothing of four-space J. D. G

[G] R. Gompf, Infinite families of Casson Handles and Topological disks, Topology 23 (1984) 395-400

[K] K. Kuga, On immersed 2-spheres in $S^2\times S^2$, to appear

[T] C. Taubes, Gauge theory on asymptotically periodic 4-manifolds, J. D. G

[S] Y. Shikata, On a distance function on the set of differentiable structures, Osaka J. Math (1966) 65-79

(R3.2)

コンピューター入門記

東工大　森田茂之

昨年7月末念願のパソコンが大学の自室に入り自由に使えるようになった。3年程前から研究上、たとえば自由群の自己同型のiterationなどを計算する必要がでてきた。そういう計算を手で実行し、何度も間違いをするたびに、パソコンを使って何とか正確に計算できないものかと、思いつづけていた。そこで早速パソコンで計算しようと勢いづいたのはよいが、何しろmainスイッチの場所さえはっきりとは知らないのだから、そんなことがすぐにできるわけもない。機械を設置してくれた人が「できるだけ多く使って機械をためしてみて下さい。1ヶ月以内に不具合が見つかった場合には、そっくり取り替えることができますので。」というのを「わかりました。」とは言ったものの、内心は心細いかぎりであった。それでも説明書の中で一番うすい初心者向けのものをひっくり返しながら、2、3日後には3, 4次の行列の行列式がでてくるプログラムを作ることができた。

しかし本来の目的の達成にはまだまだ「道遠し」という感じであった。もう夏休みに入っていたこともあって、8月中は一度もパソコンにはふれずに過ごした。

9月になってパソコンにはうってつけと思われる次のような計算をする必要がでてきた。$\mathbb{Z}^8$ のある部分集合（2次の超曲面）上定義される $\mathbb{Z}^{21}$ へのある2次の写像の image が生成する $\mathbb{Z}^{21}$ の部分加群を決定するというものである。今度は中位の厚さの説明書と首っぴきで何とかプログラムをこしらえた。プログラムと言ってもそれは $\mathbb{Z}^8$ の条件をみたすベクトルを input すると、結果の21次元のベクトルがでてくるという簡単なものである。条件をみたす8次元のベクトルを50個程データとして input しプログラムを実行させてみた。はじめのうちは、dot printer から整然と21次元のベクトルが打ち出されて来て喜んだのも束の間、突然成分が異様に大きくなってくる。input したベクトルの成分から言って、こんなに大きな成分がでてくるはずはないのである。途中でプログラムの実行を中止することもできず、いまいましい思いで、忠実に意味のないベクトルを打ち出し続ける printer をながめていた。数分後にようやく静かになったパソコンに、件のプログラムをうつし出して穴のあくほど調べてみた。原因が、データとデータの間に1ケ所コンマを入れ忘れていることだと気がつくまでには、相当時

間がかかった。

コンピューターの性質 I

計算は忠実にかつ正確迅速に実行するが
融通が全くきかない。

(勿論この"融通がきかない"というのは正確さという利点の裏返しであって、一概に悪いとも言ってはいられない。コンピューターが勝手に判断して計算を進めては困るのである。) こうしてあれこれ失敗はしつつも、1週間ほどで目的は達成された。しかしあまりに長時間同じ姿勢をとったためか首筋を痛めてしまい、そのあと1週間ほどは文字通り首が回らなくなってしまった。

9月の末に今度は次のような計算の必要がでてきた。各成分が多変数の多項式であるような行列の行列式の計算である。行列の size はいつも偶数 $2g$ で変数の数は $g(2g+1)$ である。$g \leqq 2$ までは手で容易に計算ができるが, $g=3$ ですでにやる気がなくなってしまう。パソコンでやるといっても今までのように数の計算ではないので、そのままでは全くうけつけてくれない。ハタと困ったのであるが何かのときに東大の村山光孝氏に聞いたところ、そんな計算は「reduce」というソフトを使えばわけなくできるというのである。あまりに事も無げに言うので、多少拍子ぬけがしたのだが、とにかくその reduce なるものの使い方を教わることにした。

となりに村上氏やまた増田一男氏に座ってもらい、言われる通りにキーを押すのであるが、実際にデータを入れて計算ができるようになるまでの前段階の操作がすぐに複雑怪奇である。そう感じた主な原因は、各操作の意味がほとんどわからなかった点にあるのだが、それらの意味をくわしく教わりながらやった方がよかったかというと、そうではないと思う。はじめのうちはとにかくやみくもに、各操作はほとんど儀式のようにやったのであるが、結果的にはそれが早道だったと思っている。いずれにしてもこれ以後村山氏には具体的操作の点で、また増田氏には計算がうまく行かない時の相談相手として、いろいろと面倒なことを頼むことになってしまった。話を $g=3$ のときの行列式の計算にもどすと、問題の行列を input し行列式を計算する命令をあたえると、ただちに画面に答をだしはじめた。ところがそれは何十行も何百行も続くかと思われる長い多項式で、それが画面の下から上に次から次へと流れるように写し出されるのである。スピードがあまり早いので何が何だかさっぱりわからない。そこで今度は答を printer に出すことにした。ところが、スピードは遅くなり、答の多項式の様子は見られるようになったのはよいが、今度は打ち出し終わるのに何分かかるかわからないというのである。幸い知りたいのは行列式全体ではなくて、その各項のある一次結合なのである。そこでその一次結合を出す命令を村山氏に与えてもらい、キーをおしたところ答が数行に納まって出てきた。ある程度予想はしていたとは

いえ大変感激した。この結果から一般のgに対する答は容易に想像でき、答がわかってしまえばそれに証明をつけるのは簡単であった。

10月に入って今度は成分が多項式ではなく、いろいろな群の群環の元であるような行列の積や行列式の計算が必要になってきた。群と言ってもはじめはアーベル群であったので、成分が多項式から有理式に変わるだけであり、「reduce」は何の苦もなく計算してしまう。しかしできれば群環の augmentation ideal のいくつかの巾を modulo にした計算がしたかった。その方が見通しがよくなるし、多分計算のスピードも早くなると思われたからである。このとき役に立ったのは阪大の落合豊行氏の助言である。氏には直接会ったとき、または電話で何回か相談して有用なことをいろいろと教えてもらったのであるが、とくに「reduce」用のプログラムのひとつの例が大変役に立った。それは、ある非可換有限群に関する短い例題なのだが、要するに「reduce」には種々の演算の規則を教えることができるというのである。ideal のいくつかの巾を modulo にする位は朝飯前と思われた。実際プログラムは簡単に書けたのだが、この頃になるとその長さはA4の紙で3～4枚となり、input ミスもそれだけ多くなってくる。画面に error message が出るたびにプログラムの修正をするのだが、一番多いときは数十回もの訂正が必要であった。そのため「reduce」のある計算機室とプログラムを修正する自宅との間を1日中何度も往復する羽目になり、おかげで運動不足

