

第73回 幾何学シンポジウム 予稿集

2026年8月25日(火)～2026年8月28日(金)

福岡大学

第 73 回幾何学シンポジウム

日程： 2026 年 8 月 25 日 (火) – 8 月 28 日 (金)

会場： 福岡大学

組織責任者： 本多 宣博 (日本数学会幾何学分会 2026 年度評議員, 東京科学大学理学院)
古畑 仁 (日本数学会幾何学分会 2026 年度評議員, 北海道大学大学院理学研究院)
楯 辰哉 (東北大学大学院理学研究科)
長友 康行 (明治大学理工学部)
佐野 友二 (福岡大学理学部)
三石 史人 (福岡大学理学部)
藤岡 禎司 (福岡大学理学部)
馬場 蔵人 (東京理科大学創域理工学部)
横田 巧 (東北大学大学院理学研究科)

— プログラム —

■ 8月25日(火)

13:30–14:30	A 会場	成 慶明 (重慶理工大学・大阪公立大学)	1
		Stable Bernstein problem and μ -bubbles	
14:50–15:50	A 会場	大野 高志 (京都大学 RIMS)	10
		Manton's exotic Vortex Equations	
16:10–16:50	A 会場	大野 晋司 (日本大学文理学部)	19
		複素旗多様体と二つの実旗多様体の交叉について	
16:10–16:50	B 会場	松家 拓稔 (沼津工業高等専門学校)	24
		Morse 部分群と stable 部分群	
17:10–17:50	A 会場	Mateo Anarella (北海道大学理学研究科)	29
		Six-dimensional pseudo-Riemannian flags and totally geodesic sub-manifolds	
17:10–17:50	B 会場	中村 友哉 (工学院大学学習支援センター)	34
		Koszul-Vinberg 構造と Poisson 構造の対応	

■ 8月26日(水)

9:30–10:30	A 会場	坂田 繁洋 (法政大学 理工学部)	39
		熱流による正則閉集合と閉球の同定	
10:50–11:50	A 会場	宮武 夏雄 (東北大学数理科学共創社会センター)	49
		平衡計量と完備調和計量	
13:30–14:30	A 会場	高橋 正郎 (久留米工業高等専門学校)	59
		群同変調和写像の構成と分類について	
14:50–15:30	A 会場	幸谷 亮汰 (東京科学大学理学院)	69
		Principal twistor models and asymptotic hyperKähler metrics	
14:50–15:30	B 会場	ZHANG Rongkai (大阪大学)	75
		Rigidity of the Borell-Brascamp-Lieb inequality	
15:50–16:30	A 会場	佐々木 淳 (東京科学大学理学院)	79
		Higgs pair のモジュライ空間について	
15:50–16:30	B 会場	久保田 景 (大阪大学理学研究科)	85
		ローレンツハウスドルフ測度と余面積不等式	
16:50–17:30	A 会場	村山 庄太郎 (東京理科大学理学研究科)	90
		Fano 許容多様体の満測定数と満測ソリトン	
16:50–17:30	B 会場	笠尾 俊輔 (金沢大学自然科学研究科)	96
		様々な曲面のクラスへの Bloch-Ros principle の応用	

■ 8月27日(木)

9:30-10:30	A 会場	勝田 宗平 (名古屋大学多元数理科学研究科)	101
		値分布論における組み合わせ論的手法	
10:50-11:50	A 会場	陣内 智史 (大阪大学理学研究科)	111
		ネフかつ巨大類における小林ヒッチン対応	
13:30-14:10	A 会場	竹内 宏一 (広島大学先進理工系科学研究科)	120
		2 変数 1 未知関数の 2 階偏微分方程式に付随する微分式系の表示	
13:30-14:10	B 会場	山内 優太 (横浜国立大学理工学部)	125
		等積アファインはめ込みの絶対全曲率の最小性と凸性の関係について	
14:30-15:10	A 会場	藤谷 恭明 (東京大学数理科学研究科)	130
		Comparison theorems in centro-affine differential geometry	
14:30-15:10	B 会場	岸田 陸玖 (東京科学大学情報理工学院)	135
		3 次元 isotropic 空間内の特異点付き零平均曲率曲面	
15:30-16:10	A 会場	百野 巧真 (関西大学)	141
		Gromov-Hausdorff 空間と等距離埋め込みについて	
15:30-16:10	B 会場	島田 瑠奈 (神戸大学理学研究科)	146
		特異点の変形とその幾何	
16:30-17:10	A 会場	宮本 俊明 (東北大学理学研究科)	153
		Gromov のピラミッドの直和と分解	
16:30-17:10	B 会場	須貝 遥 (東京理科大学)	159
		5 次元 SNC リー環の分類	

■ 8月28日(金)

9:30-10:30	A 会場	櫻井 陽平 (埼玉大学理工学研究科)	164
		Almost splitting and quantitative stratification for super Ricci flow	
10:50-11:30	A 会場	Lucas H. S. Gomes (大阪大学理学研究科)	174
		On the Classification of Vaisman Manifolds with Vanishing First Basic Chern Class	
10:50-11:30	B 会場	宮地 宗人 (広島大学理学研究科)	179
		甘中-東條によって一般化された Hurwitz-Radon 数の幾何学的な意味付け	
13:00-13:40	A 会場	宇田川 衷 (早稲田大学基幹理工学部)	184
		The Iwasawa factorization with rotationally symmetric parts and the Lamé equation	
13:00-13:40	B 会場	中田 彬文 (広島大学理学研究科)	189
		コンパクト等質空間の組合せ論的一般化と調和解析	
14:00-15:00	A 会場	佐治 健太郎 (神戸大学理学研究科)	194
		波面の D4 特異点の幾何	

STABLE BERNSTEIN PROBLEM AND μ -BUBBLES*

QING-MING CHENG

ABSTRACT. In this talk, we give a survey on recent new progresses on stable Bernstein problem on minimal hypersurfaces in the Euclidean spaces and its generalization by making use of μ -bubbles. Especially, the volume bounds are discussed in details.

1. PRELIMINARIES

Let $X : M^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ be a hypersurface in the Euclidean space $\mathbf{R}^{n+1}$. $X : M^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ is called a minimal hypersurface if the mean curvature $H = 0$. On the other hand, in view of the variation of volume functional with compact support of two-sided hypersurface $X : M^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$, we know the first variation formula of volume functional is given by

$$\left. \frac{d\text{Vol}(t)}{dt} \right|_{t=0} = - \int_{M^n} H f dv, \quad \forall f \in \mathcal{C}_c^\infty(M^n).$$

Hence, $X : M^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ is a minimal hypersurface if and only if $X : M^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ is a critical point of the volume functional. The second variation formula is, for minimal hypersurfaces,

$$\left. \frac{d^2\text{Vol}(t)}{dt^2} \right|_{t=0} = \int_{M^n} (\|\nabla f\|^2 - S f^2) dv, \quad \forall f \in \mathcal{C}_c^\infty(M^n),$$

where $S = \|A_M\|^2$ and A_M denotes the second fundamental form of hypersurface $X : M^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$. A minimal hypersurface $X : M^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ is called stable if

$$\int_{M^n} \|\nabla f\|^2 dv \geq \int_{M^n} S f^2 dv, \quad \forall f \in \mathcal{C}_c^\infty(M^n).$$

2. BERNSTEIN PROBLEM

For a graph, $H = 0$ if and only if

$$\text{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2}} \right) = 0.$$

It is well-known that Bernstein proved

Bernstein theorem. A minimal entire graph in $\mathbf{R}^3$ is the plane $\mathbf{R}^2$.

2020 Mathematics Subject Classification. Primary 53C40; Secondary 53C42.

*This work was supported by National Natural Science Foundation of China (Grant No. 12571050), Japan Society for the Promotion of Science Grant-in-Aid for Scientific Research (C) (Grant No. 25K06992).

Hence, for $n = 2$, Bernstein theorem means that u is an affine function. The so-called the Bernstein problem is

Bernstein problem. Are n -dimensional minimal entire graphs in $\mathbf{R}^{n+1}$ the hyperplane $\mathbf{R}^n$?

For the Bernstein problem, Fleming [21] gave a new proof for the Bernstein theorem. De Giorgi [24] resolved the case $n = 3$, Almgren [1] resolved the case $n = 4$, Simons [40] resolved all cases for $n \leq 7$. Namely, they showed

Theorem 2.1. *Minimal entire graphs in $\mathbf{R}^{n+1}$ are the hyperplane $\mathbf{R}^n$ for $n \leq 7$, that is, u is an affine function.*

Thus, one only needs to deal with the case $n \geq 8$ in order to resolve the Bernstein problem. Bombieri, De Giorgi and Giusti [5] proved

Theorem BGG. There exists a minimal entire graph in $\mathbf{R}^9$ which is not hyperplane.

Hence, the so-called Bernstein problem was resolved completely. In fact, Bombieri, De Giorgi and Giusti constructed a minimal entire graph in $\mathbf{R}^{2n+1}$ for $n \geq 4$.

3. STABLE BERNSTEIN PROBLEM

Since a minimal hypersurface $X : M^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ is a critical point of the n -volume functional, the second variation of the n -volume functional is given by

$$\frac{d^2 \text{Vol}(t)}{dt^2} \Big|_{t=0} = \int_M (|\nabla \varphi|^2 - S\varphi^2) dv, \quad \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(M).$$

A minimal hypersurface $X : M^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ is called stable if, for any $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(M)$,

$$\int_M |\nabla \varphi|^2 dv \geq \int_M S\varphi^2 dv.$$

Since minimal entire graphs are stable, it is natural to ask the following:

Stable Bernstein problem. Is any complete two-sided stable minimal hypersurface in $\mathbf{R}^{n+1}$ ($n \leq 7$) a hyperplane $\mathbf{R}^n$?

For stable Bernstein problem, Bombieri, De Giorgi and Giusti [5] proved

Theorem BGG1. There exist 7-dimensional complete two-sided stable minimal hypersurfaces in $\mathbf{R}^8$, which are not hyperplane.

For $3 \leq n \leq 5$, Schoen-Simon-Yau [33] made an important breakthrough. They proved

Theorem SSY. The hyperplane $\mathbf{R}^n$ is the only complete two-sided stable minimal hypersurfaces with Euclidean volume growth:

$$\text{Vol}(B_R(p_0)) \leq \Lambda R^n$$

in $\mathbf{R}^{n+1}$ for $3 \leq n \leq 5$, where $B_R(p_0)$ denotes the geodesic ball with radius R in the hypersurface.

For $n = 2$, do Carmo and Peng [19], Fischer-Colbrie and Schoen [20] and Pogorelov [31] resolved the stable Bernstein problem, affirmatively, that is, they proved

Theorem 3.1. *The plane is the only complete two-sided stable minimal surfaces in $\mathbf{R}^3$.*

In order to resolve the stable Bernstein problem for $3 \leq n \leq 5$, according to the theorem of Schoen-Simon-Yau, one can consider the following problem:

Problem. Do n -dimensional complete two-sided stable minimal hypersurfaces in $\mathbf{R}^{n+1}$ for $3 \leq n \leq 5$ have Euclidean volume growth?

Up until very recently, Chodosh and Li [13] have resolved the stable Bernstein problem for $n = 3$, that is, they proved

Theorem CL. 3-dimensional complete two-sided stable minimal hypersurfaces in $\mathbf{R}^4$ have Euclidean volume growth.

Very dramatically, Chodosh and Li [14] have found the second strategy to resolve the stable Bernstein problem for $n = 3$ and at the almost same time, Catino, Mastrolia and Roncoroni [8] have developed a new strategy to resolved the stable Bernstein problem for $n = 3$ by the technique of conformal transformations.

Ideas of the second strategy of Chodosh and Li [14]

- (1) For a minimal hypersurface (M, g) in $\mathbf{R}^{n+1}$, one considers the Gulliver-Lawson conformal metric $\tilde{g} = r^{-2}g$, where r denotes the Euclidean distance function from the origin.
- (2) To prove that the scalar curvature $\tilde{R}$ is uniformly positive in the weak spectral sense:

$$-\tilde{\Delta} + \frac{1}{2}(\tilde{R} - \frac{3}{2}) \geq 0.$$

- (3) According to the theorem of Fischer-Colbrie and Schoen, there exists a positive function w such that

$$-\tilde{\Delta}w + \frac{1}{2}(\tilde{R} - \frac{3}{2})w = 0.$$

- (4) Consider functional $\mathcal{A}(\Omega)$ defined by, for a special function h ,

$$\mathcal{A}(\Omega) = \int_{\partial^*\Omega} w dA_{\tilde{g}} - \int_{\Omega} w h d v_{\tilde{g}},$$

where $\partial^*\Omega$ is the reduced boundary of Ω . There exists a domain Ω_* with finite perimeter, which minimizes the functional $\mathcal{A}$ and $\partial^*\Omega_* = \Sigma \neq \emptyset$ is smooth, which is called a μ -bubble.

- (5) Because the second variation formula is non-negative, one proves the scalar curvature of Σ is uniformly positive in the weak spectral sense. Making use of Gauss-Bonnet theorem, one obtains the upper bound of the area of Σ .
- (6) One proves

$$\text{vol} \{B_R(p_0)\} \leq \Lambda R^3.$$

By making use of ideas of the second strategy of Chodosh and Li and bi-Ricci curvature,

Chodosh, Li, Minter and Stryker [16] have been able to resolve the stable Bernstein problem for $n = 4$, that is, they proved

Theorem CLMS. 4-dimensional complete two-sided stable minimal hypersurfaces in $\mathbf{R}^5$ have Euclidean volume growth.

Essentially in the frame of the second strategy of Chodosh and Li.

Main idea:

In the step (2): In place of the scalar curvature, to prove the bi-Ricci curvature with respect to $\tilde{g}$ is uniformly positive in the weak spectral sense.

In the step (5): To prove the Ricci curvature of μ -bubble is uniformly positive in the weak spectral sense and to give the upper bound of the area of μ -bubble.

Furthermore, by following the second strategy of Chodosh and Li and using the weighted bi-Ricci curvature, Mazet [29] has been able to resolve the stable Bernstein problem for $n = 5$, that is, he proved

Theorem M. 5-dimensional complete two-sided stable minimal hypersurfaces in $\mathbf{R}^6$ have Euclidean volume growth.

Essentially in the frame of the second strategy of Chodosh and Li.

Main idea:

In the step (2): In place of the scalar curvature, to prove the α -bi-Ricci curvature with respect to $\tilde{g}$ is uniformly positive in the weak spectral sense.

In the step (5): To prove the Ricci curvature of μ -bubble is uniformly positive in the weak spectral sense and to give the upper bound of the area of μ -bubble by making use of results of Antonelli and Xu [3].

Thus, the stable Bernstein problem for $2 \leq n \leq 5$ are resolved affirmatively.

For the last case $n = 6$, the stable Bernstein problem is still open. Bellettini [4] has obtained the following:

Theorem B. If $X : M^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ ($3 \leq n \leq 6$) is complete two-sided proper, stable minimal hypersurface with the volume growth condition

$$\text{Vol} (M \cap X^{-1}(B_R^{n+1}(O))) \leq \Lambda R^n,$$

then $X : M^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ is a hyperplane.

Very recently, E. Florit-Simon [22] have generalized the result due to Schoen-Simon-Yau to $n = 6$. The following is proved

Theorem F-S. A 6-dimensional complete two-sided stable minimal hypersurface in $\mathbf{R}^7$ with Euclidean volume growth

$$\text{Vol} (B_R(M, p)) \leq \Lambda R^6$$

is the hyperplane $\mathbf{R}^6$.

$$\text{Define } V_R^I(M, p) = \frac{\text{Vol} (B_R(M, p))}{R^n} \text{ and } V_R^E(M, O) = \frac{\text{Vol} (M \cap X^{-1}(B_R^{n+p}(O)))}{R^n} .$$

Main ideas for proof.

- (1) To prove, for complete minimal submanifolds $X : M^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+p}$, $r_M(X) = d_M(p, X)$, $R_2 > R_1$

$$\begin{aligned} & V_{R_2}^I(M, p) - V_{R_1}^I(M, p) \\ &= \int_{B_{R_2}(M, p) \setminus B_{R_1}(M, p)} \frac{(r_M(X) - |X|) + \frac{|X|}{2} \left| \frac{X}{|X|} - \nu \right|^2}{r_M(X)^{n+1}} dv \end{aligned}$$

- (2) To prove, for complete minimal submanifolds $X : M^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+p}$, given $\varepsilon \in (0, 1)$, there exists $\delta = \delta(\varepsilon)$ such that if

$$V_{8R}^I(M, p) - V_R^I(M, p) \leq \delta$$

then,

$$|X| \leq r_M(X) \leq (1 + \varepsilon)|X|.$$

- (3) To prove

$$\lim_{R \rightarrow \infty} V_R^I(M, p) = \lim_{R \rightarrow \infty} V_R^E(M, O).$$

Problem. Does any 6-dimensional complete two-sided stable minimal hypersurface in $\mathbf{R}^7$ have Euclidean volume growth:

$$\text{Vol}(B_R(p_0)) \leq \Lambda R^6$$

4. δ -STABLE MINIMAL HYPERSURFACES

As a natural generalization of the concept of stability, in order to study the total curvature of embedded minimal disks, Colding and Minicozzi [17] introduced the concept of δ -stable as following:

Definition. An n -dimensional minimal hypersurface $X : M^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ in $\mathbf{R}^{n+1}$ is called δ -stable, $\delta > 0$ if

$$\int_M |\nabla \varphi|^2 dv \geq \delta \int_M S \varphi^2 dv, \quad \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(M)$$

holds.

Remark 4.1. (1) In our definition, we do not assume $\delta \leq 1$.

(2) It is easy to know that stable is δ -stable if $\delta \leq 1$ and 1-stable is stable.

(3) δ -stable minimal hypersurfaces in $\mathbf{R}^{n+1}$ are closely related to anisotropic minimal hypersurfaces in $\mathbf{R}^{n+1}$.

