TOPOLOGY NEWS

★ 特異点の幾何

★ 文献リスト

★ お知らせ

NO. 6　　1979年10月

特 集

特異点の幾何(数学)について.

東工大 岡 睦雄.

§1. 特異点とは何か?

勿論この大上段からの質問に上手に答える器量は筆者にはないが、思いつくものをいくつか以下にひろってみよう。

(a) 写像の特異点. φ : $\mathbb{R}^n$の原点の近傍 $\longrightarrow \mathbb{R}^k$ を C^∞-写像とする. $\vec{0}=(0,\cdots,0)$ がφの特異点であるとは,

$$\mathrm{rank}\left(\frac{\partial\varphi^i}{\partial x_j}(0)\right) < \min(n,k)$$

なるときをいう。

勿論特異点でなければ$\mathbb{R}^n$のC^∞座標(φがanalyticのときはanalyticに)をとって,

$$\varphi(x) = (x_1, \cdots, x_k) \qquad (\text{if } k \leq n)$$

とできることは逆関数定理の教えるところである.

この状況で2つの問題が自然に生れてくる。

オ1の問題 『与えられたφに対し、一番わかりやすい標準型を与えること』

この問題に関し多少とも研究されているのは，$k=1$のときで，更に，$\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_j}(0)\right)$ (*Hessian matrix*) が非退化なら，Morse に依って，標準型

$$\varphi(x) = x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_n^2$$

となる。それ以外の場合には一般には難しいが，Thom, Boardman, Arnold, Mather, Fukuda 等の研究が目立っている。([3], [30], [31], [33], [18])。

上の問題はまた次のようにいいかえることができる。

「与えられたφ, φ'に対し，どの様な条件の下でφとφ'を同一視（同値）するか？」

これに対し，2，3の候補があるがどれも一長一短である様だ。例えば，右-同値，右左-同値，位相的同値 etc. 但し，*simple singularity* と呼ばれる特別の class に限れば，上の問題は *Arnold* により美しい結果がえられている。

オ2の問題 『与えられたφを無限小に変形して得られる写像φ'はいかなるものが可能か？』

$k=1$ の時は Thom, Mather に依り "unfolding" の理論としてかなり整理された理論があるが，それも孤立特異点の時のみで，それ以外及び $k\geq 2$ に関しては何もわからない．（[30]，[18]）．

(b) 多様体（代数的および解析的）としての特異点．

$f_1(z_1,\cdots,z_n)$, $\cdots$, $f_k(z_1,\cdots,z_n)$ を n 変数の解析関数とするとき，集合

$$V(f_1,\cdots,f_k)=\{z\in\mathbb{C}^n \mid f_j(z)=0,\ j=1,\cdots,k\}$$

を考える．$0\in V$ としよう．

$\operatorname{rank}\left(\dfrac{\partial f_j}{\partial z_k}(0)\right)=k\quad(k\leq n)$ のときには，逆関数定理により，V は 0 の近傍で，$\mathbb{C}^{n-k}$ と同相になるが，rank が下がっているときはどの様な位相空間になるか？　この場合次の2つの結果が近年の種々の研究発展の動機ともいえるものである．

(イ) Mumford の結果：$\dim_{\mathbb{C}}V=2$ で原点が孤立特異点の場合，V は 0 の近傍で決っして位相的にも多様体にはならない，（[20]）．

(ロ) Brieskorn の結果：超曲面 $V=\{z\in\mathbb{C}^n \mid z_1^{a_1}+z_2^{a_2}+\cdots+z_n^{a_n}=0\}$ $(a_i\geq 2$, 整数$)$

を考える。Vと単位球面$S=\{z\in\mathbb{C}^n \mid |z_1|^2+\cdots+|z_n|^2=1\}$との交わりを$K(a)$とする。$a=(a_1,\cdots,a_n)$を適当に動かすと全ての$s$-parallizable な多様体の境界として表せるエキゾチック球面が現れる。この発見は当時，複雑な構成を通してしか exotic spheres をみられなかったトポロジストのみならず，広範な数学者達の話題をさらったであろう。1965年頃である。

Milnor はこの結果に刺激をうけ，超曲面の特異点の研究に現在まで有効な手段として使われている Milnor 束を開発した。その後，この方面では Brieskorn を旗頭とするドイツ学派，フランスの Lê，A'Campo 等 Thom の精神的影響をうけた group 及び Polytechniques の Teissier を中心とした広中氏の弟子達，Arnold の下の Kouchnirenko，Varchenko etc.，アメリカにおける Orlik，Durfee 等など，日本においては斉藤恭司氏を中心に最近の若い人のグループ，福田拓生氏を中心とするグループ，無所属として，坂本幸一，岡 睦雄，加藤十吉 etc. などが活発な研究をしている，([11]−[33]).