が少々解消するという余裕があった。無事プログラムの修正が終わって計算がはじまると、今度は画面に次々に打ち出される、自由に使える残りの容量を示す数字との睨めっこがはじまる。この数字が0になる前に計算が終了しないと万事休すなのである。ある時などはプログラムの読み取りの段階でこの数字が0になってしまい（プログラムによっては、読み取りの段階ですぐに計算がはじまる）、コンピューターに入りきらないとは随分高級なプログラムが書けるようになったものだと妙なところで感心したりしたが、何のことはない、単にプログラムの終了を示す End の記号を書き忘れただけであった。こうして何度も何度もプログラムを修正していくのであるが、その都度コンピューターははじめから計算をやり直してくれるのである。

コンピューターの性質 II

同じような計算を何度くり返しても、全くつかれずに正確な答を出し続ける。

この点は実際の計算にとって大変重要なことである。人間が長い計算の終わり頃になって、全体に影響を及ぼすミスをはじめの段階のところで見つけた場合、たいていは落胆し、やり直しの計算でも誤りをおかしやすくなる。まして それが何度も重なるともう計算の意欲を失なうであろう。コンピューターにはそういう心配が全く無いのである。

11月、12月と計算は続き、群も非可換となってプログラムもますます複雑になっていった。

この頃になるとコンピューターも単なる機械とはとうてい思えなくなってきた。たとえば計算が終わって printer に打ち出す時コンピューターはほんの一瞬だが大変静かになる。そしておもむろに printer に打ち出しをはじめるのだが、その一瞬の静止が何だか、うまく計算ができた安堵のように思えるのである。それからまた非可換環の元を成分にもつ行列の逆行列を計算させると画面に "catastrophic error" という message が写し出されるのだが、これはコンピューターのくやしさの表現のように思われる。これは勿論冗談であるが、コンピューターのよいところは、こちらが努力をするとそれにちゃんと答えてくれるということがある。

コンピューターの性質 III

気はきかずのみこみも遅いが、一旦理解したものは二度と忘れない。

少し唐突かもしれないが、幼児のしつけと一脈通ずるようなものがあるような気がする。腹を立てずに気長につき合うのがよさそうだということである。

年が改まり、仕事の方も別の局面を迎えて、コンピューターへの思い入れも急速にさめて行った。多分初歩の段階は卒業したのだろう。これからはもう少し冷静にコンピューターとつき合って行こうと思っている。最後に大変お世話になった村山，落合，増田の三氏に心から感謝して、拙文を終えることにしたい。

(R 2.23)

Berkeley と Genève で 10ヶ月

埼玉大 理 水谷忠良

昨年,61年1月15日から61年11月14日迄10ヶ月間文部省の在学研究(在研)により、Berkeley (California大) および Genève (Genève大)で勉強する機会に恵まれました。滞在期間は前者が8ヶ月,後者が2ヶ月でした。この間の様子,感想を以下に簡単に記したいと思います。

Berkeleyでは、1月20日頃から春の新学期が始まり5月の上旬まで続いた。学期の切れ目を意識したわけではなかったのでこの時機に出かけたのは全く幸運であった。大学院生向けの講義を数多く聴講しようと思っていた私ではあったが結局 Kirbyの'4-manifolds'の話 小林昭七先生の'Geometric Function Theory', Bottの講義 Marsdenの講義を聴くことに決めた。講義の他に,Kirby の Geometric Topology セミナー,微分幾何のセミナー,および分野にこだわらない談話会形式の Colloquium にも数多く出席したので結構忙しかったのである。講義の時間割が興味深いのでこれについて述べると,まず週休2日が完全に実行されていて,土曜日曜は完全に休み,従って,講義の日は一週5日間である。これを月-水-金と火-木にわけ前者では60分単位の授業を後者では90分単位の授業を行う。一つの講義は月水金に1時間ずつか火木の1時間半ずつとなる。従って、前に述べた春学期(1月下旬~5月上旬)の期間で日本の通常の一年間分位の講義を聴くことになり、しかも短期間に聴くので印象も強いというわけである。しかもシンポジウム等でしばしば潰れる日本とは異なり休講ということが全くといっていい程なかった。たとえそのような状況になっても必ず助手か代

かが関連する話題についての補講をするのが恒例であった。講義のやり方もていねいであり、その分野の人にとって当り前になっていること、いわゆる易しい事実なども詳しく説明されたり、講義の冒頭で前回の復習を必ず加えるなどサービス満点であった。

ちなみにMarsdenの講義題名は「Symplectic and Poisson Reduction」Bottの題名は「Characteristic class, The loop space of a group and/or Theory of Critical Points」であったが、とくにBottはHarvardからこの学期だけ客員教授としてBerkeleyに来ており、談話会やColloquiumなど引っぱりだこという様子であった。講義の方も盛況で、小林先生はじめKirby, Wu, Jonesその他多くの先生達も出席しており、入りきれない人々のために教室を換えた程であった。ただ、時間的制約で"loop space ---"の部分にはいれなかったのは残念であった。しかし彼が長年研究して来た分野の話はきわめて自然でしかも味わい深く感銘を受けた。

上に述べた講義の他に多少興味をひかれたものに次のようなものがあった。Riefelのnon-commutative differential Geometry, JonesのKnotの話、Pughのdiff. Dynamical Systemの話、HarrisonのChaosの話、HsiangのLie groupの話等である。これらの授業も1～2回首をつっこんでみたが時間的に無理と判断して断念した。

以上のようなBerkeleyにおける授業sceneを見ていると、うらやましくもあり又同じ数学の授業するものとして反省させられる点もあった。アメリカの数学者で転身の速い人が多いのも、その原因のひとつがわかったような気もした。

もうひとつの話題は3次元Poincaré Conjecture. 61年2月21日の午前9時からの講義の冒頭にKirbyが黒板にEdvardo Rego & Colin Rourkeとかき Classical methodによりConjectureを解いた、と説明した。Bottなども出席して

いて、多少のやりとりがあったが、意外な程冷静な受けとられ方であった。その後ひと月位して、これに関するセミナーが始ったが、私は1〜2回出て、よく理解できないのでやめてしまった。その際8ドルを出してプレプリント一式をもらい、日本の松元重則氏に送った。最終的な結末は御存知の通りで、結局はダメだったのである。

大学での私の受け入れ教授(host professor)はSmaleであった。Smale氏には、「在研」応募の際に手紙をかき、8ケ月間BerkeleyでFoliationやDynamical Systemの勉強をしたい旨を伝えてあった。折り返しの手紙とvisiting scholarのapplication formを受けとり、application formに履歴書をそえて出すとそのうちIAP66という書式がとどき、アメリカ大使館にて研究者用のVISAであるJ-1 visaがとれるという段取りになっている。大学では二人共用の研究室と数学図書館の使用許可証を貰う。研究室は建物の8階にあり、眺めは良かったが、先客が部屋の良い場所にがっちりと机を置き勉強していたので、私としては居心地が良くなくてここで勉強することはBerkeleyを発つまで殆んどなかった。もともとFoliationの研究者が見あたらないBerkeleyでは他の研究者と話す機会も少かった。

Berkeleyの町は、San Franciscoの空港から50マイル程の位置にあり、最初に空港からBerkeleyに向う人は困難を覚悟しなければならない。私の場合、千葉大の二木昭人氏が車で迎えに来てくれたのでおおいに助った。もし、そうでなければ重いトランクを持って、まず空港からSan Francisco市内へでて、BARTと呼ばれる地下鉄を利用してBerkeleyへつき自分のホテルを捜さねばならないところであった。二木氏には、その後もBerkeleyでの生活を始めるにあたってもいろいろとお世話になった。その他にも、小林先生をはじめ大阪大の角田秀一郎氏，筑波大の伊藤光弘氏，秋田大の三上健太郎氏など日本人の人々には、いろいろな場