On δ -stable minimal hypersurfaces in $\mathbf{R}^{n+1}$, Tam and Zhou [39] proved that n -dimensional catenoid is $\frac{n-2}{n}$ -stable. Anderson, Fu and Li, and so on proved that an n -dimensional complete two-sided δ -stable minimal hypersurface $X : M^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ with finite total curvature is a hyperplane if $\delta > \frac{n-2}{n}$ and is either a hyperplane or a catenoid if $\delta = \frac{n-2}{n}$.

Kawai [28] proved that a complete two-sided δ -stable minimal surface $X : M^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ is a plane if $\delta > \frac{1}{8}$. Very recently, Hong, Li and Wang [27] have studied δ -stable minimal hypersurfaces. They have proved

Theorem HLW. For $n \geq 3$ and $\delta > \max\{\frac{n-2}{n}, \frac{(n-2)^2}{4(n-1)}\}$, an n -dimensional complete two-sided δ -stable minimal hypersurface in $\mathbf{R}^{n+1}$ satisfying the volume growth condition

$$\text{vol}(M \cap X^{-1}(B_R^{n+1}(O))) \leq \Lambda R^n$$

is a hyperplane.

In my joint work with Wei [10], we prove

Theorem 4.1. For $3 \leq n \leq 5$ and $\delta > \delta_1(n)$, an n -dimensional complete two-sided δ -stable minimal hypersurface $X : M^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ in $\mathbf{R}^{n+1}$ is a hyperplane, where $\delta_1(3) = 3/8$, $\delta_1(4) = 2/3$ and $\delta_1(5) = 21/22$.

In order to prove our theorem, we need to extend the results of Schoen-Simon-Yau to δ -stable minimal hypersurfaces, that is, we prove the following

Theorem 4.2. For an n -dimensional complete two-sided δ -stable minimal hypersurface $X : M^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ in $\mathbf{R}^{n+1}$ with $\delta > \frac{n(n-2)}{4(n-1)}$, if

$$\text{vol}\{B_R(p_0)\} \leq \Lambda R^n,$$

holds for sufficient large $R > 1$, $X : M^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ is a hyperplane, where $B_R(p_0)$ is a geodesic ball of radius R centered at some point p_0 in M^n .

Secondly, we need to prove the following:

Theorem 4.3. For an n -dimensional complete two-sided δ -stable minimal hypersurface $X : M^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ in $\mathbf{R}^{n+1}$ with $3 \leq n \leq 5$ and $\delta > \delta_0(n)$, the geodesic ball $B_R(p_0)$ of radius $R > 0$ centered at some point p_0 in M^n satisfies

$$\text{Vol}\{B_R(p_0)\} \leq \Lambda R^n,$$

where Λ is constant and

$$\delta_0(3) = \frac{1}{3}, \quad \delta_0(4) = \frac{1}{2}, \quad \delta_0(5) = \frac{21}{22}.$$

In order to prove the theorem 4.3, essentially in the frame of the second strategy of Chodoch and Li, by making use of the method of the moving frame, introducing the $\text{Bi}_{(\alpha, \beta)}\text{Ric}$ curvature

$$\text{Bi}_{(\alpha, \beta)}\text{Ric}_{12} = \beta \sum_{i=1}^n R_{1i1i} + \alpha \sum_{j=3}^n R_{2j2j}.$$

Main ideas

- (1) For a minimal hypersurface (M, g) in $\mathbf{R}^{n+1}$, we consider the Gulliver-Lawson conformal metric $\tilde{g} = r^{-2}g$, where r denotes the Euclidean distance function from the origin.
- (2) To prove the $\tilde{\text{Bi}}_{(\alpha, \beta)}\text{Ric}$ curvature with respect to metric $\tilde{g}$ is uniformly positive in the weak spectral sense.

Theorem 4.4. *For an n -dimensional complete two-sided δ -stable minimal hypersurface $X : M^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ in $\mathbf{R}^{n+1}$, with $3 \leq n \leq 5$ and $\delta > \delta_0(n)$, there exist an $\varepsilon(n) > 0$ and a smooth function V such that $V \geq \varepsilon(n) - \tilde{\Lambda}_{(\alpha, \beta)}$ and*

$$b \int_N |\tilde{\nabla} \varphi|_{\tilde{g}}^2 dv_{\tilde{g}} \geq \int_N V \varphi^2 dv_{\tilde{g}}, \text{ for } \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(N),$$

where $\tilde{\Lambda}_{(\alpha, \beta)}$ is the minimum of the (α, β) -bi-Ricci curvature of $N = M \setminus X^{-1}(O)$ at each point.

- (3) According to the theorem of Fischer-Colbrie and Schoen, there exists a positive function w such that

$$-b\tilde{\Delta}w + Vw = 0.$$

- (4) Consider functional $\mathcal{A}(\Omega)$ defined by, for a special function h ,

$$\mathcal{A}(\Omega) = \int_{\partial^* \Omega} w^q dA_{\tilde{g}} - \int_{\Omega} w^q h dv_{\tilde{g}},$$

where $\partial^* \Omega$ is the reduced boundary of Ω . To prove that there exists a domain Ω_* with finite perimeter, which minimizes the functional $\mathcal{A}$ and $\partial^* \Omega_* = \Sigma \neq \emptyset$ is smooth, that is, μ -bubble Σ exists.

- (5) To prove that the Ricci curvature of μ -bubble Σ is uniformly positive in the weak spectral sense, that is, we prove.

Theorem 4.5. *There exists a domain Ω_* such that $V > \frac{\varepsilon(n)}{2\alpha} - \bar{\lambda}$ and*

$$\frac{4}{4-q} \frac{\beta}{\alpha} \int_{\Sigma} |\bar{\nabla} f|_{\tilde{g}}^2 dv_{\tilde{g}} \geq \int_{\Sigma} V f^2 dv_{\tilde{g}}, \text{ for } f \in \mathcal{C}_c^1(\Sigma),$$

where $\Sigma = \partial \Omega_*$, $\tilde{g}$ is the induced metric on Σ and $\bar{\lambda}$ is the minimum of Ricci curvature at each point in Σ and α, β and $\varepsilon(n)$ are constant.

- (6) By making use of the Gauss-Bonnet theorem for $n = 3$ and theorem of Antonelli and Xu [3] for $n = 4, 5$, to prove

$$\text{Area}_{\tilde{g}}(\Sigma) \leq \left(\frac{(n-2)\alpha}{\varepsilon(n)} \right)^{\frac{n-1}{2}} \text{Area}(S^{n-1}).$$

The isoperimetric inequality for minimal hypersurfaces in $\mathbf{R}^{n+1}$ yields

$$\text{Vol}_g(B_R(p_0)) \leq \left(\frac{(n-2)\alpha}{\varepsilon(n)} \right)^{\frac{n}{2}} \text{Vol}(B^n) (2R \exp(\frac{3}{y_0} \pi))^n.$$

Acknowledgement. This work was partly supported by MEXT Promotion of Distinctive Joint Research Center Program JPMXP0723833165 and Osaka Metropolitan University Strategic Research Promotion Project (Development of International Research Hubs).

REFERENCES

1. F. J. Jr. Almgren, Some interior regularity theorems for minimal surfaces and an extension of Bernstein's theorem, *Ann. of Math.*, 84(1966), 277-292.
2. M. Anderson, The compactification of a minimal submanifold by its Gauss map. <http://www.math.sunysb.edu/5anderson/papers.html2>
3. G. Antonelli and K. Xu, New spectral Bishop-Gromov and Bonnet-Myers theorems and application to isoperimetry, arXiv:2405.08918.
4. S. Bernstein, Über ein geometrisches Theorem und seine Anwendung auf die partiellen Differential-gleichungen vom elliptischen Typus. *Math. Z.*, 26(1927), 551-558.
5. E. Bombieri, E. De Giorgi and E. Giusti, Minimal cones and the Bernstein problem, *Invent. Math.*, 7(1969), 243-268 .
6. S. Brendle. The isoperimetric inequality for a minimal submanifold in Euclidean space. *J. Amer. Math. Soc.*, 34(2021), 595-603.
7. H.-D. Cao, Y. Shen and S. Zhu, The structure of stable minimal hypersurfaces in $\mathbf{R}^{n+1}$, *Math. Res. Lett.* 4 (1997), 637-644.
8. G. Catino, P. Mastrolia, and A. Roncoroni, Two rigidity results for stable minimal hypersurfaces, *Geom. Funct. Anal.*, 34(2024), 1-18.
9. G. Catino, L. Mari, P. Mastrolia and A. Roncoroni, Criticality, splitting theorems under spectral Ricci Bounds and the topology of stable minimal hypersurfaces, arXiv: 2412.12631.
10. Q. -M. Cheng and G. Wei, Complete two-sided δ -stable minimal hypersurfaces in $\mathbf{R}^{n+1}$, arXiv:2507.00342.
11. X. Cheng and D. Zhou, Manifolds with weighted Poincaré inequality and uniqueness of minimal hypersurfaces, *Comm. Anal. Geom.*, 17(2009),139-154.
12. O. Chodosh and C. Li, Generalized soap bubbles and the topology of manifolds with positive scalar curvature, *Ann. of Math.*, 199(2024), 707-740.
13. O. Chodosh and C. Li, Stable minimal hypersurfaces in $\mathbf{R}^4$, *Acta Math.*, 233(2024), 1-31.
14. O. Chodosh and C. Li, Stable anisotropic minimal hypersurfaces in $\mathbf{R}^4$, *Forum Math. Pi*, 11:Paper No. e3, 22, 2023.
15. O. Chodosh, C. Li, and D. Stryker, Complete stable minimal hypersurfaces in positively curved 4-manifolds, *J. Eur. Math. Soc.*, 28(2026), 1457-1487.
16. O. Chodosh, C. Li, P. Minter and D. Stryker, Stable minimal hypersurfaces in $\mathbf{R}^5$, to appear in *Ann. of Math.*, arXiv:2401.01492.
17. T. H. Colding and W. P. Minicozzi, II, The space of embedded minimal surfaces of fixed genus in a 3-manifold. II. Multi-valued graphs in disks, *Ann. of Math. (2)*, 160(2004), 69-92.
18. E. De Giorgi, Una estensione del teorema di Bernstein, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.*, 19 (1965), 79-85.
19. M. do Carmo and C. K. Peng, Stable complete minimal surfaces in $\mathbf{R}^3$ are planes, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 1(1979), 903-906.
20. D. Fischer-Colbrie and R. Schoen, The structure of complete stable minimal surfaces in 3-manifolds of nonnegative scalar curvature, *Comm. Pure Appl. Math.*, 33(1980), 199-211.
21. W. H. Fleming, On the oriented Plateau problem, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 11 (1962), 69-90.
22. E. Florit-Simon, Equivalence of intrinsic and extrinsic area bounds for minimal surfaces, arXiv: 2605.06468
23. H. Fu and Z. Li, The structure of complete manifolds with weighted Poincare inequalities and minimal hypersurfaces, *International J. Math.*, 21 (2010), 1-8.
24. M. Gromov, Metric inequalities with scalar curvature, *Geom. Funct. Anal.*, 28 (2018), no. 3, 645-726.
25. M. Gromov, No metrics with positive scalar curvatures on aspherical 5-manifolds, preprint, (2020).
26. R. Gulliver and H. B. Lawson, The structure of stable minimal hypersurfaces near a singularity, In *Geometric measure theory and the calculus of variations* (Arcata, Calif., 1984), volume 44 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 213-237. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986.

27. H. Hong, H. Li and G. Wang, On δ -stable minimal hypersurfaces in R^{n+1} , arXiv:2407.03222.
28. S. Kawai, Operator $\Delta - aK$ on surfaces, Hokkaido Math. J., 17(1988), 147-150.
29. L. Mazet, Stable minimal hypersurfaces in $\mathbf{R}^6$, arXiv:2405.14676.
30. J. H. Michael and L. M. Simon, Sobolev and mean-value inequalities on generalized submanifolds of $\mathbf{R}^n$, Comm. Pure Appl. Math., 26(1973), 361-379.
31. A. V. Pogorelov, On the stability of minimal surfaces, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 260(1981), 293-295.
32. R. Schoen, Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature, J. Differential Geom., 20 (1984), 479-495.
33. R. Schoen, L. Simon, and S. T. Yau, Curvature estimates for minimal hypersurfaces, Acta Math., 134(1975) 275-288.
34. R. Schoen and S. T. Yau, On the proof of the positive mass conjecture in general relativity, Comm. Math. Phys., 65 (1979), no. 1, 45-76.
35. R. Schoen and S. T. Yau, Existence of incompressible minimal surfaces and the topology of three-dimensional manifolds with nonnegative scalar curvature, Ann. of Math., 110 (1979), 127-142.
36. R. Schoen and S. T. Yau, On the structure of manifolds with positive scalar curvature, Manuscripta Math., 28 (1979), 159-183.
37. Y. Shen and R. Ye, On the geometry and topology of manifolds of positive bi-Ricci curvature, arXiv:9708014.
38. L. Simon, Lectures on geometric measure theory, Proceedings of the Centre for Mathematical Analysis, Australian National University, vol. 3, Australian National University, Centre for Mathematical Analysis, Canberra, 1983.
39. L.-F. Tam and D. Zhou, Stability properties for the higher dimensional catenoid in $\mathbf{R}^{n+1}$, Proc. Amer. Math. Soc., 137 (2009), 3451-3461.
40. J. Simons, Minimal varieties in riemannian manifolds, Ann. of Math. (2), 88(1968), 62-105.
41. J. Zhu, Width estimate and doubly warped product, Trans.Amer.Math.Soc., 374 (2021), 1497-1511.

QING-MING CHENG

MATHEMATICAL SCIENCE RESEARCH CENTER,

CHONGQING UNIVERSITY OF TECHNOLOGY, CHONGQING 400054, P. R. CHINA.

OSAKA CENTER ADVANCED MATHEMATICAL INSTITUTE

OSAKA METROPOLITAN UNIVERSITY, OSAKA 558-8585, JAPAN

QINGMINGCHENG@YAHOO.COM, CHENGQINGMING@CQUT.EDU.CN

Manton's exotic Vortex Equations

Takashi Ono*

Abstract

This is a report of [17]. In [17], we study some aspects of the vortex equations defined by Manton in [16]. In this report, we discuss the existence of solutions and dimensional reduction.

1 Introduction

We first recall the definition of the vortex equation.

Let X be a compact Riemann surface with a Kähler form ω . Let $(L, \bar{\partial}_L)$ be a holomorphic line bundle over X and h be a Hermitian metric of L . Then by [22], there exists a unique connection ∇_h which is called the Chern connection such that ∇_h is unitary (i.e. $dh(\cdot, \cdot) = h(\nabla_h \cdot, \cdot) + h(\cdot, \nabla_h \cdot)$) and the $(0, 1)$ -part of ∇_h is $\bar{\partial}_L$. We denote by F_h the curvature of ∇_h .

Let τ be a positive constant. We say that the triple $((L, \bar{\partial}_L), \phi, h)$ satisfies the τ -vortex equation if

$$\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_h + \frac{1}{2}|\phi|_h^2 - \frac{\tau}{2} = 0. \quad (1.1)$$

Here Λ_ω is the contraction with respect to the Kähler form ω . The vortex equation was originally introduced in physics [11], and studied mathematically in [19, 5, 10]. We note that in [5, 10], the vortex equation was considered on a higher-dimensional manifold. The vortex equation and its suitable generalization are related to many other mathematical concepts and are studied intensively in [3, 4, 6, 10].

In [16], Manton deformed the vortex equation. In particular, he considered the equation

$$\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_h + C_0 \frac{1}{2}|\phi|_h^2 - C_1 \frac{\tau}{2} = 0, \quad (C_0, C_1 \in \{-1, 0, 1\}). \quad (1.2)$$

We call equation (1.1) the classical vortex equation, and equation (1.2) Manton's exotic τ -vortex equation. In this report, we focus on the latter equation. Before we present what we have done, we note that out of nine possibilities, only

$$(C_0, C_1) = (1, 1), (-1, 1), (-1, 0), (-1, -1), (0, 1) \quad (1.3)$$

can occur. We outline why $(C_0, C_1) = (1, -1)$ cannot happen, for example. Suppose

$$\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_h + \frac{1}{2}|\phi|_h^2 + \frac{\tau}{2} = 0.$$

*Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University, Kyoto, Japan
takashio@kurms.kyoto-u.ac.jp

We assume that ϕ is not the zero-section and therefore $\deg L > 0$. Then

$$\int_X \left(\sqrt{-1} \Lambda_\omega F_h + \frac{1}{2} |\phi|_h^2 + \frac{\tau}{2} \right) > 0$$

while this contradicts the equation.

We now go back to the five cases (1.3). The

$$(C_0, C_1) = (1, 1)$$

case was studied in [19, 5, 9] and the

$$(C_0, C_1) = (0, 1)$$

case is a Hermitian-Yang-Mills equation, and it is studied by many others (See [15] for example). The remaining

$$(C_0, C_1) = (-1, 1), (-1, 0), (-1, -1) \tag{1.4}$$

cases are what we are interested in. Although these three cases are studied in physics, they are relatively unexplored in the math literature. The $(C_0, C_1) = (-1, 1)$ case was studied in [1, 2], the $(C_0, C_1) = (-1, 0)$ case was studied in [12, 13], and $(C_0, C_1) = (-1, -1)$ case was studied in [18, 20].

Recall that the equation which we are interested in is (1.2) with $(C_0, C_1) = (-1, 1), (-1, 0), (-1, -1)$. We also recall that we assumed $\tau > 0$. Since C_1 takes value in $-1, 0, 1$, the equation we are interested in is in fact

$$\sqrt{-1} \Lambda_\omega F_h - \frac{1}{2} |\phi|_h^2 - \frac{\tau}{2} = 0, \quad (\tau \in \mathbb{R}). \tag{1.5}$$

We now introduce some part of the result of [17]. The first result is as follows.