(c) ベクトル場の特異点　　多様体M上のベクトル場X

が与えられた時，$X(p)=0\in T_pM$ なる p を X の特異点ということがある．L_X (Xの Lie 微分) に依って定まる $T_p(M)$ 上の線形変換が退化している際の標準形を求めることは非常に重要なことと思われるが，この方面での研究は私の知る限り余り進展していないようだ．(?)．

(d) 微分方程式 特に Phaff 方程式としての特異点．

1-form $\omega_1(z_1, \cdots, z_n)$, $\cdots$, $\omega_k(z_1, \cdots, z_n)$ が integrable であるとし，rank $(\omega_1, \cdots, \omega_k)$ が k のときは Frobenius の定理として知られている様に $n-k$ 次元の積分多様体が各点を指定した時に存在する．rank が下がるところでは，余りよくわからないが最近の Malgrange の研究が著しい，([17])．その他には特異点の名で呼ばれているものが沢山あるだろうが，こゝではこの位にして，以下で (a)，(b) に関する現状，今後の見通しについて考えよう．

§2. 現状．

(I). 超曲面の特異点． この分野は Milnor 以来，Orlik, Lê, A'Campo, Brieskorn, Saito, Oka, Sakamoto, Lazzeri等 色々な結果がえられ, 易しい問題で面白いものは全んどない? 最近では斉藤恭司が古典的アーベル積分の理論の拡張として孤立特異点をつかまえようとしているそうだが, 未だ完成に到ってないようである. 又, Kashiwara, Malgrange はモノドロミーの固有値とB-関数の根の対応を示し, その後何人かの数学者が追跡しているようだが, この2つの一見相異なる概念のギャップをうめる理論は不完全なままである. 特に孤立しない特異点の場合B関数の次数とMilnor束のファイバーのBetti数の関係など今後の研究に待つ所が多い。 Arnold門下のKouchnirenkoはニュートン境界が非退化のとき, 孤立特異点のMilnor数がニュートン境界のニュートン数と一致することを示した. Varchenko その他の若いロシアのグループはこれを振動積分に応用を試みている。一方小生も長年ニュートン境界に類似の概念を試行錯誤していたが, Kouchnirenko の仕事にhint を得, 非退化なニュートン境界をもつ擬斉次多項式のMilnor束を完全に決定することに成功し, 又これまでの雑多な諸結果をニュートン境界を通して再構成を試みている。 Lê を中心とす

るフランスグループはThomのideanに刺激されて、relative cyclesの理論を研究、非孤立特異点の研究に一つの有力な手段を提供している。又、Brieskornの下の若き数学者Slodowyはsimple singularityとLie環の分類に現れる A_n, D_n, E_6, E_7, E_8 がどのように実際の幾何学を通して対応しているかをsimple Lie群の"nilpotent"な概念を使って示し、最近の話題の一つとなっている。

又長年の懸案になっていたZariski予想は本年5月にFultonに依って解かれた模様である。

(II) 多項式写像としての特異点

福田拓生は $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ の次数を固定すればその"位相型"がtopological equivalenceの下で有限である事を示したがこの現象は一般に $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ なる多項式写像には成立しない様である。$k=2$ のときは福田グループで青木がよい結果を出しているが、一般的解決には程遠いと思われる。又Unfoldingの概念を $k \geqq 2$ のときに拡張することが望ましいが、著しい結果は何もないようである。

その他孤立特異点の変形([10],[25])について、

良い結果があるようだが，小生の能力の限界に近づいてきたので割愛する。

以上雑にのべてきたが，特異点の理論は第一次低迷期の末期にあるといえるかも知れない。これからは最新のドリルでも開発しないと新しい鉱脈を掘りあてるのは難しいかもしれない。しかしながら，小生は個人的には多少とも楽天的見通し（根拠はないが）を期待している。

末尾に文献をつけたが，勿論，これは完全なものではない。

参考文献

1. A'Campo,N; Le nombre de Lefschetz d'une monodromie, Indag. Math. 35,1973.
2. La fonction de zeta d'une monodromie, Comm.Math..Helv. 50,1975
3. Arnold, V.I. Normal forms for functions and singularities of projections of Lagrangean manifolds, Funct. Anal. Appl. 6.1972.
4. Brieskorn, E. Beispiele zur Differentialtopologie von Singularitä'ten, Invent. Math.2, 1966.