面でお世話になったものである。やはり異郷の地での日本人は有難いと思った次第である。また、海外で研究生活を送った人々が経験していることと思うが、普段つきあいの少い他の分野の人と親しく話をし、知り合ったのは思わぬ副産物であると思う。

春学期が終り、一部のセミナーやHardenの講義を除いて一段落しているところへ、松本幸夫氏から手紙や電話で『田村一郎記念号』へのせる論文の催促が来たこともあり、それまでFoliationの'Fo'の字も忘れていたが、以前、余次元1のGodbillon-Veyに対応する$\mathrm{Diff}_+\mathbb{R}$の3次元コサイクルを作った方法を余次元を一般化して$h_1c_1^n$(余次元nのG.V.コサイクル)に対応する$\mathrm{Diff}\,\mathbb{R}^n$の$2n+1$次元コサイクルをexplicitな形で求め、論文にまとめた。タイプライターも大学では借りられないという話だったので角田氏より借りて何とか締め切り迄にタイプしたのであった。

7月中旬から8月中旬にかけてICMのプレコンファレンス、ICM本会議がめじろおしで開かれ、円高も手伝って数多くの日本人数学者がCaliforniaにやって来た。国際交流の立場からも喜ばしいことではあるが、4年後、日本で同じような企画を実行しなければならないとしたら大変だなとも感ずる。円高、売上税、乏しい予算、建物の問題---と悪い材料だけが目につく。

9月14日にBerkeleyを発ちGenèveへ向った。空港にはHaefliger氏と豊田高専の伊藤敏和氏が迎えに来てくれて新しい下宿へ案内してくれた。伊藤氏は二週間後には帰国したが、その間Genève事情をいろいろと教わって大助りした。Genève大の数学教室は一階にはsupermarketもあるというちょっと変った建物の三階と七階にある。夏休み中でセミナーなども休みであったが、Haefligerや若い研究者は教室に良く来ており、昼食やコーヒーなど一諸

にとりながら親しく話す機会も多かった。"Visiting Scholar慣れ"した大大学のBerkeleyとは異なり小じんまりしたGenèveの友好的な雰囲気はとても有難く感じられた。またRiemannian FoliationやHolomorphic Foliationなどを研究している人々もいて分野的にも話がしやすくなった。Genèveでは朝下宿を出て10時半頃大学につき5時迄勉強して帰るというパターンが出来てしまい、ある意味で理想的な生活が送れたと思う。

丁度その頃フランスのLille大学を訪れていた東大の坪井俊氏から、Lilleに来るなら彼が滞在しているうちに来たらどうかという誘いを受け、パリのI.H.E.S.を見学した後Lille大へ向い Ghys, Sergiescu 等 Foliationの論文で名前だけは知っていた人達と会うことができた。また二人でHectorの自宅へも招待を受けた。Lilleを訪れることはもともと私の旅行日程にはいっていたのだが、一人で行くのは気が重いなと思っていたので、この時期に彼がLilleを訪れていたのは幸運であった。もちろんパリを案内してくれたのも坪井氏で、またまた大助かりしたのである。幸運もここまで来ると心がけだけの問題ではないと思う。Lilleでは先程のべた論文の内容について話をさせて貰った。これでやっと「在研」の義務を果した気持ちになれた。同じ話はGrenobleとGenèveのHaefligerのセミナーでも話した。

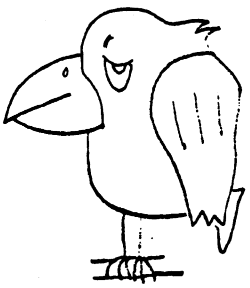
Genèveを中心としてのヨーロッパでの研究生活は2ケ月という短期間ではあったが精神的にも充実していて満足のゆくものとなった。

I.H.E.S.には帰国直前にもう一度、数理研の増田哲也氏に案内して貰った。研究所内の食堂で昼食をとったときにはKuiper, Siebenman, Jones, Cartier等々そうそうたる数学者達と同じテーブルにつき固くなってしまったことを思いだす。そのI.H.E.S.も多少の資金難であると聞いた。

アメリカ，ヨーロッパを巡って感じたことのひとつは余暇というものを，とても大事にし，それを上手に使っているし，また，そのための設備や配慮が良くなされているということであった。それと，特にヨーロッパでは文化的遺産や文化そのものを共通の財産と認識し，その保護のために多くのお金や労力をかけているらしいと感じたものだ。このような考え方，態度が基礎科学…例えば数学の研究をもないがしろにしない態度を産むのだろうか。日本では，次回の国際会議に対する文部省の援助は微々たるものであると聞く。また外国から人を呼ぶのはなかなか難しく，宿泊施設も十分でない。大学の予算はギリギリに削られている。このような状況は，円高差益を稼いでいる日本，"経済大国日本"とはいかにもそぐわないといつも思う。

帰国後3ケ月以上が過ぎ，当時強烈だった外国の印象もだいぶうすれて来たこの頃です。その上締め切りに迫られて上のような書きなぐりの文章となってしまいました。御容赦をお願いします。最後はグチとも何ともつかぬものになりましたが，もともと，このような文章に結論などあろう筈もないので，最近また一つ年を重ねて「これではイカン」とうろたえている現在の私を報告して終りにしたいと思います。

(R3.2)



修士論文・博士論文 速報

修士論文

新潟大学

鈴木勇一

極大トーラス群作用とその存在

Mを closed aspherical manifold で、ある simply connected non-compact Lie group がすべての orbit が compact, codim. 2 で作用しているものとする。このとき、Mの適当な finite covering M' をとれば M' は maximal toral action をもつことを証明する。証明は M が codim. 2 の Seifert fibre space であることに注意し、まず typical fiber のみである場合を考え、一般の場合はこの特殊な場合に帰着させる。 (R2.23)

沢口栄一

Kuroshの定理の拡張

S^2上の与えられた branching data をもつ branched covering の存在の問題と群の融合積 $A \underset{C}{*} B$ の有限指数の部分群の構造の問題を考えている。第1については Edmond-Kulkarni-Stong の結果の一部拡張を示している。第2については $A \underset{C}{*} B$ の部分群は Karrass-Solitar により一般形が知られているのでそれについて有限指数になる条件を Kulkarni の方法によって論じ、Kulkarni の定理の拡張を得ている。 (R2.23)

学習院大学

松尾 光造

Sharkovskii の order の類似として得られる braid type の間の pseudo - order について

Matsuoka は[9] において braid type とそれらの間の pseudo order $\geq$ (反対称律は成立するかどうかは,知られていない.) を定義し, 2次元の場合においても, Sharkovskii の定理に類似した結果が得られることを示した. しかし, 2つの braid type $[\alpha]$, $[\beta]$ が与えられたとき $[\alpha] \geq [\beta]$ を満たすかどうかを判定するのは簡単ではない. これについて Matsuoka は任意の 3-braid type に対して, それより"小さい" braid type の全てを見つける方法を示した. この論文では Nielsen class より判定の簡単な fixed point class が異なることを判定すれば十分であることを示し, 実際に応用が可能なように Matsuoka の方法を n-braid type に拡張した. また, この結果を使って, 与えられた n-braid type より"大きい" $2n$-braid type が存在することを示した. (その証明を読めば, 実際に $2n$-braid type を求めることができる.)