Theorem 1.1 (Theorem 2.2). *Let X be a compact Riemann surface with a Kähler form ω . Let $(L, \bar{\partial}_L)$ be a holomorphic line bundle over X , and let ϕ be a holomorphic section of $(L, \bar{\partial}_L)$. Then, for a suitable choice of $\tau \in \mathbb{R}$, there exists a Hermitian metric h_L on L such that $((L, \bar{\partial}_L), \phi, h_L)$ satisfies Manton's exotic τ -vortex equation, namely*

$$\sqrt{-1} \Lambda_\omega F_h - \frac{1}{2} |\phi|_h^2 - \frac{\tau}{2} = 0.$$

We prove this result by using a result of Kazdan and Warner [14].

Theorem 1.1 assures us that, after a suitable choice of the parameter τ , there exist solutions to Manton's exotic τ -vortex equation for a broad class of holomorphic data. Thus, the corresponding solution space is nonempty in a systematic way. This makes it natural to construct the associated moduli space and to ask what geometric structures it carries. In [17], we prove that the moduli space carries a symplectic manifold structure on the smooth part. This can be proved by using the Kuranishi map or using symplectic reduction. However, we do not discuss this in this report.

Another main result presented in this report is a dimensional reduction theorem, which shows that Manton's exotic vortex equation arises from an equivariant pseudo-Hermitian-Yang-Mills connection.

A central theme in gauge theory is to study solutions of equations arising as Euler-Lagrange equations of natural functionals. Dimensional reduction is the phenomenon in which, by imposing suitable symmetry, solutions of a gauge-theoretic equation on a higher-dimensional space yield solutions of a gauge-theoretic equation on a lower-dimensional base. In this way, it explains how equations arising from apparently different natural functionals can be related. It also provides a useful method for constructing examples via reduction and lifting.

In [10], García-Prada proved a dimensional reduction result for the classical vortex equation. More precisely, let M be a compact Kähler manifold. He showed that the classical vortex equation on M arises from the $SU(2)$ -invariant Hermitian-Yang-Mills connection on $M \times \mathbb{P}^1$. Here $\mathbb{P}^1$ is the complex projective line. Using this dimensional reduction, García-Prada gave a construction of solutions to the classical vortex equation and discussed conditions for their existence.

In [8], Contatto and Dunajski observed a dimensional reduction phenomenon for Manton's exotic vortex equation. In particular, they showed, in a local-coordinate formulation, that the exotic vortex equation arises from anti-self-dual connections with structure group $SU(1, 1)$, invariant under a suitable group action on a certain four-dimensional manifold.

Motivated by their observation, we give an intrinsic formulation of this reduction. We identify the underlying equivariant holomorphic bundle and write down explicitly the corresponding connection and invariant indefinite Hermitian form. With these geometric data specified, we show that Manton's exotic vortex equation is obtained as the dimensional reduction of the pseudo-Hermitian-Yang-Mills equation.

We now introduce the notation needed to state this dimensional reduction result. Let (X, ω) and $(L, \bar{\partial}_L)$ be as above. We denote by

$$(\mathbb{C}_{X \times \mathbb{P}^1}, \bar{\partial}_{X \times \mathbb{P}^1})$$

the trivial holomorphic line bundle on $X \times \mathbb{P}^1$, where $\bar{\partial}_{X \times \mathbb{P}^1}$ is the canonical Dolbeault operator. Let

$$p : X \times \mathbb{P}^1 \rightarrow X, \quad q : X \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$$

be the projections. Let $\mathcal{O}(2)$ be the holomorphic line bundle of degree 2 on $\mathbb{P}^1$, and equip $p^*L \otimes q^*\mathcal{O}(2)$ with the product Dolbeault operator

$$\bar{\partial}_{p^*L \otimes q^*\mathcal{O}(2)} = p^*\bar{\partial}_L \otimes \text{Id} + \text{Id} \otimes q^*\bar{\partial}_{\mathcal{O}(2)}.$$

Let $(E, \bar{\partial}_E)$ be a holomorphic bundle extension of $(\mathbb{C}_{X \times \mathbb{P}^1}, \bar{\partial}_{X \times \mathbb{P}^1})$ by $(p^*L \otimes q^*\mathcal{O}(2), \bar{\partial}_{p^*L \otimes q^*\mathcal{O}(2)})$. Namely, there exists a holomorphic bundle short exact sequence

$$0 \longrightarrow (p^*L \otimes q^*\mathcal{O}(2), \bar{\partial}_{p^*L \otimes q^*\mathcal{O}(2)}) \longrightarrow (E, \bar{\partial}_E) \longrightarrow (\mathbb{C}_{X \times \mathbb{P}^1}, \bar{\partial}_{X \times \mathbb{P}^1}) \longrightarrow 0.$$

Theorem 1.2 (Theorem 3.1). *If $(E, \bar{\partial}_E)$ is an $SU(2)$ -equivariant holomorphic bundle, then there exists a holomorphic section ϕ of $(L, \bar{\partial}_L)$ such that*

$$\bar{\partial}_E = \begin{pmatrix} p^*\bar{\partial}_L \otimes \text{Id} + \text{Id} \otimes q^*\bar{\partial}_{\mathcal{O}(-2)} & \sqrt{\frac{1}{\tau}} \cdot p^*\phi \otimes q^*\alpha \\ 0 & \bar{\partial}_{X \times \mathbb{P}^1} \end{pmatrix}.$$

Let h_E be a non-degenerate Hermitian form of signature $(1,1)$ on E . If h_E is $SU(2)$ -invariant, then there exist Hermitian metrics h_L on L and h_X on $\underline{\mathbb{C}}_X$ such that

$$h_E = \begin{pmatrix} C_0 \cdot p^*(h_X h_L) \otimes q^* h^{(-2)} & 0 \\ 0 & C_1 \cdot p^* h_X \end{pmatrix}$$

where $(C_0, C_1) = (1, -1)$ or $(-1, 1)$.

Let h_E and $(E, \bar{\partial}_E)$ be as above, and ∇_{h_E} be the connection compatible with h_E and $\nabla_{h_E}^{0,1} = \bar{\partial}_E$. If h_E is a Hermitian-Einstein form of $(E, \bar{\partial}_E)$ with respect to Ω_τ , or equivalently, if ∇_{h_E} is a pseudo-Hermitian-Yang-Mills connection, then the triple $((L, \bar{\partial}_L), \phi, h_L)$ satisfies Manton's exotic τ -vortex equation.

Acknowledgements

The author is grateful to Oscar García-Prada for his comments on this work and for giving the author a print of [20].

2 Existence of Solution

Let X be a compact Riemann Surface with a Kähler form ω_X . We normalize ω_X so that

$$\int_X \omega_X = 1.$$

We fix this notation throughout this section.

Let $(L, \bar{\partial}_L)$ be a holomorphic line bundle, ϕ be a holomorphic section, and h_L be a Hermitian metric of L . Let $\tau \in \mathbb{R}$. Recall that we say that the triple $((L, \bar{\partial}_L), \phi, h_L)$ satisfies the Manton's exotic τ -vortex equation if

$$\sqrt{-1}\Lambda_{\omega_X} F_{h_L} - \frac{1}{2}|\phi|_{h_L}^2 - \frac{\tau}{2} = 0. \quad (2.1)$$

The question we pose and would like to answer is as follows.

Question 2.1. *Let $(L, \bar{\partial}_L)$ and ϕ be as above. When does there exist a Hermitian metric h_L on L such that, for some $\tau \in \mathbb{R}$, $((L, \bar{\partial}_L), \phi, h_L)$ satisfies Manton's exotic τ -vortex equation?*

We give the answer to the question by using the result of Kazdan-Warner. Before we proceed, we prepare some notations. Let k be a Hermitian metric of L and ∇_k be the Chern connection with respect to $\bar{\partial}_L$ and k . We denote by F_k the curvature of ∇_k . We define a constant $c_{L,\tau}$ as

$$c_{L,\tau} := 2 \int_X \left(\sqrt{-1}\Lambda_{\omega_X} F_k - \frac{\tau}{2} \right) = 4\pi \deg L - \tau.$$

Let $v_k : X \rightarrow \mathbb{R}$ be a smooth function that satisfies

$$-\Delta v_k = \sqrt{-1}\Lambda_{\omega_X} F_k - \frac{\tau}{2} - \frac{c_{L,\tau}}{2}.$$

Here Δ is the Laplacian. Such v_k exists by the classical Hodge theory (See [21]). Let $w \in C^\infty(X, \mathbb{R})$. Then

$$h_L := k \cdot e^{e+2v_k}$$

is also a Hermitian metric of L . Then the following can be proved after some calculations.

Proposition 2.1. *The triple $((L, \bar{\partial}_L), \phi, h_L)$ satisfies the Manton's exotic τ -vortex equation if and only if*

$$-\Delta w + |\phi|_k^2 e^{2v_k} \cdot e^w - c_{L,\tau} = 0. \quad (2.2)$$

The equation (2.2) is exactly the type of equation that Kazdan and Warner studied. Now we recall the result of [14].

Theorem 2.1 ([14, Theorem 5.3, Theorem 7.2, Theorem 10.1]). *Let (X, ω) be a compact Riemann surface with $\int_X \omega = 1$. Let $c \in \mathbb{R}$ be a constant and $h \in C^\infty(X, \mathbb{R})$. We consider the equation*

$$-\Delta w + h e^w - c = 0. \quad (2.3)$$

The existence of solutions to equation (2.3) depends on the value of c . We therefore distinguish several cases according to the value of c .

- $c \leq 0$. *If $h \in C^\infty(X, \mathbb{R}_{>0})$, then the solution does not exist.*
- $c > 0$.
 - (a) *A necessary condition for the existence of a solution to (2.3) is that h be positive somewhere on X .*
 - (b) *If h is positive somewhere, there is a positive constant $c(h) > 0$ depending on h such that (2.3) has a solution $w \in C^\infty(X, \mathbb{R})$ if $0 < c < c(h)$. Moreover there exists a constant β which does not depend on h but possibly depends on X such that*

$$\beta \leq c(h).$$

See [14, p. 21-23] for the details of β .

We obtain

Theorem 2.2. *Let $(L, \bar{\partial}_L)$ be a holomorphic line bundle over X , and let ϕ be a holomorphic section of $(L, \bar{\partial}_L)$. Then, for a suitable choice of $\tau \in \mathbb{R}$, there exists a Hermitian metric h_L on L such that $((L, \bar{\partial}_L), \phi, h_L)$ satisfies Manton's exotic τ -vortex equation.*

Proof. Let k be a Hermitian metric of L , and $w \in C^\infty(X, \mathbb{R})$. Then, by Proposition 2.1, the triple $((L, \bar{\partial}_L), \phi, k \cdot e^{2v_k + w})$ satisfies Manton's exotic τ -vortex equation if and only if w satisfies

$$-\Delta w + |\phi|_k^2 e^{2v_k} \cdot e^w - c_{L,\tau} = 0.$$

By Theorem 2.1, such a solution exists when

$$0 < c_{L,\tau} = 4\pi \deg L - \tau < \beta.$$

Hence, if we take τ appropriately, there exists a Hermitian metric h_L on L such that $((L, \bar{\partial}_L), \phi, h_L)$ satisfies Manton's exotic τ -vortex equation. $\square$

3 Dimensional Reduction

Let X be a compact Riemann surface with a Kähler form ω_X . We normalize ω_X so that

$$\int_X \omega_X = 1.$$

We fix this notation throughout this section.

Before we state the dimensional reduction, we prepare some notations and review some facts.

Definition 3.1. *Let F be a complex vector bundle over a manifold M , and h be a non-degenerate Hermitian form of E . We say that h is of signature (p, q) ($p + q = \text{rank} E$) if h defines a $U(p, q)$ -reduction of $GL(E)$. Here $GL(E)$ is the associated frame bundle of E .*

Remark 3.1. *If a non-degenerate Hermitian form h is of signature $(r, 0)$, then h is a Hermitian metric.*

Let $(F, \bar{\partial}_F)$ be a holomorphic bundle over a complex manifold M and h be a Hermitian metric of F . Then the Chern connection ∇_h is the unique connection such that 1. h is flat with respect to ∇_h , 2. The $(0, 1)$ -part of ∇_h is $\bar{\partial}_F$. Since the construction of the Chern connection only uses the non-degeneracy of h , we have the following.

Lemma 3.1. *Let $(F, \bar{\partial}_F)$ be a holomorphic bundle over a complex manifold M , and h be a non-degenerate Hermitian form of E of signature (p, q) . Then, there exists a unique connection ∇_h such that 1. h is flat with respect to ∇_h , 2. The $(0, 1)$ -part of ∇_h is $\bar{\partial}_F$.*

Definition 3.2. *Let $(F, \bar{\partial}_F)$ be a holomorphic bundle over a complex manifold M , and h be a non-degenerate Hermitian form of E of signature (p, q) . Let ω_M be a Kähler form of M . We say that h is a Hermitian-Einstein form on $(E, \bar{\partial}_E)$ if there exists a constant λ such that*

$$\sqrt{-1}\Lambda_{\omega_M} F_h = \lambda \text{Id}_E.$$

In this case, we also call ∇_h a pseudo-Hermitian-Yang-Mills connection.

We next review some properties of $\mathcal{O}(n)$. We denote by $\mathcal{O}(n)$ the unique degree n holomorphic line bundle over $\mathbb{P}^1$, and $\bar{\partial}_{\mathcal{O}(n)}$ the holomorphic structure of $\mathcal{O}(n)$. The special unitary group $SU(2)$ acts on $\mathbb{P}^1$ holomorphically (i.e., every element of $SU(2)$ defines a holomorphic automorphism of $\mathbb{P}^1$), and we are able to lift the action to $\mathcal{O}(n)$. With respect to this action, $(\mathcal{O}(n), \bar{\partial}_{\mathcal{O}(n)})$ becomes an $SU(2)$ -equivariant holomorphic line bundle. It also admits an $SU(2)$ -invariant Hermitian metric $h^{(n)}$.

We denote by $A^{0,1}(\mathcal{O}(-2))^{SU(2)}$ (resp. $A^{1,0}(\mathcal{O}(2))^{SU(2)}$) the space of $SU(2)$ -equivariant $\mathcal{O}(-2)$ -valued $(0, 1)$ -form (resp. $SU(2)$ -equivariant $\mathcal{O}(2)$ -valued $(1, 0)$ -form). Then both spaces are one-dimensional, and we denote the generator of $A^{0,1}(\mathcal{O}(-2))^{SU(2)}$ as α and $A^{1,0}(\mathcal{O}(2))^{SU(2)}$ as β .

Let $(L, \bar{\partial}_L)$ be a holomorphic line bundle over X and $(\underline{\mathbb{C}}_{X \times \mathbb{P}^1}, \bar{\partial}_{X \times \mathbb{P}^1})$ the trivial holomorphic line bundle on $X \times \mathbb{P}^1$, where $\bar{\partial}_{X \times \mathbb{P}^1}$ is the canonical Dolbeault operator.

Let

$$p : X \times \mathbb{P}^1 \rightarrow X, \quad q : X \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$$

be the projections. Let $(E, \bar{\partial}_E)$ be a holomorphic bundle extension of $(\underline{\mathbb{C}}_{X \times \mathbb{P}^1}, \bar{\partial}_{X \times \mathbb{P}^1})$ by $(p^*L \otimes q^*\mathcal{O}(2), \bar{\partial}_{p^*L \otimes q^*\mathcal{O}(2)})$. Namely, there exists a holomorphic bundle short exact sequence

$$0 \longrightarrow (p^*L \otimes q^*\mathcal{O}(2), \bar{\partial}_{p^*L \otimes q^*\mathcal{O}(2)}) \longrightarrow (E, \bar{\partial}_E) \longrightarrow (\underline{\mathbb{C}}_{X \times \mathbb{P}^1}, \bar{\partial}_{X \times \mathbb{P}^1}) \longrightarrow 0.$$

Here $\bar{\partial}_{p^*L \otimes q^*\mathcal{O}(2)}$ is the product Dolbeault operator

$$\bar{\partial}_{p^*L \otimes q^*\mathcal{O}(2)} = p^*\bar{\partial}_L \otimes \text{Id} + \text{Id} \otimes q^*\bar{\partial}_{\mathcal{O}(2)}.$$

We assume that $SU(2)$ acts on $X \times \mathbb{P}^1$ trivially on X and by the standard action on $\mathbb{P}^1$. Since E is a holomorphic bundle extension, the underlying smooth vector bundle splits. Hence

$$E \simeq p^*L \otimes q^*\mathcal{O}(2) \oplus \underline{\mathbb{C}}_{X \times \mathbb{P}^1}.$$

as smooth bundles.

Through this identification, we endow E with the smooth $SU(2)$ -equivariant structure induced by the standard $SU(2)$ -equivariant structure on $\mathcal{O}(2)$ and the trivial action on p^*L and $\underline{\mathbb{C}}_{X \times \mathbb{P}^1}$.

Let $\tau > 0$. We fix a Kähler form on $X \times \mathbb{P}^1$ given by

$$\Omega_\tau = \left(\frac{\tau}{8\pi} p^*\omega_X \right) \oplus q^*\omega_{\text{FS}}.$$

Here ω_{FS} is the Kähler form of $\mathbb{P}^1$ associated to the Fubini-Study Kähler form. The dimensional reduction is then stated as follows.

Theorem 3.1. *If $(E, \bar{\partial}_E)$ is an $SU(2)$ -equivariant holomorphic bundle, then there exists a holomorphic section ϕ of $(L, \bar{\partial}_L)$ such that*

$$\bar{\partial}_E = \begin{pmatrix} p^*\bar{\partial}_L \otimes \text{Id} + \text{Id} \otimes q^*\bar{\partial}_{\mathcal{O}(-2)} & \sqrt{\frac{1}{\tau}} \cdot p^*\phi \otimes q^*\alpha \\ 0 & \bar{\partial}_{X \times \mathbb{P}^1} \end{pmatrix}.$$

Let h_E be a non-degenerate Hermitian form of signature $(1, 1)$ on E . If h_E is $SU(2)$ -invariant, then there exist Hermitian metrics h_L on L and h_X on $\underline{\mathbb{C}}_X$ such that

$$h_E = \begin{pmatrix} C_0 \cdot p^*(h_X h_L) \otimes q^*h^{(-2)} & 0 \\ 0 & C_1 \cdot p^*h_X \end{pmatrix}$$

where $(C_0, C_1) = (1, -1)$ or $(-1, 1)$.