   Die monodromie der isolierten Singularitä'ten von Hyperflä'chen, Manuscripta. Math.2, 1970.
5. Deligne, P. Equations Differentielles à points singuliers reguliers, Splinger Lecture Note 163.
6. Durfee,A. Diffeomorphism crassification of isolated hypersurface singularuties, Thesis, Coronell Univ.1971.
7. Hamm, H. Local topologische Eigenschaften complexer Rå'ume, Math. Ann. 191, 1971.

8. Hamm,H. and Le Dung Trang, Un théorème de Zariski du type de Lefschetz, Ann.Sci. l'Ecole Nor. Sup.6,1973.

9. Hironaka, H, Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero,I,II, Annals of Math.79, 1964.

10. Kas,A and Schlessinger,M. On the Versal Deformation of a Complex Space with an isolated singularity, Math. Ann. 196, 1972.

11.Kato,M and Matsumoto, Y. On the connectivity of the Milnor fiber of a holomorphic function at a critical point. Manifold Tokyo, 1973.

12. Kouchnirenko,A.G. Polyhèdres de Newton et nombres de Milnor, Invent. Math. 32, 1976.

13. Hefez, A. and Lazzeri, F. The intersection matrix of Brieskorn singularities, Invent. Math. 25, 1974.

14. Lê Dũng Tráng, Calcul deu nombre de cycles évanouissants d'une hypersurface complexe, Ann. Inst. Fourier Grenoble 23, 1973

.Sur les noeuds algébriques, Comp. Math. 25, 1972.

15. Lê and Ramanujam. The invariance of the Milnor number implies the invariance of the topological type, Amer. J. Math. 98, 1976.

16. Looijenga,E. The complement of the bifurcation variety of a simple singularity, Invent. Math. 23, 1974.

On simple elliptic hypersurface singularities,

17. Malgrange, B. Le polynome de Bernstein d'une singularité isolée. Splinger Lecture note 459.

Frobenius avec singularité, I.II. Invent.

18. Mather, J. Stability of C^{infinite}-Mappings I.II.III.IV.V. 1968

19. Milnor,J. Singular points of complex hypersurfaces Annals of Math. Studies 61.

20. Mumford, D. Topology of normal singularities of an algebraic surface and a criterion for simplicity, Publ. I.H.E.S.9, 1961.

21. Oka, M. On the bifurcation of the multiplicity and the topology of the Newton boundary, I.II.J.OF Math.Soc. Japan,1979.

22. Orlik and Milnor, Isolatednaingularities defined by weighted homogeneous polynomials, Topology, 9, 1970.

23. Orlik, P. The multiplicity of a holomorphic map at an isolated critical point.

24. Pham, F. Formules de Picard-Lefschez généralizées et ramification des integrales , Bull.Soc.Math. France. 93, 1965.

25. Pinkam, H. Deformations of algebraic varieties with G_m action, Asterisque 20, 1974.

26. Saito, K. Einfach- elliptische Singularitä'ten, Invent. Math, 23, 1974.

27. Sakamoto, K. Milnor fiberings and their characteristic maps, Manifold Tokyo. 1973.

28. Siersma, D. Crassification and deformation of singularities, THESIS, Amsterdam, 1974

29. Wagreich, P. Elliptic singularities of surfaces, Amer. J. Math. 92, 1972.

30. Wassermann, G. Stability of unfoldings, Splinger Lecture Note No. 393.

31. Fukuda, T. I.H.E.S, 1978.

32. Teissier, B. Cycles evanescents, sections planes et conditions de Whitney, Astérisques 1973.

33. Thom, R. Stabilité structuelle et morphogénèse. Benjamin.

PREPRINTS

W. Meeks III and S. T. Yau, The classical Plateau problem and the topology of three dimensonal manifolds. (東工大・落合豊行氏)

W. Meeks III and S. T. Yau, Topology of three dimensional manifolds and the embedding problems in minimal surface theory. (東大・理・服部晶夫氏)

Smith の予想の解決については前号でお知らせしましたが，その際に使用される equivariant Dehn's lemma が示されている。

W. Fulton, On the fundamental group of the complement of a nord curve. (東大・養・加藤十吉)

Zariski の予想と呼ばれている問題の解決がなされている。証明の outline が与えられている。基本的な論文が Ann. of Math. に発表されるとのこと。又，Deligne の手紙もある。(岡 睦雄氏の提供による。)

次頁のプレプリントは足立正久氏の御好意による。

12.

お知らせ

TOPOLOGY NEWS は今回でNO.6になりますが、NO.1以来編集発行のすべてをなさられてこられました笹尾靖也氏が健康を害され、小生が今回は担当しました。前回迄に比較して情報量が少ないことをお許し下さい。発行にこぎつけられたのも、岡睦雄氏と足立正久氏の御協力のたまものと感謝しております。

加藤十吉