(R 3.2)

津田塾大学

氏名 小柳津 広子 (おやいづ ひろこ)

"3次元多様体上の $\mathbb{R}^2$ への stable map について"

M を compact, connected, orientable 3-mfd $\partial = \phi$ とする。

$f: M \longrightarrow \mathbb{R}^2$ を stable map とする. 次がわかった。

1. $f(M)$ が, $f(s(f))$ とは二点のみで transverse に交わる直線により, M_1', M_2' に分けられているとする。$f^{-1}(M_i') \cup D^3 = M_i$ とすると, ${}^\exists f_i : M_i \longrightarrow \mathbb{R}^2$ stable. st $M_i - (D^3 \cup \partial f^{-1}(M_i')\text{ nbd})$ で $f_i = f$.
2. if ${}^\exists \phi : S^1 \times I \longrightarrow \phi(S^1 \times I)$ diffeo st $f(M) \simeq \phi(S^1 \times I_\varepsilon)$,
   for ${}^\forall c$: $s(f)$ の component, for ${}^\forall s \in S^1$
   $f_c = f|_c : c \longrightarrow \phi(S^1 \times I) \longleftarrow [s] \times I : \phi|_{[s] \times I} = \phi_s$ において,

$\Phi_s \cap f_c$。ただし　$I_\varepsilon = [1+\varepsilon, 2-\varepsilon]$　$I = (1, 2)$　$\varepsilon > 0$。

$\Rightarrow$ M は S^1 上の locally trivial fibration.

さらに、$\#\{p \in S_0 ; (\pi \circ \phi^{-1} \circ f)(p) = s\} = n$ かつ $\#\{p \in S_1 ; (\pi \circ \phi^{-1} \circ f)(p) = s\} = n + 2k$ ($s \in S^1$, $k = -1, 0, 1$　$n = 0, 1, 2$) なら、s の上の fibre は種数 $k+1$ の orientable surface。ここで、$S_0 = \{$fold points$\}$, $S_1 = \{$saddle points$\}$

(R 2.27)

東京大学

佐伯 修

(I) On simple fibered knots in S^5 and the existence of decomposable algebraic 3-knots

Algebraic $(2n-1)$-knot とは、$\mathbb{C}^{n+1}$ 内の複素超曲面 V を、その孤立特異点を中心とする半径の十分小さな球面 S_ε^{2n+1} で切った時にできる切り口 $K = V \cap S_\varepsilon^{2n+1}$ の、S_ε^{2n+1} における isotopy class のことである。Algebraic knot は一般に、simple fibered knot になる。$n=1$ の時は、algebraic knot が prime であることは古くから知られていたが、数年前に Michel-Weber により、$n \geqq 3$ の時には prime でない algebraic knot が存在することが示された。この論文では、simple fibered 3-knot の1つの構成法と、Seifert matrix による isotopy criterion を述べ、それらと Brieskorn, Durfee の signature formulas を使うことにより、$n=2$ の時にも prime でない algebraic knot が無限個存在することを示す。

(II) Knotted homology 3-spheres in S^5

S^5 に smooth に埋め込まれた homology 3-sphere の isotopy class を 3-knot と呼ぶ。この論文では、補空間の基本群が $\mathbb{Z}$ と同型になる 3-knots を分類し、その結果を使って次の4つのことを行なう。

(A) Rohlin invariant が 0 となる各 homology 3-sphere Σ に対し、

trivial Σ-knot K_T を定義し、それを $\pi_i(S^5-K_T)\cong\pi_i(S^1)$ $(\forall i)$ となる knot として特徴づける。

(B) Simple 3-knot が 2つの non-trivial knots の連結和に分解するための条件を述べ、その応用として、prime でない algebraic 3-knot の存在定理を導く。

(C) Knot としては decomposable だが、2つの non-trivial fibered knots には分解し得ない fibered 3-knot の存在を、Donaldson の定理を使って示す。

(D) 3-knot が、algebraically fibered の時、ある種の条件が満たされれば、本当に fibered となることを示す。

(III) <u>Knotted homology spheres defined by weighted homogeneous polynomials</u>

$\mathbb{C}$ 係数の $(n+1)$ 変数多項式 $f(z_1,\cdots,z_{n+1})$ が weighted homogeneous であるとは、$(n+1)$ 個の正の有理数 $(w_1,\cdots,w_{n+1})$ が存在して、f の各単項式 $cz_1^{a_1}\cdots z_{n+1}^{a_{n+1}}$ $(c\neq 0)$ に対し、$a_1/w_1+\cdots+a_{n+1}/w_{n+1}=1$ が成り立つ時をいう。たとえば、Brieskorn type の多項式 $z_1^{a_1}+\cdots+z_{n+1}^{a_{n+1}}$ がそうである。この論文の主結果は、$n=2$ の時を扱った、次の定理である。

<u>定理</u>　f を 3 変数の weighted homogeneous polynomial で、$\vec{0}$ を isolated critical point に持つものとする。この時、f の定義する algebraic knot $K_f=f^{-1}(0)\cap S_\varepsilon^5$ が homology sphere ならば、K_f はある Brieskorn type polynomial の定義する algebraic knot と isotopic になる。

この定理は $n=1$ の時にも成立する。しかし、$n\geqq 3$ の時は成立しない。ここでは Steenbrink の signature formula を使って反例を構成する。

(IV) <u>Cobordism classification of knotted homology 3-spheres in S^5</u>

S^5 に smooth に埋め込まれた homology 3-sphere を 3-knot と呼ぶ。2つの 3-knots K_0, K_1 が homology cobordant とは、$\exists W^4\subset[0,1]\times S^5$ で、$\partial W=(1\times K_1)\cup(0\times(-K_0))$,

$H_*(j \times K_j; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} H_*(W; \mathbb{Z})$ $(j=0,1)$ なるものがある時をいう。この時、$C_3^H = \{3\text{-knots}\}/\text{homology cobordant}$ とおくと、これは連結和を和とする可換群になる。この論文の主結果は次の定理である。

<u>定理</u> $0 \longrightarrow C_3 \xrightarrow{i} C_3^H \xrightarrow{\pi} \mathcal{H}^3 \longrightarrow 0$ は exact。

ここで、C_3 は3次元 knot cobordism group, $\mathcal{H}^3$ は homology 3-sphere の homology cobordism group, i は canonical な inclusion, π は埋め込みを忘れる写像である。

また、algebraic 3-knot への応用もいくつか考える。

(R2.20)