Let h_E and $(E, \bar{\partial}_E)$ be as above, and ∇_{h_E} be the connection compatible with h_E and $\nabla_{h_E}^{0,1} = \bar{\partial}_E$. If h_E is a Hermitian-Einstein form of $(E, \bar{\partial}_E)$ with respect to Ω_τ , or equivalently, if ∇_{h_E} is a pseudo-Hermitian-Yang-Mills connection, then the triple $((L, \bar{\partial}_L), \phi, h_L)$ satisfies the Manton's exotic τ -vortex equation.

Proof. We divide the proof into three steps. First, we determine the possible $SU(2)$ -equivariant holomorphic structures on the underlying smooth bundle. Since E is an extension, as a smooth complex vector bundle it is identified with

$$p^*L \otimes q^*\mathcal{O}(-2) \oplus \underline{\mathbb{C}}_{X \times \mathbb{P}^1}.$$

With respect to this smooth splitting, the Dolbeault operator of E has an upper triangular form. The diagonal part is fixed by the holomorphic structures of L ,

$\mathcal{O}(-2)$, and the trivial line bundle. The off-diagonal term is a $(0,1)$ -form with values in

$$p^*L \otimes q^*\mathcal{O}(-2).$$

Using the $SU(2)$ -equivariance and the fact that $SU(2)$ acts trivially on X and in the standard way on $\mathbb{P}^1$, this off-diagonal term is forced to be the tensor product of a holomorphic section of L and the $SU(2)$ -invariant generator α on $\mathbb{P}^1$. Hence there exists a holomorphic section ϕ such that

$$\bar{\partial}_E = \begin{pmatrix} p^*\bar{\partial}_L \otimes Id + Id \otimes q^*\bar{\partial}_{\mathcal{O}(-2)} & \sqrt{\frac{1}{\tau}} \cdot p^*\phi \otimes q^*\alpha \\ 0 & \bar{\partial}_{X \times \mathbb{P}^1} \end{pmatrix}.$$

Second, we describe the $SU(2)$ -invariant non-degenerate Hermitian forms of signature $(1,1)$ on E . By the $SU(2)$ -invariance, the two summands

$$p^*L \otimes q^*\mathcal{O}(-2) \quad \text{and} \quad \underline{\mathbb{C}}_{X \times \mathbb{P}^1}$$

are orthogonal with respect to any $SU(2)$ -invariant Hermitian form h_E . Moreover, the restriction of h_E to the first summand is the product of a Hermitian metric on L , a Hermitian metric on the trivial line bundle over X , and the standard $SU(2)$ -invariant Hermitian metric $h^{(-2)}$ on $\mathcal{O}(-2)$. Therefore there exist Hermitian metrics h_L on L and h_X on $\underline{\mathbb{C}}_X$ such that

$$h_E = \begin{pmatrix} C_0 \cdot p^*(h_X h_L) \otimes q^*h^{(-2)} & 0 \\ 0 & C_1 \cdot p^*h_X \end{pmatrix},$$

where $(C_0, C_1) = (1, -1)$ or $(-1, 1)$, according to the choice of signature.

Finally, let ∇_{h_E} be the connection compatible with h_E and satisfying $\nabla_{h_E}^{0,1} = \bar{\partial}_E$ (See Lemma 3.1). We assume that h_E is a Hermitian-Einstein form. Using the above expressions for $\bar{\partial}_E$ and h_E , we can compute the curvature of ∇_{h_E} explicitly. The condition that h_E is a Hermitian-Einstein form, equivalently that ∇_{h_E} is a pseudo-Hermitian-Yang-Mills connection, reduces exactly to Manton's exotic τ -vortex equation for

$$((L, \bar{\partial}_L), \phi, h_L).$$

Thus the triple $((L, \bar{\partial}_L), \phi, h_L)$ satisfies Manton's exotic τ -vortex equation. $\square$

References

- [1] J. Ambjørn, P. Olesen, Anti-screening of large magnetic fields by vector bosons, Phys. Lett. **B214**, 565 (1988).
- [2] J. Ambjørn, P. Olesen, On electroweak magnetism, Nucl. Phys. **B 315**, 606 (1989).
- [3] L. Alvarez-Cónsul, O. García-Prada, Dimensional reduction, $SL(2, \mathbb{C})$ -equivariant bundles and stable holomorphic chains, Internat. J. Math. **12** (2001) 159-201.
- [4] L. Alvarez-Cónsul, O. García-Prada, Hitchin-Kobayashi correspondence, quivers and vortices, Comm. Math. Phys. **238** (2003), 1-31.

- [5] S. B. Bradlow, Vortices in holomorphic line bundles over closed Kähler manifolds. *Commun. Math. Phys.* **135**, 1-17 (1990)
- [6] S. B. Bradlow and O. García-Prada, Stable triples, equivariant bundles and dimensional reduction, *Math. Ann.* **304** (1996), 225-252.
- [7] R. L. Bryant, On the geometry of almost complex 6-manifolds, *Asian J. Math.* **10** (2006), no. 3, 561-605.
- [8] F. Contatto, M. Dunajski, Manton's five vortex equations from self-duality, *J. Phys. A: Math. Theor.* **50** 375201
- [9] O. García-Prada, Invariant connections and vortices, *Commun. Math. Phys.* **156** (1993), 527-546.
- [10] O. García-Prada, Dimensional reduction of stable bundles, vortices and stable pairs, *Int. J. Math.* **5** (1994), 1-52.
- [11] V. L. Ginsburg, L. D. Landau, *Zh. Eksp. Theor. Fiz.* **20**, 1064 (1950)
- [12] R. Jackiw, S.-Y. Pi, Soliton solutions to the gauged nonlinear Schrödinger equation on the plane, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 2969 (1990).
- [13] R. Jackiw, S.-Y. Pi, Classical and quantum nonrelativistic Chern-Simons theory, *Phys. Rev.* **D42**, 3500 (1990).
- [14] J. L. Kazdan, F. Warner, Curvature functions for compact 2-manifolds, *Ann. of Math.* (2) **99** (1974), 14-47.
- [15] S. Kobayashi, Differential geometry of complex vector bundles, Publications of the MSJ, 15. Kanô Memorial Lectures, 5. Princeton University Press, Princeton, NJ; Iwanami Shoten, Tokyo, 1987
- [16] N. S. Manton, Five Vortex Equations *J. Phys. A* **50**, 125403 (2017).
- [17] T. Ono, Manton's exotic Vortex Equations (in preparation)
- [18] A. D. Popov, Integrable vortex-type equations on the two-sphere
- [19] J. A. Taubes, Vortices and monopoles. Boston, Birkhauser 1980
- [20] F. Torres de Lizaur. Vortex Equations and Non-Compact Classical Yang-Mills Theories, Master Thesis
- [21] F. W. Warner, Foundations of differentiable manifolds and Lie groups. Vol. 94. Springer Science and Business Media, 1983.
- [22] R. O. Wells, Jr. Differential analysis on complex manifolds, volume 65 of Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York-Berlin, second edition, 1980.

複素旗多様体と二つの実旗多様体の交叉について

大野 晋司 (日本大学文理学部)

概要

本講演では複素旗多様体の実形として現れる二つの実旗多様体の交叉について説明する。特に交叉が離散的になるための必要十分条件をこれまでに知られていたよりも詳しく述べる。二つの実旗多様体を与える対合が可換化できない場合の例について紹介する。本講演の内容は京都工芸繊維大学の井川治氏と東京理科大学の馬場蔵人氏との共同研究に基づく。

1 導入

複素旗多様体はコンパクト半単純リー群の随伴作用の軌道として得られる多様体で、コンパクトで単連結な等質ケーラー多様体となる。逆にコンパクト単連結等質ケーラー多様体は複素旗多様体であることが知られている。ケーラー多様体の反正則対合的等長変換の固定点集合の連結成分は**実形**と呼ばれる。複素旗多様体のあるコンパクト半単純リー群の随伴作用の軌道と見たときに、そのリー群の対合的自己同型から複素旗多様体の反正則対合的等長変換が得られ、その固定点集合として実旗多様体を得られることはよく知られている。

実形は全測地的なラグランジュ部分多様体の例を与え、さまざまな視点から研究されている。[7]では複素旗多様体の特別な場合である既約なコンパクトエルミート対称空間に対して、二つの実形が横断的に交わる (つまり離散的に交わる) ならばその交叉はエルミート対称空間内の**対蹠集合**と呼ばれる特殊な集合となることを示している。対蹠集合は、点对称で互いを動かさない関係にある点たちの集まりで、その濃度は 2-number という不変量である。2-number はコンパクト型エルミート対称空間の場合 $\mathbb{Z}_2$ 係数のホモロジーの次元と一致することが知られている。また、[4]ではこの結果をラグランジアンフレアホモロジーの計算に応用しており、交叉の情報が空間の幾何学的な性質を引き出していることが窺える。

[3]ではより広く複素旗多様体内の互いに合同とは限らない二つの実旗多様体の交叉とその応用について研究している。とくに、二つの実旗多様体を定める二つの対合的自己同型がしかるべき意味で可換化にできるような場合に、交叉が離散的になるための条件を制限ルート系や重複度付き対称三対の言葉で記述し、離散的な交叉が複素旗多様体内の対蹠集合であることを示している。さらに、彼らは離散的な交叉がある種のワイル群の軌道であることも示している。この結果を応用して、彼らは複素旗多様体内の実旗多様体が大域的にタイトであることを示している。

今回の我々の結果は二つの対合の可換化可能性の条件を外し、交叉が離散的になるための条件をより精密に述べたことと、離散的な交叉がある種のワイル群の軌道として得られることを示したこ

とである。その結果として離散的な交叉の元の個数が2つの対合から決まるある2以上の定数以上となることがわかる。この結果は [2] として執筆中である。

2 簡単な例

最も簡単な複素旗多様体として $\mathbb{C}P^1$ が挙げられる。これは $\mathbb{C}^2$ 内の原点を通る複素直線の集まりである。 $\mathbb{C}^2$ の複素共役を一つ決めると共に共役の操作で固定される複素直線の集まりとして $\mathbb{R}P^1$ が得られる。これは $\mathbb{C}P^1$ の実形である。 $\mathbb{C}P^1$ を球面とみなしたとき、 $\mathbb{R}P^1$ は大円となる。球面内の2つの大円は少なくとも2つの点で交わる。交わりが離散的であるとき、それは $\{x, -x\}$ の形の集合として現れる。 $-x$ は x の対蹠点と呼ばれる点である。

$\mathbb{C}P^1$ を球面として実現する方法の一つとして、 $SU(2)$ の随伴表現の軌道を考える方法がある。 $\mathfrak{su}(2)$ で $SU(2)$ のリー代数を表すと、これはトレースが0の2次の歪エルミート行列全体である。キリング形式に対して随伴表現 Ad は直交表現であり、 $X \in \mathfrak{su}(2), g \in SU(2)$ に対して $\text{Ad}(g)X = gXg^{-1}$ で与えられる。0でない X についてその軌道 $\text{Ad}(g)X$ は $\mathbb{C}P^1$ と微分同相であり標準的な複素共役に対応する $\mathbb{C}P^1$ の反正則な対合的等長変換は、 $\mathfrak{su}(2)$ の複素共役 $\theta_1(X) = \overline{X}$ ($X \in \mathfrak{su}(2)$) の -1 倍を軌道 $\text{Ad}(G)X$ への制限した写像で与えられる。これは $\mathfrak{su}(2)$ における θ_1 の -1 固有空間と軌道 $\text{Ad}(SU(2))X$ の共通部分に一致する。 θ_1 に対応する $SU(2)$ の自己同型も同じ記号 θ_1 で表すことにすれば、 $-\theta_1$ による固定点集合は G における θ_1 の固定点のなす群 $F(\theta_1, SU(2))$ の軌道に一致する。この場合 $F(\theta_1, SU(2))$ は $SO(2)$ に一致する。 $g \in SU(2)$ に対して、 $\theta_2 := \text{Ad}(g)\theta_1\text{Ad}(g)^{-1}$ とおいたとき、同様にして θ_2 の -1 固有空間と軌道 $\text{Ad}(SU(2))X$ の共通部分として $gSO(2)g^{-1}$ の作用の軌道が実形としてえられる。

したがって、これら2つの実形の交叉は、随伴軌道内における2つの部分群 $SO(2)$ と $gSO(2)g^{-1}$ の軌道の共通部分を調べることに帰着され、これは幾何学的には大円の交叉（対蹠点对）に対応する。

3 設定

上記の例はより一般的な状況で再現できる。 G を compact 連結単純 Lie 群とし、その Lie 環を $\mathfrak{g}$ と表す。 G に両側不変 Riemann 計量 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を入れておく。 (G, K) を compact 対称対とし、 $\mathfrak{g}$ の標準分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ とする。 $x \in \mathfrak{p} - \{0\}$ に対し、 $M = \text{Ad}(G)x$ を複素旗多様体、 $L = \text{Ad}(K)x$ を実旗多様体という。ただし、 $\text{Ad}(K)$ は G の随伴表現を K に制限したものである。 M は等質ケーラー多様体の構造をもち、 L は M の実形になる。

(G, K_1) と (G, K_2) を二つの compact 対称対とする。すなわち、 G 上に二つの対合 θ_i ($i = 1, 2$) が存在して、 $F(\theta_i, G)_0 \subset K_i \subset F(\theta_i, G)$ 。 G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ を θ_i により二通りに標準分解して、 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}_i \oplus \mathfrak{p}_i$ と表す。複素旗多様体内に二つの実旗多様体の交叉を考えるので、 $\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 \neq \{0\}$ と仮定できる。 $x_0 \in \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 - \{0\}$ とし、複素旗多様体 $M = \text{Ad}(G)x_0$ 内に二つの実旗多様体 $L_i := \text{Ad}(K_i)x_0 \subset M$ を考える。 x_0 を含む $\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2$ 内の極大可換部分空間を $\mathfrak{a}$ とすると、

$\dim \mathfrak{a} \geq 1$. $\alpha \in \mathfrak{a}$ に対し, $\mathfrak{g}$ の複素化 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の部分空間 $\mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha)$ を

$$\mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha) = \{X \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \mid [H, X] = \sqrt{-1}\langle \alpha, H \rangle X \quad (H \in \mathfrak{a})\}$$

と定めると, $[\mathfrak{a}, \mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha)] \subset \mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha)$. — で $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の $\mathfrak{g}$ に関する共役を表すと, $\overline{\mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha)} = \mathfrak{g}(\mathfrak{a}, -\alpha)$. $\mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha)$ は θ_1 と θ_2 の合成 $\theta_1\theta_2$ で不変である。 $\mathfrak{a}$ の部分集合 $\tilde{\Sigma}$ を

$$\tilde{\Sigma} := \{\alpha \in \mathfrak{a} - \{0\} \mid \mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha) \neq \{0\}\}$$

と定める。 $\tilde{\Sigma}$ は $\mathfrak{a}$ を張る既約ルート系になることが知られている。

$\tilde{\Sigma}$ を $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{a}$ に関する制限ルート系と呼ぶ。 $\tilde{\Sigma}$ の定める Weyl 群を $W(\tilde{\Sigma})$ と表す。 $\mathfrak{a}$ を含む $\mathfrak{g}$ の極大可換部分環 $\mathfrak{t}$ をとり, $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{t}$ に関する Weyl 群を $W(\mathfrak{t})$ と表す。

4 主結果

Theorem 1. $L_1, L_2 \subset M$ を実旗多様体とする。次の条件 (1) から (4) は同値である。

- (1) $L_1 \cap L_2$ が離散的である。
- (2) $L_1 \cap L_2$ は M の対蹠集合である。すなわち、 $[L_1 \cap L_2, L_1 \cap L_2] = \{0\}$ 。
- (3) $[\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2, L_1 \cap L_2] = \{0\}$
- (4) $\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2$ は可換部分空間である。

このとき、

$$L_1 \cap L_2 = M \cap \mathfrak{a} = W(\mathfrak{t})x_0 \cap \mathfrak{a} = W(\tilde{\Sigma})x_0 \quad (*)$$

が成り立つ。特に、 $r = \dim \mathfrak{a}$ とおくと、 $\#(L_1 \cap L_2) \geq r + 1 \geq 2$ が成り立つ。

Remark 2. (4) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1) は明らかである。[3] で (1) から (3) が得られることと、可換条件 $\theta_1\theta_2 = \theta_2\theta_1$ が成り立つとき、(*) が成り立つことを示した。今回、(1) から (4) を示した。また可換条件を仮定せずに (*) を示した。

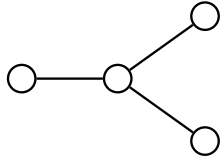
主結果の証明の概要。[1] の結果から L_1, L_2 に対応する G とその 2 つの対合の組 (G, θ_1, θ_2) が「標準的」になるようにとり直せる。 (G, θ_1, θ_2) が標準的に取れると、 θ_1, θ_2 の位数が有限となり [6] の結果から $\mathfrak{g}$ が細かく分解できる。この結果を用いると $\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2$ が可換でなければ $L_1 \cap L_2$ が S^1 を含むことがわかる。この結果 (4) $\Rightarrow$ (1) の対偶が示されたことになる。□