小野 薫

I. <u>The scalar curvature and the spectrum of the Laplacian of spin manifolds.</u>

II. <u>On the holomorphicity of harmonic maps from compact Kähler manifolds to hyperbolic Riemann surfaces.</u>

III. <u>Symplectic 多様体上の群作用について.</u>

<u>Iの要旨)</u> (X,g) を complete Riemannian manifold とし、その上の Laplacian の spectrum の greatest lower bound を $\lambda_0(X)$ とすると、これは (X,g) の invariant である。(X,g) が単連結かつ断面曲率が上から負数で抑えられているとき、$\lambda_0(X)$ はある正数で下から抑えられることは McKean によって示されている。又、Brooks は、closed manifold M の基本群が amenable であることと、universal cover $\widetilde{M}$ の $\lambda_0(\widetilde{M})$ が 0 となることとが同値となることを示した。一方 spin manifold の上には Dirac operator があり、これの Weitzenböck formula から正の scalar 曲率の metric を許す closed spin manifold の $\hat{A}$-genus が 0 となる。(Lichnerowicz) ここでの結果は次の通り。

<u>Theorem</u>. M を closed Riemannian spin manifold とし、$\widetilde{M}$ をその universal cover とする。もしも $\hat{A}(M) \neq 0$ 又は M は(古い意味で)enlargeable のいずれかを満たせば、$\lambda_0(\widetilde{M}) \leqq \frac{1}{4}(-\min \kappa)$ (κ は scalar 曲率)が成りたつ。この系として、恒等的に scalar 曲率が 0 となる metric をもつ closed spin manifold M で基本群が amenable でないものに対しては $\hat{A}(M) = 0$ となることがわかる。(全く別の考察から、実は「amenable でない」を「exponential growth である」にしてもよいこともわかる。)

Ⅱの要旨）　M, N を compact Kähler manifold とする。$M \to N$ 正則写像は調和写像となることは Lichnerowicz によって示されている。この逆についても M, N が closed Riemann surfaces のとき、ある条件の下に調和写像ならば（反）正則写像となること（Eells－Wood）や、N が Siu の意味で strongly negative curvature をもち、ある点での differential の rank が 4 以上のときに同様のことが成立すること（Siu）等が知られている。ここでは、Eells-Wood の結果を M を高次元することで拡張することを考える。（但、N は hyperbolic に限定する。M が複素1次元のとき $\mathbb{C}P^1$, T^2 については homotopic to const. map しか存在しない）

Theorem.　M を compact Kähler manifold, $\dim_{\mathbb{C}} M = m$, $c_1(M)$: negative とし、N を compact hyperbolic Riemann surface とする。調和写像 $f : M \to N$ が $m\,|f^*c_1(N)\cdot c_1(M)^{m-1}[M]| > |c_1(M)^m[M]|$ を満たせば f は（反）正則となる。

（ここで課した条件は Eells-Wood の結果の際のある条件の一般化となっている。）

この系として、M, N を今の通り、$f : M \to N$ 連続写像とすると

$$|f^*c_1(N)\cdot c_1(M)^{m-1}[M]| \leqq m\,|c_1(M)^m[M]|$$

が成立することがわかる。

これは hyperbolic Riemann surfaces の間の写像に関する Kneser の結果の一般化となっている。

Ⅲの要旨）　symplectic 多様体に Lie 群が作用している時 moment map と呼ばれるものが存在するための obstruction はある1次元 cohomology の元で、Lie 群が semi-simple であればこれが消えている。（Marsden－Weinstein）しかし、abel 群のときは消えるとは限らない。この場合で知られているのは compact Kähler manifold 上の正則な toral action に対し、不動点集合が空でなければ moment map の存在がわかる。（Frankel）そこでこれを一般の closed symplectic manifold について拡張したい。ここでは Kähler manifold のときには hard Lefschetz theorem から保障される条件；$\wedge\omega^{m-1} : H^1(M : \mathbb{R}) \xrightarrow{\cong} H^{2m-1}(M : \mathbb{R})$（$\omega$: symplectic form, $m = \frac{1}{2}\dim_{\mathbb{R}} M$）の下では正しいこと、従ってこのとき homology は不動点の homology からわかることを証明した。また、moment map の存在と、Kähler manifold の Picard 群への Automorphism group の作用についての類似性等についても触れた。後半では moment map の存在を用いて Petrie 達の予想について特別な場合に予想が正しいこと等を述べた。

（R2.20）

重原　正明

TANGLE ALGEBRAS AND JONES POLYNOMIALS

向きづけられた(3, 1)-linkの不変量であるJones多項式はConway calculusにより求められる。この論文では境界を固定した向きづけられたn-tangle ($n \geq 1$) について、その間のConway calculusを考え、それからJones polynomialに対応するalgebraを定義した。さらにそれを用いて、次の3つのことを行なった。

1、各成分の向きがそろったtorus linkの2変数のJones多項式の一般的な表示を求める。

2、2以上の整数nそれぞれについて、n次巡回分岐被覆空間は同相でかつ1変数Jones多項式が異なる2つのknotの組が存在することを示す。

3、任意の向きづけられたlink Lに対して、2変数Jones多項式がある自明でない式を法としてLのものと等しいprime linkが存在することを示す。

(R2.27)

中山　裕道

コンパクト葉が唯一つの　S^3の余次元1 C^2葉層構造

$\mathcal{F}$を、コンパクト葉が唯一つのS^3の余次元1 C^2葉層構造とする。そして、その Reeb component をRとする。

定理1、次の条件(1), (2)を満たすRの閉近傍Nが存在する。

(1), $N - \mathrm{int}\,R$は、$T^2 \times I^1$で、$\mathcal{F}|(N - \mathrm{int}\,R)$は各$\{*\} \times I^1$と横断的、かつ、$\partial R$で接し、$\partial N$で横断的である。

(2), $\mathcal{F}|\partial N$は、linear foliationとC^2同型である。

2つのsolid torusのproduct foliationを、境界上の1枚のannulusで張りあわせてできるtorus knot complementの葉層構造を、standard foliationとする。

定理2、Rがtorus knotのとき、定理2のNについて、$\mathcal{F}|(S^3 - \mathrm{int}\,N)$は、standard foliationと同型になる。

また、$\mathcal{F}|(S^3 - \mathrm{int}\,N)$として、コンパクト葉をもたない例が存在する。

定理3. Rが fibered knotのとき，定理2のNについて，$\mathcal{F}|(S^3-\mathrm{int}\,N)$が，境界と交わるコンパクト葉$L$をもつと，これを$L$で切った葉層構造は，$L$上の foliated I^1-bundle になる。

(R 2.27)

中島 啓

I. Compactness of the Moduli Space of the Yang-Mills Connections in Higher Dimensions

Uhlenbeck や Donaldson により，2・3・4次元の場合の Yang-Mills connection の moduli space の compact 性が知られているが，これを高次元の場合に次の様に拡張した。

Theorem

M^n: compact な Riemannian manifold , $\dim M = n$

$P \xrightarrow[G]{} M$: M上の G-principal bundle (Gは compact Lie group)

D_i : P上の Yang-Mills connection の列 ($i=1,2,\cdots$)

s.t. $\displaystyle\int_M |R^{D_i}|^2 dV \leqq R < \infty$ (但し R^{D_i} は D_i の curvature)

このとき，

$^\exists \mathcal{S} \subset M$: compact で $(n-4)$次元Hausdorff measure $\mathcal{H}_{n-4}(\mathcal{S}) < \infty$