5 例

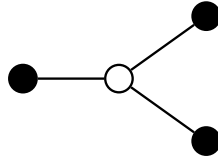
G の単純性と松木による分類から、 (G, θ_1, θ_2) に対して、 θ_1 と θ_2 が可換にできなければ、合成 $\theta_1\theta_2$ の位数は 3 か 4 となるようにできる。ここでは $\theta_1\theta_2$ の位数が 3 の場合を説明する。 $G = \text{Spin}(8)$ とし、その Lie 代数を $\mathfrak{o}(8)$ と表す。 $\theta_1 = \text{Ad}(I_{3,5})$ とおく。ただし、 $I_{3,5}$ は対角成分に -1 が 3 つ 1 が 5 つ並んだ対角行列である。 θ_1 と反可換になるように位数 3 の外部自己同型 κ

を取ることができる。実際、八元数の構造を用いて κ を実現することができる。 $\theta_2 = \kappa\theta_1\kappa^{-1}$ とおく。このとき、 $\theta_1\theta_2 = \kappa$ の位数は 3 であり、 $\theta_1\theta_2$ で固定される部分代数は階数 2 の例外型 Lie 代数 $\mathfrak{g}_2$ と同型である。 (G, θ_1, θ_2) は [1] の意味で標準的であることがわかる。 $\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2$ の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}$ は 2 次元で、 $\tilde{\Sigma}$ は G_2 型のルート系であることがわかる。

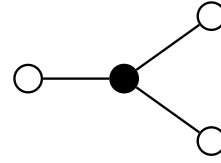
さて、 $\mathfrak{a}$ から 0 でない元 x_0 を取るたびに複素旗多様体 $M = \text{Ad}(G)x_0 \cong \text{Ad}(G)/\text{Ad}(H)$ が得られる。一般論から、次のように $\text{Ad}(H)$ がどのような群かわかる。 $\mathfrak{a}$ を含む $\mathfrak{g}$ の極大可換部分代数 $\mathfrak{t}$ についての $\mathfrak{g}$ のルート系 Δ を考える。 Δ の単純ルートは Δ のディンキン図形の各頂点に対応する。 x_0 と直交する単純ルートの頂点を黒く、そうでない単純ルートの頂点を白く塗り分けたとき、黒い頂点の作る図形は $\text{Ad}(H)$ の半単純部分のディンキン図形となる。よって、 H のリー代数が確定し、 $\text{Ad}(H)$ がわかる。つまり、 M のイソトロピー群 H は x_0 と $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(8)$ のルート系の情報からきまる。いま、 $\mathfrak{t}$ は 4 次元で、 $\mathfrak{g}$ は D_4 のルート系を持つ。この D_4 の単純ルートを $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ を $\kappa(\alpha_1) = \alpha_3, \kappa(\alpha_2) = \alpha_2, \kappa(\alpha_3) = \alpha_4, \kappa(\alpha_4) = \alpha_1$ を満たすようにとれる。すると、 x_0 を正のルートとの内積が非負になるような $\mathfrak{t}$ のワイル領域からとったとしたとき $\langle x_0, \alpha_1 \rangle = \langle x_0, \alpha_3 \rangle = \langle x_0, \alpha_4 \rangle$ が成り立つ。このことから、 M に対応する塗り分けられたディンキン図形とイソトロピー群 H は次の 3 種類となることがわかる。(イソトロピーが G にどのような埋め込まれているかは別途議論が必要であることに注意する。)



$$\text{Ad}(H) \cong U(1)^4$$



$$\text{Ad}(H) \cong U(1) \times SU(2)^3$$

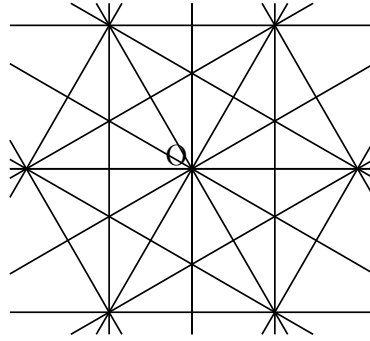


$$\text{Ad}(H) \cong U(1)^3 \times SU(2)$$

x_0 を $\mathfrak{a}$ からとっているのもので $-\theta_1$ と $-\theta_2$ で M は不変であり、 $L_i = \text{Ad}(K_i)x_0$ ($i = 1, 2$) がそれらの固定点集合として得られる。 K_1 と K_2 はリー群として同型であり、したがって $L_1 \cong \text{Ad}(K_1)/\text{Ad}(K_1 \cap H)$ と $L_2 \cong \text{Ad}(K_2)/\text{Ad}(K_2 \cap H)$ は等質空間としては同型である。しかし、 $\text{Ad}(G)$ の作用で移り合うことはない。 L_1 と L_2 のうち一つを $\text{Ad}(G)$ の元 $\text{Ad}(g)$ で動かして離散的に交叉するかどうかを考える。 $X \in \mathfrak{a}$ に対して $g = \exp(X)$ となる g のみ考えれば十分であることがわかる。定理 1 から、 L_1 と $\text{Ad}(\exp(X))L_2$ が離散的に交わるためには $\mathfrak{p}_1 \cap \text{Ad}(\exp(X))\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{a}$ となることが必要十分であるとわかる。このような X の集まり $\mathfrak{a}_r$ は下記のようにルート系を用いて表示できる。 $\tilde{\Sigma}$ の短いルートのなす集合を Σ_ω で表す。

$$\mathfrak{a}_r = \{X \in \mathfrak{a} \mid \langle \lambda, X \rangle \notin \pi\mathbb{Z} \ (\lambda \in \tilde{\Sigma})\} \cap \{X \in \mathfrak{a} \mid \langle \lambda, X \rangle \notin \pm \frac{\pi}{3} + \pi\mathbb{Z} \ (\lambda \in \Sigma_\omega)\}$$

である。 $\mathfrak{a}_r$ は下記のように平面上に描くことができる。



$X \in \mathfrak{a}_r$ のとき L_1 と $\text{Ad}(\exp(X))L_2$ は離散的に交わる。その交叉は x_0 を通る $\tilde{\Sigma}$ のワイル群の軌道に等しい。その元の個数は、 $\tilde{\Sigma}$ が G_2 型の場合、 $\text{Ad}(H) \cong U(1)^4$ (主軌道) のとき 12 個、それ以外 (特異軌道) のとき 6 個となる。特に $\#(L_1 \cap L_2) \geq 6 > 3 = r + 1$ が成り立っている。

L_1 と L_2 が等質空間として同型であることは上で述べたが、 L_2 が L_1 を $\text{Ad}(G)$ の作用で動かした実旗多様体 L'_1 と M 内で本質的に異なる位置にあることが下記のようにしてわかる。 L_1 と L'_1 の交叉は [3] の結果に含まれる。この場合、 $\tilde{\Sigma}$ は B_3 型のルート系となり、 L_1 と L'_1 が離散的に交わる場合の交叉もワイル群の軌道として得られ、元の個数はそれぞれ $\text{Ad}(H) \cong U(1)^4$ の場合 48 個、 $\text{Ad}(H) \cong U(1) \times SU(2)^3$ の場合 12 個、 $\text{Ad}(H) \cong U(1)^3 \times SU(2)$ の場合 24 個となる。これらは L_1 と L_2 の場合の交点数といずれも異なっている。

参考文献

- [1] K. Baba and O. Ikawa, Double Satake diagrams and canonical forms in compact symmetric triads, International Electronic Journal of Geometry, **17**, no. 2, (2024), 466–495.
- [2] K. Baba, O. Ikawa and S. Ohno, The intersection of two real flag manifolds in a complex flag manifold, and the canonical form of a compact symmetric triad, in preparation.
- [3] O. Ikawa, H. Iriyeh, T. Okuda, T. Sakai and H. Tasaki, The intersection of two real flag manifolds in a complex flag manifold, Transformation Groups, <https://doi.org/10.1007/s00031-026-09949-z>.
- [4] H. Iriyeh., T. Sakai and H. Tasaki., Lagrangian Floer homology of a pair of real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type, J. Math. Soc. Japan **65** no.4 (2013), 1135–1151.
- [5] T. Matsuki, Double coset decompositions of reductive Lie groups arising from two involutions, J. Algebra, **197** (1997), 49–91.
- [6] S. Ohno, Geometric properties of orbits of Hermann actions, Tokyo J. Math. **46** (2023), no. 1, 63–91.
- [7] M. S. Tanaka and H. Tasaki, The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type, J. Math. Soc. Japan **64** no.4 (2012), 1297–1332.

Morse 部分群と stable 部分群

松家拓稔*(Takumi MATSUKA)

沼津工業高等専門学校 教養科 助教

概要

幾何学的群論とは代数的な対象である群を幾何学的に解析する分野である。群を調べる際に、その部分群の構造に注目することは自然なことであるが、幾何学的にみて「良い」部分群とはなんだろうか。Morse 部分群と stable 部分群は幾何学的にある良い性質をもった部分群のクラスである。本研究では、Abbott–Martínez-Pedroza により導入された coset intersection complex を利用して、これらの概念が一致する条件を調べた。本稿の内容は深谷友宏氏 (東京都立大学), Eduardo Martínez-Pedroza 氏 (Memorial University of Newfoundland), および Haoyang He 氏 (Memorial University of Newfoundland) との共同研究 (arXiv:2603.29158) に基づく。

1 導入

幾何学的群論とは代数的な対象である群を幾何学的に調べる分野である。まず、群に対して、その群が幾何学的に作用する距離空間 (主に Cayley グラフ) を考える。その距離空間の幾何学的な性質を調べ、そこから作用する群の代数的および組合せの性質を引き出していく。その嚆矢は Dehn による語の問題の研究にさかのぼる。語の問題とは、有限生成群 G に対して、その生成元による語として書かれた 2 つの元が等しいかどうかを決定するアルゴリズムを与えよという問題である。Dehn は曲面の基本群に対し、語の問題を肯定的に解決した。その際に曲面の基本群が双曲平面に幾何学的に作用することに注目し、語の問題を双曲平面の幾何学的な性質を調べることに帰着させた。語の問題は群の純粋な組合せの問題であるが、それは幾何学的な視点を持ち込むことによって明瞭に解決された。これは幾何学的群論の 1 つの思想的背景である。この考え方は Gromov によってより明確にされた。

Gromov は Riemann 多様体とは限らない距離空間に対して「空間が負に曲がっている」という概念を定式化し、Gromov 双曲空間を導入した。そして Gromov 双曲空間に幾何学的に作用する群として、**双曲群**を定義した。これは負曲率をもつ群とみなせるものである。この群は多くの代数的、組合せ的应用をもち、先ほどの語の問題もこのクラスで解けることが知られている。双曲群は幾何学的群論の中心的な対象として盛んに研究され、数多くの研究の蓄積が存在する。

幾何学的群論の進展に伴い、群の幾何学的な性質それ自身を対象とする研究もあらわれてきた。ある代数的な性質をもった群がどのような幾何学的な性質をもつのか、というこれまでとは逆方向の考え方も注目されている。群の構造を調べる際に、部分群の構造に注目することは自然な視点である。そ

* e-mail: takumi.matsuka1@gmail.com

れでは、群において幾何学的に「良い」部分群のクラスとはいったいなんであろうか。近年、**Morse 部分群**と **stable 部分群**という 2 つの概念が導入され、「良い」部分群のクラスとして研究されている。本研究では Abbott–Martínez-Pedroza [1] により導入された coset intersection complex という概念を通して、この 2 つの概念が一致する条件を考察した。

2 群の幾何学化と双曲群

幾何学的群論においては、群を幾何学的な対象として扱う。その際には群の代数的な構造を反映した Cayley グラフというものを主に考える。

Definition 1 (Cayley グラフ). 有限生成群 G に対し、その有限生成系を S とする。 S に関する G の Cayley グラフ $\text{Cay}(G, S)$ とは以下のような頂点集合 $V(\text{Cay}(G, S))$ と辺集合 $E(\text{Cay}(G, S))$ をもつグラフである。

- $V(\text{Cay}(G, S)) = G$
- $E(\text{Cay}(G, S)) = \{\{g, gs\} \mid g \in G, s \in S \cup S^{-1}\}$

なお、 $\text{Cay}(G, S)$ には 1 辺の長さを 1 とした距離をいれる。

Cayley グラフは群の演算構造を辺の構造に反映したグラフといえる。幾何学的群論においては、この Cayley グラフの幾何学的な構造を通して群を調べていく。

Gromov は Riemann 多様体とは限らない距離空間に対して「空間が負に曲がっている」という概念を定式化し、Gromov 双曲空間を導入した。有限生成群 G の Cayley グラフ $\text{Cay}(G, S)$ が Gromov 双曲空間であるとき、群 G を**双曲群**という。直観的にいえば、双曲群 G の $\text{Cay}(G, S)$ 上において測地三角形を考えたとき、これは双曲平面上の測地三角形のように細い。双曲群は $\text{Cay}(G, S)$ 上の幾何学的な条件によって定義されるので、一見この概念は有限生成系 S の取り方に依存するようにみえるが、双曲群であることは有限生成系の取り方によらない。

3 Morse 部分群と stable 部分群

群の構造を考察する際、その部分群に注目することは重要な視点である。ここでは、幾何学的に「良い」部分群のクラスを考えたい。ある性質を満たす部分群であって、なおかつ次のような条件をみたすものを「良い」部分群と考える。

- (1) その部分群の性質は全体の群の生成系の取り方によらない。
- (2) その部分群は全体の群の幾何学的な性質を反映している。

双曲群においては、そのような部分群のクラスは知られている。それが**擬凸部分群**である。

G を有限生成群とし、 S をその有限生成系とする。また、 G の部分群 H を $\text{Cay}(G, S)$ の部分集合ととらえ $N(H; C)$ で $\text{Cay}(G, S)$ における H の C -近傍を表す。

Definition 2 (擬凸部分群). 有限生成群 G の部分群 H が S に関して**擬凸部分群**であるとは、 H を

$\text{Cay}(G, S)$ の部分集合とみたときに、次の条件を満たすことをいう。

ある定数 C が存在し、 H 上の任意の 2 点 h_1, h_2 とそれらを結ぶ $\text{Cay}(G, S)$ 上の任意の測地線分 γ に対し、

$$\text{Im}(\gamma) \subseteq N(H; C)$$

が成り立つ。

部分群 H を $\text{Cay}(G, S)$ の部分集合とみたときに、この部分集合が有限の誤差を許して凸集合であることを示している。 $\text{Cay}(G, S)$ 上の幾何学的な条件により定義されているため、一般にはこの概念は有限生成系 S の取り方に依存する概念である。ただし、全体の群が双曲群の場合においては次のことが成り立つ。

Proposition 1. G を双曲群とする。 H を S に関する擬凸部分群とすると、以下が成立する。

- (1) G の任意の有限生成系 S' について、 H は S' に関する擬凸部分群である。
- (2) H は双曲群である。

すなわち、群 G が双曲群であるとき、部分群 H が擬凸部分群であることは G の生成系の取り方によらない。また、擬凸部分群 H もまた双曲群となることから、これは群 G の幾何を良く反映していることが分かる。さらに、このとき H は有限生成であり G への包含写像は擬等長埋め込みとなる。

しかし、より一般の群においては擬凸部分群は必ずしも「良い」部分群とは言えない。ある生成系に関して擬凸部分群であっても、異なる生成系で擬凸部分群でない例が存在する。そのため、双曲群より一般の群に対して、上記の 2 条件をみたすような「良い」部分群のクラスを導入する試みがなされた。Morse 部分群と stable 部分群はその例である。Morse 部分群は Tran [7], Genevois [4] によりそれぞれ独立に導入された。

Definition 3 (Morse 部分群). 有限生成群 G の部分群 H が S に関して **Morse 部分群**であるとは、次の条件を満たすことをいう。

λ, k に依存するある定数 $M = M(\lambda, k)$ が存在し、 H 上の任意の 2 点 h_1, h_2 とそれらを結ぶ $\text{Cay}(G, S)$ 上の任意の (λ, k) -擬測地線分 γ に対し、

$$\text{Im}(\gamma) \subseteq N(H; M)$$

が成り立つ。

Morse 部分群は擬凸部分群より強い概念である。全体の群が双曲群であるときの擬凸部分群と同様に次のことが成立する。

Proposition 2. G を有限生成群とする。 H を S に関する G の Morse 部分群とすると、以下が成立する。

- (1) G の任意の有限生成系 S' について、 H は S' に関する Morse 部分群である。
- (2) H は有限生成であり、なおかつ G への包含写像は擬等長埋め込みとなる。

Durham および Taylor [5] は写像類群の部分群の性質を研究する中で、次の stable 部分群の概念

を導入した.

Definition 4 (Stable 部分群). 有限生成群 G の部分群 H が **stable 部分群**であるとは, H が有限生成かつ G への包含写像が擬等長埋め込みとなり, 次の条件を満たすことをいう.

S, λ, k に依存するある定数 $L = L(S, \lambda, k)$ が存在し, H 上の 2 点を共通の端点とする $\text{Cay}(G, S)$ 上の 2 つの (λ, k) -擬測地線分 γ, η に対し,

$$d_H(\text{Im}(\gamma), \text{Im}(\eta)) \leq L$$

が成り立つ. ただし, d_H はハウスドルフ距離とする.

Remark 1. 部分群 H が stable 部分群であることもまた, 全体の群 G の生成系の取り方によらない. ただ, H が stable 部分群であるとき, 全体の群 G の幾何学的な性質によらず, つねに H は双曲群となる.

4 主定理

双曲群においては, 擬凸部分群, Morse 部分群, および stable 部分群の概念は一致する. ただし, より一般の群においては, これらの概念の間には差がある. 群 $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ は双曲群ではない. $\mathbb{Z}^2$ は $\mathbb{Z}^2$ 自身の Morse 部分群であるが, stable 部分群ではない. Morse 部分群と stable 部分群の関係については, 一般的な次の結論が Tran [7] によって示されている.

Theorem 1 ([7]). G を有限生成群とし, G の部分群 H を無限群とする. 次は同値である.

- (1) H は stable 部分群である.
- (2) H は Morse 部分群かつ双曲群である.

stable 部分群は常に Morse 部分群である. また, 群 G の有限指数部分群は常に Morse 部分群であるので, 有限指数部分群を自明な Morse 部分群とよぶ.