$^\exists Q : M \setminus \mathcal{S}$ 上の G-principal bundle

$^\exists D_\infty$: Q上の Yang-Mills connection

s.t. $^\forall K \subset M \setminus \mathcal{S}$ compact に対して $^\exists \underbrace{g_{K,j} : Q|K \longrightarrow P|K}_{\text{bundle map}}$

$g_{K,j}{}^* D_j \longrightarrow D_\infty$ (K上 C^∞-topology で)

II. Removable Singularities for Yang-Mills Connections in Higher Dimensions

Uhlenbeck による4次元の場合の Yang-Mills connection の Removable Singularities Theorem を高次元の場合に次の様に拡張した。

Theorem

$B \subset \mathbb{R}^n$ 半径1のball with Riemannian metric g $(n \geqq 4)$

$(x_1, \cdots, x_n)$ は g に関する normal coordinate とし、

$\left| \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} \right| \leqq \Lambda < \infty$ と評価されていると仮定する。

G : compact Lie group

このとき、$\exists \varepsilon = \varepsilon(n, \Lambda, G) > 0$

s.t. $P \xrightarrow[G]{} B \setminus \{0\}$: G-principal bundle

D : P 上の Yang-Mills connection

with $\int_B |R^D|^2 dV_g \leqq \varepsilon$

は、gauge 変換 γ で引き戻すことにより B 全体で定義された bundle $\hat{P}$, Yang-Mills connection $\hat{D}$ に拡張される。

III. Regularity of Minimizing Harmonic Maps into Certain Riemannian Manifolds

Schoen-Uhlenbeck により、minimizing harmonic map の Regularity の問題は minimizing tangent map の分類に帰着されたが、次の様な Riemannian manifold について minimizing tangent map を調べた。

$M^m \hookrightarrow S^{m+k-1}$: minimal immersion

$\Lambda(y) = (y \in M$ における断面曲率の最大値$)$

$\rho(y) = (y \in M$ における Ricci 曲率の最小固有値$)$

If $p = 3, 4, 5$ & $\frac{2(p-2)m}{1+2(p-1)m} \Lambda(y) \leqq \frac{2}{m} \rho(y) - 1$ for all $y \in M$

then $u : \mathbb{R}^p \to M$ minimizing tangent map は const map しか存在しない。

さらに、M が δ-pinched の場合にも同様の結果を得た。

(R3.2)

橋本　義武

4次元球面上の instantons の moduli 空間への群作用

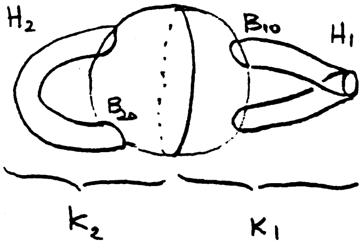
S^4 上の principal $SU(2)$-bundle で $c_2 = k$ なるものを P_k，P_k 上の anti-self-dual connections の moduli 空間を M_k と書く。S^4 への conformal な群作用は，M_k への群作用を induce する。本論文では、特に有限巡回群の M_k への作用の fixed point set について考察した。応用上重要なのは、それが空集合になるための十分条件，および1次元になるための十分条件である。方法としては、Donaldson の parametrization を用いた。このようなことを考えた動機は、一つには，fixed point set が orbifold instantons の moduli 空間の end の情報を与えることと、もう一つには，fixed point set の様子から M_k の topology が窺えることである。　(R3.2)

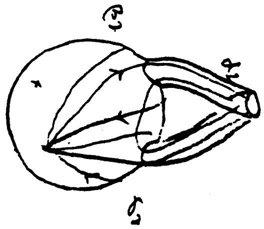
早稲田大学

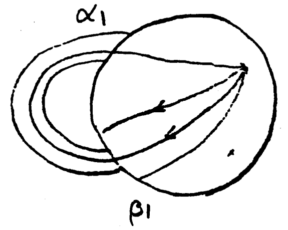
足立　和夫

genus 2 の non-orientable handlebody の homeotopy group について

V を genus 2 の non-orientable handlebody としたとき、その homeotopy group $H(V)$ が τ_i，ω_i，θ_i，ξ_i，η_i，ζ で生成されることを示した。ここで τ_i は B_{i0} の full twist。ω_i は i-th knob K_i の half twist。ζ は K_2 を H_1 上 1 周 sliding させたもの。θ_i，ξ_i，η_2 は α_i，β_i，γ_2 にそった handle sliding







(R3.2)

大山淑之

On 3-bridge links with 3-components

Lを3-bridge 3-components link で Brunnian Property を持つものとする。まずLの projection を定め特別な場合について Conway Polynomial を計算した。その結果次の定理が得られる。

定理 Brunnian Property を持つ 3-bridge link において Conway Polynomial が一致し、non-equivalent な link が任意に多く(有限個)存在する。

又、一般の 3-bridge 3-components link に対して以下のことが成立する。

定理 3-bridge 3-components link において Conway Polynomial (multi-variable Conway's Potential function) が一致し non-equivalent な link が可算無限個存在する。 以上

(R3.2)

宮内 哲夫

On the highest degree of absolute polynomials of alternating links

Brandt, Lickorish, Millett により unoriented link の polynomial invariant である absolute polynomial が定義された。ここでは absolute polynomial についてその最高次数と crossings の関係を示した。すなわち、Lを alternating link とする。このとき次の(1)(2)は同値。

(1) Lの alternating projection $\tilde{L}$ で、そのグラフ $g(\tilde{L})$ が連結かつ、stump, loop, cut-vertex を持たないものが存在する。

(2) Lの absolute polynomial $Q(L)$ の最高次数が $c(\tilde{L})-1$ かつ、最高次数の項の係数は正。ここで $c(\tilde{L})$ は $\tilde{L}$ の crossings の数を表わす。

(R3.2)

原 正雄

Graph の3次元球面への埋め込みについて

S^3 の中の graph について、local knot と graph の type の関係を、主に graph が hand-cuff graph の場合に

ついて調べた。

subgraph がすべて Trivial だが全体として knot しているような hand-cuff graph を構成した。とくに、2次 hand-cuff graph については上のようなものが無限個存在することを示した。

また、localy trivial な3次 θ-Curve または2次 hand-cuff graph において、complement の基本群が free ならば、graph が trivial であることを証明した。(R3.2)

京都大学

井上浩一

$A(2)$ ($P=2$) 及び $P(1)$ (P：奇素数) のコホモロジーとしての実現について

コホモロジー実現可能性についてはさまざまな代数的な A-module (A : Steenrod Algebra) について研究されている。$V(n)$ や、$\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2\, Sq^{2^n}$、$A(1)$、$A/\!/A(2)$ の実現についてである。Mitchell [1] によって A の subalgebra $A(n)$、$P(n)$ に A-module structure が与えられたが、その実現可能性について考察したのが本修論である。手法は単純で、$A(2)$ ($P(1)$) の total degree ≤ 23 での A free resolution が 2-stage で終わることを示すというものである。

(R3.2)

大下顕弘

Spin(N) と同型なコホモロジー環をもつ H-空間について

G を1連結 mod2 有限 H-空間とし、代数(有階環)として $H^*(G) \cong H^*(Spin(N))$ ($H^* = H^*(\ \ ;\mathbb{F}_2)$) とする。このとき以下の条件の下で、$A^*(2)$ 作用及び Hopf 代数構造に関する同

型 $H^*(G) \cong H^*(Spin(N))$ が存在する。

$1°$ $H_*(G; \mathbb{F}_2)$ の Pontrjagin 積は結合的。

$2°$ $^\exists s \geq 4$ で $2^s+2 < N < 2^{s+1}-4$ を充たすとし、N は奇数。

$3°$ $N \geq 15 \cdot 2^{s-3}$ のとき $PH^{15}(G) \to QH^{15}(G)$ は全射。

$4°$ $3 \leq m < s$ のとき $Sq_3^2 QH^{2^m-1}(G) = QH^{2^m+1}(G)$。

尚、$10 \leq N \leq 12$ のときも $1°$ を仮定してできる。また他の1連結コンパクト単純 Lie 群のときでも $1°$ を仮定してできることが知られている。 (R3.2)

神戸大学

北村雅子

Closed orientable 3-manifolds admitting orientation reversing involution.

1. Closed 3-manifold M が orientation reversing PL involution τ をもつ場合、$H_1(M; \mathbb{Z})$ の torsion subgroup はある性質をもつことが知られているが、逆に、そのような性質をもつ有限生成アーベル群 G を任意に与えたとき、$H_1(M; \mathbb{Z}) \cong G$ である (M, τ) が、特に irreducible な M で実現できるかという問題について、未解決であった群についても、irreducible な M が存在することを示した。

2. Rational homology 3-sphere が orientation reversing PL involution をもつとき、その fixed point set の Euler 標数の評価や、$H_1(\mathrm{Fix}\,\tau; \mathbb{Z}_2)$ の次数と $H_1(M; \mathbb{Z}_2)$ の次数の間にある不等式などを得た。

尚 1. については J. Math. Soc. Japan に掲載される予定です。 (R2.18)

安田智之

種数2の2次元リボン結び目の分解と分類について

① Knot の分解問題は 2-knot に関しては未解決である。ここでは ribbon 2-knot に対象を限定した上、本来より少し厳しい条件で "⊕-decomposition" と "⊕-prime" を定義した。

そして任意種数のribbon 2-knotの分解のされ方、その一意性を考察した。任意非負整数nに対し種数nの⊕-prime ribbon 2-knotの存在定理を得た。②2-component trivial 2-linkから1つの3-ballに沿うfusionで得られたribbon 2-knot(2C1F 2-knot)に対し、その「表現列」「(±1)分布表現」なる概念を導入し分解性と分類について論じた。後者は2C1F 2-knotのAlexander polynomialを容易に計算できる点、Alexander polynomialより厳しい不変量である点で有効である。また種数nの評価に($n=1,2$なら確実に)利用できることがわかった。(R2.18)

広島大学

新井幸広

<u>d重ユニモジュラー・ベクトルたちの空間のホモロジー群</u>

Quillenの定めた高次代数的K群$K_i(A)=\pi_i(BGLA^+)$($i\geq 1$, Aは単位環)において, K_1やK_2でも問題であった安定性問題に効果的な解答を与える為に, $BGLA^+$のホモロジー群(これは$BGLA$のものと同型)の安定性を調べるという歴史的なアプローチがあった。表題の空間はこの立場から導入された単体複体で、高い次元までのホモロジー群が消滅していた。更にSuslinは、この空間のホモロジー群の性質から別種の議論を用いて安定性問題へのかなり総括的な結果を得ている。私の論文はこれらの空間の一つ$U_1(\mathbb{Z}^2)$―1次元単体複体―$v, v'\in\mathbb{Z}^2$としたとき1単体(v, v')は行列としては$GL_2\mathbb{Z}$の元, 零単体(v)はvを表す二つの$\mathbb{Z}$の元が互いに素―である―で, $GL_2\mathbb{Z}$の作用を持っている―, この$U_1(\mathbb{Z}^2)$の一次元ホモロジー群の構造を調べたものです。(R2.26)

岡井孝行

Moduli spaces of connections and deformations of base metrics

1. M^2を closed oriented Riemann surface とし、$P \to M$ を principal $U(1)$-bundle とする。このとき、M の Riemann metric を、($\mathrm{vol}(M)$ を保ったまま) conformal に deform (例えば M の complex structure を fix して Kähler metric を変える) すると、P 上の Yang-Mills equation も、それに伴って変化する。P が nontrivial のとき、{Yang-Mills connection w.r.t. $v \cdot g$ $(0 < v \in C^\infty(M))$} は、相異る2つの v に対して全く交わらない (gauge group で割っても)。P が trivial なら動かない。「連続的」に動くということと、動く「方向」も分かる。

2. (M^4, g) を closed oriented smooth Riemann manifold で、intersection form に negative part なし、とし、$P \to M$ を principal $Sp(1)$-bundle, $c_2(P) < 0$ とする。このとき、$\mathcal{M}_g = \{\text{self-dual connection on } P\}/\text{gauge}$ が manifold になるための一つの十分条件 (Taubes による):

「$g \longrightarrow {}^\exists v \cdot g = g'$ によって $s' - 3w'_- > 0 \Longrightarrow \mathcal{M}_g$ は manifold」

(但し、s: scalar curvature of g, w_-: largest eigenvalue of anti-self-dual Weyl tensor of g) は、元の g が、$s - 3w_- \geq 0$ on M, かつ、$s - 3w_- > 0$ at ${}^\exists x \in M$ なら大丈夫である。 (R 2.26)

愛媛大学

松下武司

Point-network を持つ空間と層型空間の関連について

位相空間 X は、T_3 かつ T_1 とする。

定義　各 $x \in X$ に対して、x を含む X の部分集合の減少列 $\{W(n, x) : n \in \mathbb{N}\}$ が与えられていて、$\mathcal{W} = \{W(n, x) : x \in X, n \in \mathbb{N}\}$ が X の point-network とは、X の任意の開集合 U と、U の各点 x に対して、x を含むある開集合 $V[x, U]$ が存在して、以下を満たすときである。$V[x, U]$ の各点 y に対し

て、ある$n=n(y)\in\mathbb{N}$が存在し、$x\in W(n,y)\subset U$となる。

また、層型空間は、可算乗法性、(部分集合への)継承性、閉連続写像による保存などのよい性質を持ち、point-networkを持つ空間とは密接な関係がある。

定理　Xが層型空間なら、point-networkを持つ。

定理　X×Iがpoint-networkを持つことと、Xが層型空間になることとは同値である。

point-networkを持つ空間の性質として、有限乗法的でないこと、(部分集合への)継承性、閉連続写像による保存性などが示される。また、孤立点でない点が、一点しかない空間Xに対して、位相の入れ方により、X^2でのpoint-networkの存在が左右される。

(R2.26)

九州大学

角　俊雄

Equivariant localization of G-CW complexes and Hopf G-spaces

Gを compact Lie 群、p をGの閉部分群の共役類に対して素数の集合を対応させる順序を保つ写像とする。三村－西田－戸田の方法を用いて，下の仮定を満たす based G-CW complex X に対して p-local based G-CW complex X_p と p-equivalence $j: X \to X_p$ が（一意的に）存在することを示した。