では, どのような状況において, 非自明な Morse 部分群と stable 部分群は一致するだろうか. すなわち, いつ非自明な Morse 部分群は stable 部分群になるだろうか. この問題に関して, [2], [6], および [7] のような先行研究がある.

我々 [3] はこれらの先行研究の戦略を基にし, Abbott–Martínez-Pedroza [1] により導入された coset intersection complex の概念を用いて, 非自明な Morse 部分群が stable 部分群になる条件を研究した. 有限生成群 G に対して, $\mathcal{P}$ を G の部分群の有限族とする. 群対 $(G, \mathcal{P})$ とは, 群 G と部分群の有限族 $\mathcal{P}$ の組のことである.

Definition 5 (Coset intersection complex). 群対 $(G, \mathcal{P})$ に関する coset intersection complex $\mathcal{K}(G, \mathcal{P})$ とは, 以下のような単体的複体である.

- 0-単体 : gP ($g \in G, P \in \mathcal{P}$)
- r -単体 : $\{g_0P_0, \dots, g_rP_r\}$ は $\bigcap_{i=0}^r g_iP_i g_i^{-1}$ が無限位数であるとき r -単体となる.

coset intersection complex は部分群族 $\mathcal{P}$ が群 G の中でどのように分布しているかを表している。
本共同研究の主定理は以下である。

Theorem 2 ([3]). 群対 $(G, \mathcal{P})$ に関して, 以下を仮定する。

- (1) 任意の $P \in \mathcal{P}$ に関して, G への包含写像は擬等長埋め込みとなる。
- (2) $\mathcal{P}$ は quasi-syllabic である。
- (3) 任意の $P \in \mathcal{P}$ に対して, $Q \leq P$ が P の Morse 部分群であるとき, Q は有限群もしくは P の有限指数部分群である。
- (4) 群対 $(G, \mathcal{P})$ の coset intersection complex $\mathcal{K}(G, \mathcal{P})$ は連結かつ Gromov 双曲的である。また, G は $\mathcal{K}(G, \mathcal{P})$ の 1-骨格にコンパクトに作用する。

このとき, G の無限指数部分群 H が Morse 部分群であれば, H は stable 部分群である。

この定理を証明する際の副産物として, 次が得られた。

Theorem 3 ([3]). 有限生成群 G は単体的ツリーにコンパクトに作用するものとする。また, 以下を仮定する。

- (1) 任意の辺に対して, その固定部分群は無限群である。
- (2) 任意の頂点の固定部分群に関して, G への包含写像は擬等長埋め込みとなる。
- (3) 任意の頂点に対して, その固定部分群は非自明な Morse 部分群をもたない。

このとき, G の無限指数部分群 H が Morse 部分群であれば, H は stable 部分群である。

参考文献

- [1] Carolyn Abbott and Eduardo Martínez-Pedroza. The quasi-isometry invariance of the coset intersection complex. *Algebr. Geom. Topol.*, Vol. 26, No. 2, pp. 659–698, 2026.
- [2] Sahana H Balasubramanya, Marissa Chesser, Alice Kerr, Johanna Mangahas, and Marie Trin. Stable subgroups of graph products, 2026. arXiv:2511.11176.
- [3] Tomohiro Fukaya, Haoyang He, Eduardo Martinez-Pedroza, and Takumi Matsuka. Morse and stable subgroups via the coset intersection complex, 2026. arXiv:2603.29158.
- [4] Anthony Genevois. Hyperbolicities in CAT(0) cube complexes. *Enseign. Math. (2)*, Vol. 65, No. 1-2, pp. 33–100, 2019.
- [5] Matthew Gentry Durham and Samuel J. Taylor. Convex cocompactness and stability in mapping class groups. *Algebr. Geom. Topol.*, Vol. 15, No. 5, pp. 2839–2859, 2015.
- [6] Heejoung Kim. Stable subgroups and Morse subgroups in mapping class groups. *Int. J. Algebra Comput.*, Vol. 29, No. 5, pp. 893–903, 2019.
- [7] Hung Cong Tran. On strongly quasiconvex subgroups. *Geom. Topol.*, Vol. 23, No. 3, pp. 1173–1235, 2019.

SIX-DIMENSIONAL PSEUDO-RIEMANNIAN FLAGS AND TOTALLY GEODESIC SUBMANIFOLDS

MATEO ANARELLA

1. NEARLY KÄHLER GEOMETRY

The study of nearly Kähler geometry may have its origins at Tokyo Metropolitan university. In 1930, Schouten and van Dantzig [SvD30] introduced the concept of Kähler manifolds, which sit at the crossroads between symplectic, complex and Riemannian geometry. That is, a smooth manifold M with a complex structure J and a symplectic form ω that satisfy $g(JX, Y) = \omega(X, Y)$ for all $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ (or equivalently $\nabla J \equiv 0$). Prior to that, in his PhD thesis, Riemann already studied what are known today as Riemann surfaces, which were probably the first known examples of Kähler manifolds, albeit for trivial reasons. It was in a later work by Kähler [K33] that his name became associated with these spaces, and the term was probably coined later on by Weil [Wei58].

Knowing that the complex space forms carried such structure, a question arose quickly: which of the other classical manifolds admitted a Kähler structure? For topological reasons, it was clear that spheres, except for S^2 , do not admit a symplectic structure, and hence not a Kähler one. However, it was not clear whether spheres carried a complex atlas or not. This question was first posed in 1948 by Hopf [Hop48]. There he already gave a negative answer for S^4 and S^8 . Just a year before that, Kirchoff had already answered negatively the question for any sphere of dimension $n \neq 8m + 6$ by noticing that if a sphere carries a complex structure, then the sphere one dimension higher is parallelizable, which by Eckmann [Eck43] and Whitehead [Whi46] was known to be of dimension 1, 3 or $8m + 7$. Later on it was shown independently by several authors that the only parallelizable spheres are S^1 , S^3 and S^7 . The existence of a complex structure on S^6 remains open and is known as the Hopf problem. For more information about this problem see [ABG⁺18].

Kirchoff also noticed that S^6 does carry an *almost* complex structure induced by the octonions (also known as Cayley numbers), namely $J_p X = p \times X$, where $\times$ is the cross product of $\mathbb{R}^7$. However this structure does not arise from a complex atlas, since J is not parallel. Nonetheless, Fukami and Ishihara [FI55] noticed that ∇J is actually skew symmetric, and as a consequence the Hermitian connection and the canonical connection coincide. The first mention of nearly Kähler manifold as a general concept was in 1959 by Tachibana [Tac59] who introduced them as K -spaces.

Later on, Gray took interest in this concept and in a series of papers [WG68, Gra70, Gra72, Gra76, GH80] he coined the term nearly Kähler and showed the relation between homogeneous nearly Kähler manifolds and 3-symmetric spaces.

Definition 1.1. *An almost Hermitian manifold (M, g, J) is said to be nearly Kähler if ∇J is skew symmetric. If moreover ∇J is non-degenerate, M is said to be strict nearly Kähler.*

From a simple computation it follows that 2- and 4-dimensional nearly Kähler manifolds are automatically Kähler. Moreover, Gray showed that any nearly Kähler manifold is the Riemannian product of a strict nearly Kähler manifold and a Kähler manifold. As a consequence, in dimension 6 a non-Kähler nearly Kähler manifold is strict nearly Kähler. In 1968 Gray and Wolf [WG68] mentioned the first examples of strict nearly Kähler manifolds that were not S^6 . Moreover, in there we find the four standard six-dimensional homogeneous examples: S^6 , $\mathbb{C}P^3$, $S^3 \times S^3$, $F(\mathbb{C}^3)$, the last three with non-standard metrics. In 1972 Gray [Gra72] shows that any 3-symmetric space with its naturally reductive metric is homogeneous nearly Kähler. The converse however, was unknown at that moment.

Together with Hervella [GH80], Gray divided almost Hermitian manifolds in 16 different classes. The division was made based on four different properties, $\mathfrak{W}_1, \mathfrak{W}_2, \mathfrak{W}_3, \mathfrak{W}_4$, that $\nabla \omega$ can satisfy.

What the properties are is outside the scope of this abstract, but we emphasize that the properties do not have non-zero intersections and they span the space of all possible covariant derivatives $\nabla\omega$.

In Figure 1 we see how the more classical classes of almost Hermitian manifolds distribute with respect to these properties. Here, $\nabla\omega$ belonging to the intersection of two classes $\mathfrak{W}_i$, $\mathfrak{W}_j$ does not mean that it satisfies both properties, but rather that $\nabla\omega$ is the sum of two tensors that each satisfy one of the properties. The classes $\mathcal{G}_1$ and $\mathcal{G}_2$ were studied in more detail by Hervella and Vidal [HV76, VH79].

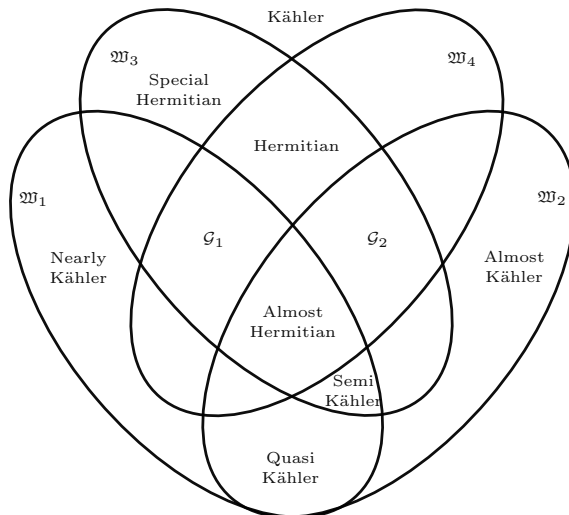


FIGURE 1. The 16 classes of almost Hermitian manifolds.

Nearly Kähler manifolds are not just interesting because they have a neat structure. Later on new properties were found outside of the almost Hermitian realm. In 1976 Gray [Gra76] showed that six-dimensional nearly Kähler manifolds are Einstein with positive scalar curvature. Friedrich and Grunewald [FG85, Gru90] realized that a six-dimensional Riemannian manifold admits a Killing spinor if and only if it is nearly Kähler. In 1987, Bryant [Bry87] completed the list of exceptional holonomies of Berger, finding that the cone over the nearly Kähler six-dimensional homogeneous flag manifold has holonomy G_2 . Later on, Bryant and Salamon [BS89] proceeded to construct complete examples with holonomy in G_2 as the cones over the homogeneous six-dimensional nearly Kähler manifolds. In fact, Bär [Bä93] showed that having a Killing spinor is equivalent to the holonomy of the cone being included in G_2 .

In 2002, Nagy [Nag02] showed the splitting properties of nearly Kähler manifolds: A strict nearly Kähler manifold is a Riemannian product of six-dimensional nearly Kähler manifolds, homogeneous nearly Kähler manifolds, and twistor spaces over positive quaternionic Kähler manifolds.

In 2005, Butruille [But05] showed the converse of Gray's theorem: Any homogeneous nearly Kähler manifold admits a 3-symmetric structure. Using the classification of 3-symmetric spaces, he showed that the only (complete, simply connected) homogeneous strict nearly Kähler manifolds in dimension six are $\mathbb{S}^6$, $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$, $\mathbb{C}P^3$ and $F(\mathbb{C}^3)$. He also conjectured that these were the only compact strict nearly Kähler manifolds, but this was disproven by Foscolo and Haskins [FH17] in 2017.

In the pseudo-Riemannian setting, that is, when the metric has signature, not much is known. So far, there is no classification for homogeneous pseudo-Riemannian nearly Kähler manifolds. Besides Gray's classification [Gra72] for 3-symmetric spaces, Kath [Kat00] and Schäfer [Sch17] provided lists of analogues of the homogeneous Riemannian spaces.

Note that in a pseudo-Riemannian setting (in dimension six), we have two possibilities for the behavior of the almost Hermitian structure. On the one hand, in the same way as the Riemannian case, $g(JX, JY) = g(X, Y)$ and $J^2 = -\text{Id}$. In this case the signature of the metric is $(++++--)$. On the other hand, $g(JX, JY) = -g(X, Y)$ and $J^2 = \text{Id}$. In this case the signature of g is

(+ + + - - -). If we assume that the covariant derivative of J is zero (or skew-symmetric), we will call the first kind pseudo-(nearly) Kähler, and the second kind (nearly) para-Kähler.

Here we will focus on the flag manifold and its analogues, shown in Figure 2. The space $F_\varepsilon^\delta(V)$ consists of all the flags (ℓ, Π) in V , with ℓ of causal character ε and the complement of ℓ in Π with causal character δ .

$$\begin{array}{lcl}
F(\mathbb{C}^3) \rightarrow \frac{SU(2,1)}{U(1) \times U(1)} = F_+^+(\mathbb{C}_1^3) = F_+^-(\mathbb{C}_2^3) & & \text{nearly Kähler} \\
\downarrow & \rightarrow & \frac{SU(2,1)}{SO(1,1) \times U(1)} \quad \text{nearly para-Kähler} \\
\downarrow & \rightarrow & \frac{SL(3, \mathbb{R})}{\mathbb{R}^* \times SO(2)} \quad \text{nearly Kähler} \\
\downarrow & \rightarrow & \frac{SL(3, \mathbb{R})}{(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+) \cup (\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^-)} = F(\mathbb{D}^3) \quad \text{nearly para-Kähler}
\end{array}$$

FIGURE 2. The analogues of $F(\mathbb{C}^3)$.

In particular, Kath realized the analogues as twistor and reflector spaces over pseudo-Riemannian quaternionic Kähler spaces, as seen in Figure 3.

$$\begin{array}{lcl}
\mathbb{S}^2 \longrightarrow \frac{SU(3)}{U(1) \times U(1)} = F(\mathbb{C}^3) \longrightarrow \mathbb{C}P^2 \\
\mathbb{S}^2 \longrightarrow \frac{SU(1,2)}{U(1) \times U(1)} = F_+^-(\mathbb{C}_2^3) \longrightarrow \mathbb{C}P_2^2 \\
\mathbb{S}_2^2 \longrightarrow \frac{SU(2,1)}{U(1) \times U(1)} = F_+^+(\mathbb{C}_1^3) \longrightarrow \mathbb{C}P_1^2 \\
\mathbb{S}_1^2 \longrightarrow \frac{SU(2,1)}{SO(1,1) \times U(1)} \longrightarrow \mathbb{C}P_1^2 \\
\mathbb{S}_2^2 \longrightarrow \frac{SL(3, \mathbb{R})}{\mathbb{R}^* \times SO(2)} \longrightarrow \mathbb{D}P^2 \\
\mathbb{S}_1^2 \rightarrow \frac{SL(3, \mathbb{R})}{(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+) \cup (\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^-)} = F(\mathbb{D}^3) \rightarrow \mathbb{D}P^2
\end{array}$$

FIGURE 3. The twistor and reflector fibrations of the flag manifolds.

2. SUBMANIFOLDS

An almost complex submanifold Σ of an almost Hermitian space (M, g, J) is a submanifold that is invariant under J , that is $JT\Sigma = T\Sigma$.

A submanifold Σ of M is said to be totally geodesic if any geodesic of Σ is also a geodesic of M . Equivalently, the Levi-Civita connections of M and of Σ coincide. Note that if the submanifold Σ is degenerate, it does not carry a canonical metric, torsion-free connection. Thus, we say that a degenerate submanifold Σ is totally geodesic if any geodesic of M that starts in Σ , with direction tangent to Σ , stays in Σ for short times. Equivalently, Σ is totally geodesic if $T\Sigma$ is autoparallel, that is $\nabla_X Y \in T\Sigma$ for all $X, Y \in T\Sigma$, where ∇ is the connection of M .

Cwiklinski and Vrancken [CV22] classified all non-degenerate almost complex totally geodesic submanifolds of $F(\mathbb{C}^3)$ and $F_+^+(\mathbb{C}_1^3)$. Totally geodesic almost complex submanifolds of the remaining nearly Kähler space of Figure 2 were classified in the following theorem.

Theorem 2.1. [ACD⁺26] Let $f : \Sigma \rightarrow \frac{\mathrm{SL}(3, \mathbb{R})}{\mathbb{R} \times \mathrm{SO}(2)}$ be a totally geodesic almost complex surface. Then, $f(\Sigma)$ is homogeneous and congruent to one of the following orbits.

- (1) The orbit $\mathbb{S}_2^2(\frac{1}{2})$ through [Id] of a subgroup $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \subset \mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$,
- (2) The orbit $\mathbb{S}^2(1)$ through [Id] of a subgroup $\mathrm{SO}(3) \subset \mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$,
- (3) The orbit $\mathbb{S}_2^2(1)$ through [Id] of a subgroup $\mathrm{SO}^+(2, 1) \subset \mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$,
- (4) The orbit $\mathbb{R}_2^2$ through [Id] of a subgroup $\mathbb{R}^2 \subset \mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$,
- (5) A degenerate orbit through [Id] of a subgroup $\mathbb{R}^2 \subset \mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$.

Note that according to the following theorem, non-degenerate four-dimensional almost complex submanifold do not exist.

Theorem 2.2 ([LVW20]). Any non-degenerate almost complex submanifold of a pseudo-Riemannian nearly Kähler manifold of dimension $2n$, is of dimension strictly less than $2n - 2$.

Therefore, the following theorem completes the classification of almost complex totally geodesic submanifolds of $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R})/\mathbb{R} \times \mathrm{SO}(2)$.

Theorem 2.3 (A. 2025). A totally geodesic almost complex 4-dimensional submanifold of $\frac{\mathrm{SL}(3, \mathbb{R})}{\mathrm{SO}(2) \times \mathbb{R}}$ is congruent to the degenerate orbit of the subgroup AN through [Id], where AN is the solvable subgroup of $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$ from its Iwasawa decomposition.

In a recent unpublished article [LNRV24], the authors classified all totally geodesic submanifolds of the Riemannian nearly Kähler six-dimensional manifolds. All examples are either almost complex or totally real ($JT\Sigma \subset T\Sigma^\perp$). So far there is no proof for this statement in general. If any counterexample exists, it would definitely be in the degenerate realm. The intention is to further study the spaces of Figure 2 and find all exceptional examples within totally geodesic submanifolds and/or isometric actions.

REFERENCES

- [ABG⁺18] Ilka Agricola, Giovanni Bazzoni, Oliver Goertsches, Panagiotis Konstantis, and Sönke Rollenske. On the history of the Hopf problem. *Differential Geom. Appl.*, 57:1–9, 2018.
- [ACD⁺26] Mateo Anarella, Xiuxiu Cheng, Marie D’haene, Zejun Hu, and Luc Vrancken. Almost complex totally geodesic surfaces in the nearly Kähler $\frac{\mathrm{SL}(3, \mathbb{R})}{\mathbb{R} \times \mathrm{SO}(2)}$. *arXiv preprint arXiv:2601.02733*, 2026.
- [B93] Christian Bär. Real Killing spinors and holonomy. *Comm. Math. Phys.*, 154(3):509–521, 1993.
- [Bry87] Robert L. Bryant. Metrics with exceptional holonomy. *Ann. of Math. (2)*, 126(3):525–576, 1987.
- [BS89] Robert L. Bryant and Simon M. Salamon. On the construction of some complete metrics with exceptional holonomy. *Duke Math. J.*, 58(3):829–850, 1989.
- [But05] Jean-Baptiste Butruille. Classification des variétés approximativement kähleriennes homogènes. *Ann. Global Anal. Geom.*, 27(3):201–225, 2005.
- [CV22] Kamil Cwiklinski and Luc Vrancken. Almost complex surfaces in the nearly Kähler flag manifold. *Results Math.*, 77(3):Paper No. 134, 17, 2022.
- [Eck43] Beno Eckmann. Systeme von Richtungsfeldern in Sphären und stetige Lösungen komplexer linearer Gleichungen. *Comment. Math. Helv.*, 15:1–26, 1943.
- [FG85] Thomas Friedrich and Ralf Grunewald. On the first eigenvalue of the Dirac operator on 6-dimensional manifolds. *Ann. Global Anal. Geom.*, 3(3):265–273, 1985.
- [FH17] Lorenzo Foscolo and Mark Haskins. New G_2 -holonomy cones and exotic nearly Kähler structures on S^6 and $S^3 \times S^3$. *Ann. of Math. (2)*, 185(1):59–130, 2017.
- [FI55] Tetsuzo Fukami and Shigeru Ishihara. Almost Hermitian structure on S^6 . *Tohoku Math. J. (2)*, 7:151–156, 1955.
- [GH80] Alfred Gray and Luis M. Hervella. The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 123:35–58, 1980.
- [Gra70] Alfred Gray. Nearly Kähler manifolds. *J. Differential Geometry*, 4:283–309, 1970.
- [Gra72] Alfred Gray. Riemannian manifolds with geodesic symmetries of order 3. *J. Differential Geometry*, 7:343–369, 1972.
- [Gra76] Alfred Gray. The structure of nearly Kähler manifolds. *Math. Ann.*, 223(3):233–248, 1976.
- [Gru90] Ralf Grunewald. Six-dimensional Riemannian manifolds with a real Killing spinor. *Ann. Global Anal. Geom.*, 8(1):43–59, 1990.
- [Hop48] Heinz Hopf. Zur Topologie der komplexen Mannigfaltigkeiten. In *Studies and Essays Presented to R. Courant on his 60th Birthday, January 8, 1948*, pages 167–185. Interscience Publishers, New York, 1948.

- [HV76] Luis Hervella and Enrique Vidal. Nouvelles géométries pseudo-kähleriennes G_1 et G_2 . *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 283(3):Aii, A115–A118, 1976.
- [K33] Erich Kähler. Über eine bemerkenswerte Hermitesche Metrik. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 9(1):173–186, 1933.
- [Kat00] Ines Kath. Pseudo-Riemannian T -duals of compact Riemannian homogeneous spaces. *Transform. Groups*, 5(2):157–179, 2000.
- [LNRV24] Juan Manuel Lorenzo-Naveiro and Alberto Rodríguez-Vázquez. Totally geodesic submanifolds of the homogeneous nearly Kähler 6-manifolds and their G_2 -cones. *arXiv preprint arXiv:2411.11261*, 2024.
- [LVW20] Limiao Lin, Luc Vrancken, and Anne Wijffels. Almost complex submanifolds of nearly Kähler manifolds. *Arch. Math. (Basel)*, 115(3):353–358, 2020.
- [Nag02] Paul-Andi Nagy. Nearly Kähler geometry and Riemannian foliations. *Asian J. Math.*, 6(3):481–504, 2002.
- [Sch17] Lars Schäfer. *Nearly pseudo-Kähler manifolds and related special holonomies*, volume 2201 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Cham, 2017.
- [SvD30] Jan A. Schouten and David van Dantzig. Über unitäre Geometrie. *Math. Ann.*, 103(1):319–346, 1930.
- [Tac59] Shun-ichi Tachibana. On almost-analytic vectors in certain almost-Hermitian manifolds. *Tohoku Math. J. (2)*, 11:351–363, 1959.
- [VH79] Enrique Vidal and Luis Hervella. New classes of almost Hermitian manifolds. *Tensor (N.S.)*, 33(3):293–299, 1979.
- [Wei58] André Weil. *Introduction à l’étude des variétés kählériennes*, volume no. 1267 of *Publications de l’Institut de Mathématique de l’Université de Nancago, VI. Actualités Sci. Ind.* Hermann, Paris, 1958.
- [WG68] Joseph A. Wolf and Alfred Gray. Homogeneous spaces defined by Lie group automorphisms. II. *J. Differential Geometry*, 2:115–159, 1968.
- [Whi46] George W. Whitehead. On families of continuous vector fields over spheres. *Ann. of Math. (2)*, 47:779–785, 1946.

Koszul-Vinberg 構造と Poisson 構造の対応

中村友哉 *(工学院大学学習支援センター)

概要

Abouqateb, Boucetta, Bourzik [3] は Hesse 多様体の非退化性を落とした一般化である Koszul-Vinberg 多様体を定義し、Koszul-Vinberg 多様体 (M, ∇, h) がその接バンドルの全空間上に Poisson 構造を誘導することを示した。Koszul-Vinberg 構造は左対称重代数上に、Poisson 構造は Lie 重代数上に一般化されるが、Poisson 構造は更に Jacobi 構造に、Koszul-Vinberg 構造は同様に Jacobi-Koszul-Vinberg 構造に一般化される [1]。本講演では、左対称重代数上の Koszul-Vinberg 構造が延長 Lie 重代数上の Poisson 構造を誘導すること、更にそれが Jacobi-Koszul-Vinberg 構造と Jacobi 構造の対応に一般化できることなどを紹介する。この研究は東京理科大学の木村直記氏との共同研究である。

1 Koszul-Vinberg 構造と Poisson 構造の対応

Koszul-Vinberg 多様体 (M, ∇, h) は、アフィン多様体 (M, ∇) と条件

$$(\nabla_{h^\sharp \alpha} h)(\beta, \gamma) = (\nabla_{h^\sharp \beta} h)(\alpha, \gamma) \quad (\alpha, \beta, \gamma \in \Omega^1(M))$$

を満たす対称 2-テンソル場 h の組であり、Hesse 多様体の一般化である。アフィン多様体 (M, ∇) 上の対称 2-テンソル場 h は接バンドルの全空間 TM 上の 2-ベクトル場 Π^h を誘導する。このとき次が成り立つことが知られている:

Theorem 1.1 ([3]). アフィン多様体 (M, ∇) 上の $h \in \Gamma(S^2 TM)$ に対して次は同値である:

- (i) (M, ∇, h) : Koszul-Vinberg 多様体
- (ii) (TM, Π^h) : Poisson 多様体

アフィン多様体上の Koszul-Vinberg 構造は左対称重代数上に一般化される。多様体

* kt13676@ns.kogakuin.ac.jp

本研究は JSPS 科研費 JP23K12977, 26K16988 の助成を受けたものです。

M 上の左対称歪代数とは、ベクトルバンドル A , $\Gamma(A)$ 上の双線形な積 $\cdot_A$, M 上のバンドル写像 $\rho_A : A \rightarrow TM$ の 3 つ組で、次を満たすものである: 任意の $X, Y, Z \in \Gamma(A)$, $f \in C^\infty(M)$ に対して、

$$(X, Y, Z) = (Y, X, Z), \quad (1.1)$$

$$X \cdot_A (fY) = f(X \cdot_A Y) + (\rho_A(X)f)Y, \quad (fX) \cdot_A Y = f(X \cdot_A Y). \quad (1.2)$$

ここで $(X, Y, Z) := (X \cdot_A Y) \cdot_A Z - X \cdot_A (Y \cdot_A Z)$ である。アフィン多様体 (M, ∇) 上の接バンドルは $(TM)_\nabla := (TM, \nabla, \text{id}_{TM})$ とおけば左対称歪代数である。

左対称歪代数 $A = (A, \cdot_A, \rho_A)$ 上の **Koszul-Vinberg** 構造とは、 $[[h, h]]_A = 0$ を満たす $h \in \Gamma(S^2 A)$ のことである。ここで、任意の $h \in \Gamma(S^2 A)$ に対して、

$$\begin{aligned} [[h, h]]_A(\alpha, \beta, \gamma) = & \rho_A(h^\sharp \alpha)h(\beta, \gamma) - \rho_A(h^\sharp \beta)h(\alpha, \gamma) + \langle \alpha, h^\sharp \beta \cdot_A h^\sharp \gamma \rangle \\ & - \langle \beta, h^\sharp \alpha \cdot_A h^\sharp \gamma \rangle - \langle \gamma, h^\sharp \alpha \cdot_A h^\sharp \beta - h^\sharp \beta \cdot_A h^\sharp \alpha \rangle. \end{aligned}$$

アフィン多様体 (M, ∇) に対して $h \in \Gamma(S^2 TM)$ が左対称歪代数 $(TM)_\nabla$ 上の Koszul-Vinberg 構造であることと (M, ∇, h) が Koszul-Vinberg 多様体であることは同値である。

一方、多様体上の Poisson 構造は Lie 歪代数上に一般化される。多様体 M 上の **Lie** 歪代数とは、ベクトルバンドル A , $\Gamma(A)$ 上の Lie 括弧積 $[\cdot, \cdot]_A$, M 上のバンドル写像 $\rho_A : A \rightarrow TM$ の 3 つ組で、次を満たすものである:

$$[X, fY]_A = f[X, Y]_A + (\rho_A(X)f)Y \quad (X, Y \in \Gamma(A), f \in C^\infty(M)).$$

多様体 M の接バンドルは $TM = (TM, [\cdot, \cdot]_A, \text{id}_{TM})$ とおけば Lie 歪代数である。

M 上の Lie 歪代数 $A = (A, [\cdot, \cdot]_A, \rho_A)$ 上の **Poisson** 構造とは、 $[\pi, \pi]_A = 0$ を満たす $\pi \in \Gamma(\bigwedge^2 A)$ のことである。ここで $[\cdot, \cdot]_A : \Gamma(\bigwedge^k A) \times \Gamma(\bigwedge^l A) \rightarrow \Gamma(\bigwedge^{k+l-1} A)$ は、多重ベクトル場全体の空間に定義されるものと同様に定義される A 上の Schouten 括弧積である。

本講演ではまず、この一般化された構造についても Theorem 1.1 と同様の対応が成り立つということを紹介する。多様体上の Poisson 構造は、Lie 歪代数である接バンドル上の Poisson 構造と見なすことができる。即ち、Theorem 1.1 の Poisson 多様体は Lie 歪代数 TTM 上の Poisson 構造と見なせる。 M 上のアフィン接続は TTM を垂直方向 $V(M)$ と水平方向 $H(M)$ の直和に分解するが、この分解において、 $V(M)$ と $H(M)$ が同ランクのバンドルであることによって $h \in \Gamma(S^2 TM)$ から $\Pi^h \in \Gamma(\bigwedge^2 TTM)$ が構成される。左対称歪代数 A の接バンドル TA も垂直方向と水平方向の直和に分解するが、

一般にこれらのランクは一致しない。このことは左対称重代数の延長 Lie 重代数を定義することによって解消される。

Definition 1 ([4], [6]). $p_E : E \rightarrow M$ でベクトルバンドル E の射影を表すとする。左対称重代数 $(A, \cdot_A, \rho_A)$ に対して、その延長とは A 上のベクトルバンドル $\mathcal{L}A$ で、全空間は、接写像 $Tp_A : TA \rightarrow TM$ の ρ_A による引き戻しの全空間、即ち、

$$\mathcal{L}A := \{(b, v) \in A \times TA \mid \rho_A(b) = Tp_A(v)\},$$

射影 $p_{\mathcal{L}A} : \mathcal{L}A \rightarrow A$ は $p_{\mathcal{L}A}(b, v) := p_{TA}(v)$, $(b, v) \in \mathcal{L}A$ で与えられるものである。また $\cdot_A$ は同ランクのバンドルへの分解 $\mathcal{L}A = V(\mathcal{L}A) \oplus H(\mathcal{L}A)$ を誘導し、 $\Gamma(V(\mathcal{L}A)), \Gamma(H(\mathcal{L}A))$ は $\Gamma(A)$ の元 X の持ち上げ X^v, X^h によってそれぞれ生成される。このとき $\mathcal{L}A$ 上の Lie 重代数構造 $([\cdot, \cdot]_{\mathcal{L}A}, \rho_{\mathcal{L}A})$ は次で与えられる:

$$\begin{aligned} \rho_{\mathcal{L}A} : \mathcal{L}A &\rightarrow TA, \quad \rho_{\mathcal{L}A}(b, v) := v, \\ [X^v, Y^v]_{\mathcal{L}A} &= 0, \quad [X^h, Y^v]_{\mathcal{L}A} = (X \cdot_A Y)^v, \quad [X^h, Y^h]_{\mathcal{L}A} = [X, Y]_A^h. \quad (X, Y \in \Gamma(A)) \end{aligned}$$

延長 Lie 重代数を用いることで、多様体の場合と同様に $h \in \Gamma(S^2 A)$ は $\Pi^h \in \Gamma(\wedge^2 \mathcal{L}A)$ を誘導することが従い、次を得る。

Theorem 1.2 (木村-N. [2]). 左対称重代数 $(A, \cdot_A, \rho_A)$ 上の対称 2-切断 $h \in \Gamma(S^2 A)$ に対して次は同値である:

- (i) h : 左対称重代数 $(A, \cdot_A, \rho_A)$ 上の Koszul-Vinberg 構造
- (ii) Π^h : 延長 Lie 重代数 $\mathcal{L}A$ 上の Poisson 構造

(M, ∇, h) が Koszul-Vinberg 多様体であることと h が左対称重代数 $(TM, \nabla, \text{id}_{TM})$ 上の Koszul-Vinberg 構造であることは同値であり、 (TM, Π^h) が Poisson 多様体であることと Π^h が Lie 重代数 TTM 上の Poisson 構造であることは同値である。更に $\mathcal{L}(TM) \cong TTM$ が成り立つので Theorem 1.2 は Theorem 1.1 の一般化である。

2 Jacobi-Koszul-Vinberg 構造と Jacobi 構造の対応

Lie 重代数上の Poisson 構造は Jacobi 重代数上の Jacobi 構造 [5] へ、左対称重代数上の Koszul-Vinberg 構造は Jacobi 左対称重代数上の Jacobi-Koszul-Vinberg 構造 [1] へと更に一般化される。

多様体 M 上の **Jacobi 重代数** (A, ϕ_0) とは Lie 重代数 $A = (A, [\cdot, \cdot]_A, \rho_A)$ と $\langle \phi_0, [X, Y]_A \rangle = \rho_A(X) \langle \phi_0, Y \rangle - \rho_A(Y) \langle \phi_0, X \rangle$ を満たす $\phi_0 \in \Gamma(A^*)$ の組である。

多様体 M に対して $TM \oplus \mathbb{R} := TM \oplus (M \times \mathbb{R})$ には自然に Lie 冪代数の構造が入る。このとき $(0, 1) \in \Gamma((TM \oplus \mathbb{R})^*) \cong \Omega^1(M) \times C^\infty(M)$ によって $(TM \oplus \mathbb{R}, (0, 1))$ は Jacobi 冪代数となる。

Jacobi 冪代数 (A, ϕ_0) 上の **Jacobi 構造** とは、 $[\pi, \pi]_{A, \phi_0} = 0$ を満たす $\pi \in \Gamma(\bigwedge^2 A)$ のことである。ここで

$$[\pi, \pi]_{A, \phi_0} := [\pi, \pi]_A + 2\pi^\sharp \phi_0 \wedge \pi.$$

多様体 M 上の **Jacobi 構造** (Λ, E) とは、 $[\Lambda, \Lambda] = 2E \wedge \Lambda, [E, \Lambda] = 0$ を満たす $\Lambda \in \mathfrak{X}^2(M), E \in \mathfrak{X}(M)$ の組である。これは $(\Lambda, E) \in \Gamma(\bigwedge^2(TM \oplus \mathbb{R})) \cong \mathfrak{X}^2(M) \times \mathfrak{X}(M)$ が Jacobi 冪代数 $(TM \oplus \mathbb{R}, (0, 1))$ 上の Jacobi 構造であることと同値である。

Jacobi 冪代数 (A, ϕ_0) は $A \times \mathbb{R}$ 上の Lie 冪代数構造を誘導し、 (A, ϕ_0) 上の Jacobi 構造は $A \times \mathbb{R}$ 上の Poisson 構造を誘導する。これを Jacobi 構造の **Poisson 化** と呼ぶ。