仮定： X は finite orbit type を持ち、Gの任意の閉部分群 H に対して $H_*(X^H)$ が finitely generated である。

但し、X が p-local とは Gの任意の閉部分群 H に対して $\pi_*(X^H)$ が $\mathbb{Z}_{p(H)}$-module であるときにいい、又 based G-map $f: X \to Y$ が p-equivalence であるとは、Gの任意の閉部分群 H に対して $f: X^H \to Y^H$ が $\mathbb{Q}$係数 & $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$係数（ $q \in p(H)$ ）のコホモロジー群の同型を誘導する時にいう。

(R2.18)

茂手木　公彦

- <u>Dehn surgered manifolds and knots</u>

S^3(oriented) に smooth に埋め込まれた knot K (unoriented) の $\frac{q}{p}$-Dehn surgery で得られる閉多様体を $M(K:\frac{q}{p})$ と表わす。このとき各 knot K に対して次のような領域 $D(K)\subset\mathbb{R}^2$ が存在する。($D(K)$ は $(0,0)$ を含む帯状領域あるいは compact 領域)

$(p,q)\in\mathbb{R}^2-D(K_1)\cup D(K_2)$ で $\frac{q}{p}\neq 0$ とする。$M(K_1:\frac{q}{p})\overset{\text{ori. pre.}}{\cong}M(K_2:\frac{q}{p})$ ならば K_1 と K_2 は同値、即ち S^3 の向きを保つ同相写像で K_1 を K_2 にうつすものが存在する。系として、無限個の $n\in\mathbb{Z}$ に対して $M(K_1:\frac{1}{n})\cong M(K_2:\frac{1}{n})$ ならば K_1 と K_2 は同値であることがわかる。また、Gordon の satellite knot の Dehn surgery に関する結果を用いて次がわかる。K_1, K_2 がともに cable knots, あるいはともに composite knots である場合を除いて、$K_1\neq K_2$ ならば $M(K_1:r)\cong M(K_2:r)$ となる $r\in\mathbb{Q}\cup\{\infty\}$ は高々有限個。branched cover に関して小島先生は K_1 を prime knot としたとき、無限個の n に対してそれぞれの n-fold cyclic branched cover が同相ならば、K_1 と K_2 は弱い意味で同値となることを示している。

- <u>Untwisted doubling and Dehn surgery</u>

Brakes により、trefoil knot の untwisted double と figure eight knot の untwisted double の -1-Dehn surgery で得られる多様体が一致することが示されているが、untwisted double の Dehn surgery に関して次が成り立つ。無限個の $r\in\mathbb{Q}\cup\{\infty\}$ に対して、$M(dK_1:r)\cong M(dK_2:r)$ (dK は K の untwisted double を表わすものとする) ならば、K_1 と K_2 は同値である。

- <u>Haken manifolds and representations of their fundamental groups in $SL(2,\mathbb{C})$</u>

M を compact, orientable irreducible な 3-manifold とする。(M が更に orientable incompressible surface を含むとき、M を Haken manifold という。) Culler-Shalen は M の基本群 $\pi_1(M)$ から $SL(2,\mathbb{C})$ への representation の character 全体の空間 $X(\pi_1(M))$ (これは complex algebraic set になる)

の次元が正であれば、M は boundary に parallel でない orientable incompressible surface が存在することを示している。この逆の問題に関して、M が non-separating incompressible surface を含めば $\dim X(\pi_1(M)) > 0$ であるが、Haken manifold で、その基本群の character が有限個になるようなものが無限個存在する。

(R2.20)

博士論文（課程）

東京大学

杉山健一

調和スピノルの次元の漸近的評価について。

(X, g) : 2n-次元 compact oriented spinnable Riemannian manifold

$\{L, h\}$ = Hermitian line bundle over X with hermitian fibre metric h

とする。$C_1(L, h)$ を $\{L, h\}$ の 1-st chern form として、

$$X_+ \ (\text{resp. } X_-) := \{x \in X \mid [C_1(L,h)^n / dV_g](x) > 0\} \ (\text{resp. } < 0)$$

(但し、dV_g は (X, g) の体積要素）としたとき、

$$H_k^+(0) \ (\text{resp. } H_k^-(0)) := \{\text{harmonic sections of } S^+ \otimes L^k \ (\text{resp. } S^- \otimes L^k)\}$$

(但し、S^+ (resp. S^-) は $+\frac{1}{2}$ (resp. $-\frac{1}{2}$)-spinor bundle of X)

について、次の漸近的評価を得た。

Theorem

(1) $X_- = \emptyset$

$$\Rightarrow \lim_{k \to \infty} k^{-n} \dim H_k^+(0) = \frac{1}{n!} \int_X C_1(L)^n$$

$$\lim_{k \to \infty} k^{-n} \dim H_k^-(0) = 0$$

(2) $X_+ = \phi$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} k^{-n} \dim H_k^-(0) = \frac{1}{n!}\int_X c_1(L)^n$$

$$\lim_{k\to\infty} k^{-n} \dim H_k^+(0) = 0$$

ここで $c_1(L)$ は L の 1-st chern class.

(R2.17)

神戸大学

森元勘治

種数２の向き付け不能閉三次元多様体の構造

種数２のヒーガード分解を持つ向き付け不能閉三次元多様体は、種数１の閉三次元多様体の連結和か、E^3, H^3, $S^2\times R^1$, $H^2\times R^1$ or Sol のうちの一つの幾何的構造を許容するか、トーラスとクラインボトルによる分解を持つことがわかる。本論文において、特にトーラスとクラインボトルによる分解を持つ時を研究し、どのような分解が生じるかを詳細に調べた。これによってこのような多様体の一つの表が得られた。系として、このような多様体が両側非可縮クラインボトルを含めば、その一次元ホモロジー群は、$\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2$ or $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_{4p}$ となることがわかる。また、任意の向き付け不能閉曲面 F に対して、種数２のヒーガード分解を持つサークル上の F バンドルが存在することがわかる。

(R2.18)

広島大学

垣水修

三次元多様体の半安定端の境界

W を non-compact, connected P^2-irreducible な三次元多様体で、∂W は compact、$\pi_1(W)$ は有限生成であるものとする。ε を W のひとつの end とする。ε の end の近傍の基本系 $U_0 \supset U_1 \supset U_2 \supset \cdots$ と proper map $r:[0,\infty) \longrightarrow W$ で、$r([n,\infty)) \subset U_n$, $\forall n$ なるものに対し、inverse sequence

$$\mathcal{A}: \pi_1(U_0, r(0)) \longleftarrow \pi_1(U_1, r(1)) \longleftarrow \pi_1(U_2, r(2)) \longleftarrow \cdots$$

が得られる。$\mathcal{A}$ が Mittag-Leffler 条件をみたすとき、end ε は semistable（半安定）であるという。

定理. 上記の W に対し、W の end ε が semistable ならば、ε の近傍 U で、∂U は closed surface であり、U は $\partial U \times [0,\infty)$ と位相同型であるものが存在する。

(R2.26)

すべての方に連絡が行かず漏れた方もあるかと思います。また，修士論文・課程博士の博士論文ということで割愛させて頂いた分もあります。何卒御了承下さい。