一方、 M 上の **Jacobi 左対称冪代数** (A, ϕ_0) とは左対称冪代数 $(A, \cdot_A, \rho_A)$ と $\rho_A(X)\langle \phi_0, Y \rangle - \langle \phi_0, X \cdot_A Y \rangle$ が対称となるような $\phi_0 \in \Gamma(A^*)$ の組である。アフィン多様体 (M, ∇) 上のベクトルバンドル $TM \oplus \mathbb{R}$ 上には自然に左対称冪代数の構造が入る。更に $(TM \oplus \mathbb{R}, (0, 1))$ は Jacobi 左対称冪代数となる。

Jacobi 左対称冪代数 (A, ϕ_0) 上の **Jacobi-Koszul-Vinberg 構造** とは、 $[[h, h]]_A^{\phi_0} = 0$ を満たす $h \in \Gamma(S^2 A)$ のことである。ここで、

$$[[h, h]]_A^{\phi_0}(\alpha, \beta, \gamma) := [[h, h]]_A(\alpha, \beta, \gamma) + h(\phi_0, \alpha)h(\beta, \gamma) - h(\phi_0, \beta)h(\alpha, \gamma).$$

Jacobi 左対称冪代数 (A, ϕ_0) は $A \times \mathbb{R}$ 上の左対称冪代数構造を誘導し、 (A, ϕ_0) 上の Jacobi-Koszul-Vinberg 構造は $A \times \mathbb{R}$ 上の Koszul-Vinberg 構造を誘導する。これを Jacobi-Koszul-Vinberg 構造の **Koszul-Vinberg 化** と呼ぶ。

Theorem 1.2 を Jacobi 左対称冪代数上の Jacobi-Koszul-Vinberg 構造に適用することで次を得る：

Theorem 2.1 (木村-N. [2]). Jacobi 左対称冪代数 (A, ϕ_0) 上の対称 2-切断 $h \in \Gamma(S^2 A)$ に対して次は同値である：

- (i) h : Jacobi 左対称冪代数 (A, ϕ_0) 上の Jacobi-Koszul-Vinberg 構造
 - (ii) Π^h : 延長 Jacobi 冪代数 $(\mathcal{L}A, \phi_0^h)$ 上の Jacobi 構造
- 但し $\alpha \in \Gamma(A^*)$ に対して、 $\alpha^h \in \Gamma((\mathcal{L}A)^*)$ は $\langle \alpha^h, X^\vee \rangle = 0, \langle \alpha^h, X^h \rangle = \langle \alpha, X \rangle \circ p_A$ ($X \in \Gamma(A)$) で定義される。

Koszul-Vinberg 多様体が Koszul-Vinberg 構造を持つ左対称冪代数 $(TM)_\nabla$ と同値で

あることを参考に、 (M, ∇) 上の **Jacobi-Koszul-Vinberg** 構造を $(TM \oplus \mathbb{R}, (0, 1))$ 上の Jacobi-Koszul-Vinberg 構造として定義することによって **Jacobi-Koszul-Vinberg** 多様体 (M, ∇, h, E) の定義を得る [1]。ここで $h \in \Gamma(S^2 TM), E \in \mathfrak{X}(M)$ である。Theorem 2.1 を $(TM \oplus \mathbb{R}, (0, 1))$ 上の Jacobi-Koszul-Vinberg 構造に適用し、それぞれ多様体の言葉で書き直すことで、Theorem 1.2, Theorem 2.1, Koszul-Vinberg 化、Poisson 化の間の次のような関係を得る：

Theorem 2.2 (木村-N. [2]). Jacobi-Koszul-Vinberg 多様体 (M, ∇, h, E) に対して次の図式は可換である：

$$\begin{array}{ccc}
 (M, \nabla, h, E) & \xrightarrow{\text{Koszul-Vinberg 化}} & (M \times \mathbb{R}, \tilde{\nabla}, \widetilde{(h, E)}) \\
 \text{Jacobi-Koszul-Vinberg 多様体} & & \text{Koszul-Vinberg 多様体} \\
 \downarrow \text{Theorem 2.1} & & \downarrow \text{Theorem 1.2 (Theorem 1.1)} \\
 (TM \oplus \mathbb{R}, \Lambda, E') & \xrightarrow{\text{Poisson 化}} & (T(M \times \mathbb{R}), (\Lambda, E') = \Pi^{\widetilde{(h, E)}}) \\
 \text{Jacobi 多様体} & & \text{Poisson 多様体}
 \end{array}$$

参考文献

- [1] N. Kimura and T. Nakamura, Jacobi-Koszul-Vinberg structures on Jacobi-left-symmetric algebroids, to appear in *Tohoku Math. J.*
- [2] N. Kimura and T. Nakamura, Koszul-Vinberg structures on left-symmetric algebroids and their associated Poisson structures, preprint
- [3] A. Abouqateb, M. Boucetta and C. Bourzik, Contravariant pseudo-Hessian manifolds and their associated Poisson structures, *Differential Geom. Appl.* **70** (2020), 101630, 26 pp.
- [4] P. J. Higgins and K. Mackenzie, Algebraic constructions in the category of Lie algebroids, *J. Algebra* **129** (1990), 194–230.
- [5] D. Iglesias-Ponte and J. C. Marrero, Generalized Lie bialgebroids and Jacobi structures, *J. Geom. Phys.* **40** (2001), 176–200.
- [6] E. Martínez, Lagrangian Mechanics on Lie Algebroids, *Acta Appl. Math.* **67** (2001), 295–320.
- [7] H. Shima, Homogeneous Hessian manifolds, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **30** (1980), no. 3, 91–128.

熱流による正則閉集合と閉球の同定*

坂田繁洋[†]

概要

Euclid 空間に正則 (開集合の閉包をとって得られる) 閉集合と閉球が与えられたとき, それらの定義関数を初期値とする熱方程式の初期値問題の解を用いて, それらが等しいかどうか判定する。

1 序

本稿は, 著者と若杉勇太氏 (広島大学) との共同研究 [7] の一部の解説である。主として参照する先行研究は, [3, Theorem 4] で示された **Hot Potato Kugel** 定理である。**potato kugel** とは, ジャガイモ・タマネギ・卵を使ったユダヤ料理である。そのレシピは [6, pp. 137–138] を参照せよ。Hot Potato Kugel 定理の問題意識は, 「空間内に一様に温められた形不明の 2 つのジャガイモが与えられたとき, それらから伝わる熱を用いて, それらが等しいかどうか判定できるか?」であり, 主張は, 「少なくとも一方が球形ならば, できる」である。当該分野の研究者のユーモアにより, 与えられた対象を球と同定する逆問題は, しばしば (ユダヤ) 料理名で参照される。他には, **matzoh ball soup** がある。これについては, 例えば, [5] と [10, Section 10] を参照せよ。

Hot Potato Kugel 定理を正確に述べるために, 記号と用語を準備する。

$$G(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \quad (1.1)$$

とおく。 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ とする。たたみ込み

$$G(\cdot, t) * f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} G(x - y, t) f(y) dy, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$$

は, $\mathbb{R}^n$ における熱方程式の解である。すなわち, 任意の $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$ に対して,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) G(\cdot, t) * f(x) = 0$$

が成り立つ。 f が x で連続ならば,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} G(\cdot, t) * f(x) = f(x)$$

が成り立つ。関数族 $\{G(\cdot, t) * f\}_{t \in (0, +\infty)}$ を f の熱流という。

$A \subset \mathbb{R}^n$ の定義関数を χ_A とかく。 $A \subset \mathbb{R}^n$ が正則閉集合であるとは, $A = \text{cl int } A$ が成り立つことをいう。 $A \subset \mathbb{R}^n$ が体 (body) であるとは, A が有界な正則閉集合であることをいう。 $A \subset \mathbb{R}^n$ がソリッドであるとは, A が体であり, かつ A の補集合が連結であることをいう。 Hot Potato Kugel 定理の「空間」とは $\mathbb{R}^n$, 「ジャガイモ」とは $\mathbb{R}^n$ のソリッドとし, 「一様に温められたジャガイモ K から伝わる時刻 t における位置 x の熱」とは $G(\cdot, t) * \chi_K(x)$ である。

Hot Potato Kugel 定理を正確に述べる。

*科学研究費・若手研究「凸体の双対体積の幾何不等式とそれから導かれる凸体の演算の性質」(20K14320) の援助を受けている。

[†]法政大学理工学部, E-mail: sakata@hosei.ac.jp

定理 1.1 ([3, Theorem 4]). $X \subset \mathbb{R}^n$ をソリッド, $B \subset \mathbb{R}^n$ を n 次元閉球とする。ある開集合 $O \subset \mathbb{R}^n \setminus (X \cup B)$ が存在して, 任意の $x \in O$ に対して,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{n/2+1} (G(\cdot, t) * \chi_X(x) - G(\cdot, t) * \chi_B(x)) = 0 \quad (1.2)$$

が成り立つと仮定する。このとき, $X = B$ である。

(1.2) の意味, 特に, 係数 $t^{n/2+1}$ の役割を確認する。各 $x \in \mathbb{R}^n$ に対して,

$$(4\pi t)^{n/2} G(x, t) = 1 - \frac{|x|^2}{4t} + O\left(\frac{1}{t^2}\right) \quad (t \rightarrow +\infty) \quad (1.3)$$

が成り立つ。 $K \subset \mathbb{R}^n$ を体とする。(1.3) より, 各 $x \in \mathbb{R}^n$ に対して,

$$(4\pi t)^{n/2} G(\cdot, t) * \chi_K(x) = \text{Vol } K - \frac{1}{4t} \int_K |x - y|^2 dy + O\left(\frac{1}{t^2}\right) \quad (t \rightarrow +\infty) \quad (1.4)$$

が成り立つ。よって, (1.2) は, 「 $K = X$ とした (1.4) と $K = B$ とした (1.4) の第 1 項と第 2 項がそれぞれ等しい」を意味する。この意味で, X と B から伝わる熱を用いている。

本稿の目的は 3 つある。1 つめの目的は, 定理 1.1 の改良である。仮定を弱めて, 同じ結論を示す。2 つめの目的は, 定理 1.1 を少し変えた定理を示すことである。熱流の値ではなく, 熱流の最大値または積分を用いて, 形不明のジャガイモを球形のジャガイモと (平行移動の差を除いて) 同定する。3 つめの目的は, 定理 1.1 の解析的一般化である。 $p : \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ とし, $G(\cdot, t) * \chi_K$ を $p(\cdot, t) * \chi_K$ に代えた定理 1.1 の改良とそれを変えた定理が成り立つための p の十分条件を与える。次節以降, 3 つめ, 1 つめ, 2 つめの順に述べる。

2 分数冪熱流とその一般化

Fourier 変換による $\mathbb{R}^n$ における熱方程式の一般化として, 分数冪熱方程式が知られている。それとその解について, [1] と [8] を参考に, 簡単に述べる。

$\alpha \in (0, 1]$ とする。Fourier 変換を用いて, 作用素 $(-\Delta)^\alpha$ を

$$\begin{aligned} (-\Delta)^\alpha \phi(x) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2\alpha} \widehat{\phi}(\xi) e^{\sqrt{-1}x \cdot \xi} d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y) e^{-\sqrt{-1}y \cdot \xi} dy e^{\sqrt{-1}x \cdot \xi} d\xi \end{aligned}$$

で定義する。

$$G_\alpha(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-t|\xi|^2} e^{\sqrt{-1}x \cdot \xi} d\xi, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \quad (2.1)$$

とおく。 $G_1 = G$ である。すなわち, $\alpha = 1$ とした (2.1) の右辺は計算できて, (1.1) に等しい。 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ とする。任意の $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$ に対して,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + (-\Delta)^\alpha \right) G_\alpha(\cdot, t) * f(x) = 0$$

が成り立つ。また, f が x で連続ならば,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} G_\alpha(\cdot, t) * f(x) = f(x)$$

が成り立つ。関数族 $\{G_\alpha(\cdot, t) * f\}_{t \in (0, +\infty)}$ を f の分数冪熱流とよぶ。

$0 < \alpha < 1$ のとき, (2.1) の別の表示が知られている。[4, Section 5.4] を参考に, それについて簡単に述べ, Hot Potato Kugel 定理に使う G_α の性質を抽出する。以下, $0 < \alpha < 1$ とする。

ある $\eta_\alpha : (0, +\infty) \times (0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ が存在して, 次が成り立つ。

(a) 任意の $t \in (0, +\infty)$ に対して, $\eta_\alpha(\cdot, t)$ は $(0, +\infty)$ で連続である。

(b) 任意の $(t, \lambda) \in (0, +\infty) \times [0, +\infty)$ に対して, $e^{-t\lambda^\alpha} = \int_0^\infty \eta_\alpha(s, t) e^{-\lambda s} ds$ が成り立つ。

この η_α の存在の証明は, 例えば, [9, pp. 259–262] をみよ。Fubini の定理より, 任意の $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$ に対して,

$$G_\alpha(x, t) = \int_0^\infty \eta_\alpha(s, t) G(x, s) ds \quad (2.2)$$

が成り立つ。

表示 (2.2) を用いると, G_α の 2 つの重要な性質を見出せる。1 つは, G_α の勾配の性質である。必要に応じて, $G_\alpha = G_{\alpha,0}$ とかく。 $i \in \{0, 1\}$ とし,

$$G_{\alpha, i+1}(x, t) = \int_0^\infty \frac{\eta_\alpha(s, t)}{(2s)^{i+1}} G(x, s) ds, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$$

とおく。[2, (14)] より, 任意の $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$ に対して,

$$\nabla G_{\alpha, i}(x, t) = \int_0^\infty \eta_\alpha(s, t) \nabla G(x, s) ds = -G_{\alpha, i+1}(x, t)x$$

が成り立つ。

もう 1 つの重要な性質は, $|\nabla G_{\alpha, i}(x, t)|$ の x に関して一様な上からの評価である。

$$\gamma_i(t) = \frac{1}{2^{n+1/2+i} \sqrt{\pi^n} e} \int_0^\infty \frac{\eta_\alpha(s, t)}{s^{(n+1)/2+i}} ds, \quad t \in (0, +\infty)$$

とおく。任意の $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$ に対して, $|\nabla G_{\alpha, i}(x, t)| \leq \gamma_i(t)$ が成り立つ。[2, (10)] と [2, (14)] より, $t \rightarrow +\infty$ のとき, $G_{\alpha, i}(0, t) \sim t^{-(n+2i)/(2\alpha)}$, $\gamma_i(t) \sim t^{-(n+1+2i)/(2\alpha)}$ が成り立つ。特に, $\gamma_0(t) = o(G_{\alpha, 1}(0, t)^3 / \gamma_1(t)^2)$, $\gamma_1(t) = o(G_{\alpha, 1}(0, t))$, $G_{\alpha, 1}(0, t) = o(G_\alpha(0, t))$ が成り立つ。

$0 < \alpha < 1$ のときに, G_α の勾配とその評価を考察した。 $G_1 = G$ にも, (1.1) から直接, 同じ性質を確かめられる。これらを踏まえ, 次をみたす $p : \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を考える。

仮定 2.1. $p : \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $p_1 : \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $N \in (\mathbb{N} \cap [2, +\infty)) \cup \{\infty\}$, $\gamma_0 : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$, $\gamma_1 : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ とする。必要に応じて, $p = p_0$ とかく。

(i) 任意の $t \in (0, +\infty)$ に対して, $p_i(\cdot, t)$ は $\mathbb{R}^n$ で C^{N-i} 級である。

(ii) 任意の $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$ に対して, $|\nabla p_i(x, t)| \leq \gamma_i(t)$ である。

- (iii) 任意の $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$ に対して, $\nabla p(x, t) = -p_1(x, t)x$ である。
- (iv) $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$ で $p_1 \geq 0$ であり, $(0, +\infty)$ で $p_1(0, \cdot) > 0$ である。
- (v) 任意の $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$ に対して, $p_1(x, t) \leq p_1(0, t)$ である。
- (vi) $\gamma_0(t) = o(p_1(0, t)^3 / \gamma_1(t)^2)$ ($t \rightarrow +\infty$)
- (vii) $\gamma_1(t) = o(p_1(0, t))$ ($t \rightarrow +\infty$)
- (viii) 任意の $t \in (0, +\infty)$ に対して, $p(0, t) \neq 0$ である。
- (ix) $p_1(0, t) = o(p(0, t))$ ($t \rightarrow +\infty$)

G_α と G は共に $\mathbb{R}^n$ の変数に関して球対称である。仮定 2.1 をみたす p で, $\mathbb{R}^n$ の変数に関して球対称でないものが存在する。これは一般化の最も大きな利点である (が, 紙数の都合で, その詳細を省略する)。

3 Hot Potato Kugels

定理 1.1 を改良し, それを少し変えた定理を示すために, 記号を準備する。 $\ell \in (0, +\infty)$ とし,

$$L_\ell^1(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in L^1(\mathbb{R}^n) \left| \int_{\mathbb{R}^n} |y|^\ell |f(y)| dy < +\infty \right. \right\}$$

とおく。 $\ell_1 < \ell_2$ ならば, $L_{\ell_1}^1(\mathbb{R}^n) \supset L_{\ell_2}^1(\mathbb{R}^n)$ である。特に, $L^1(\mathbb{R}^n) \supset L_1^1(\mathbb{R}^n) \supset L_2^1(\mathbb{R}^n)$ である。 $f \in L_1^1(\mathbb{R}^n)$ で, $\int_{\mathbb{R}^n} f(y) dy \neq 0$ をみたすものに対して,

$$m_f = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)y dy \Big/ \int_{\mathbb{R}^n} f(y) dy$$

とおく。正則閉集合 $K \subset \mathbb{R}^n$ で, $\chi_K \in L_1^1(\mathbb{R}^n)$ をみたすものに対して, $m_{\chi_K} = m_K$ と略記する。

3.1 2 次モーメントによる正則閉集合と閉球の同定

漸近展開 (1.4) より, 定理 1.1 は, 体積と 2 次モーメント $|\cdot|^2 * K(x) = \int_K |x - y|^2 dy$ による体と閉球の同定と言い換えられる。そこで, 本題に入る前に, 2 次モーメントの性質を準備する。

補題 3.1. $k : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}^n$ を n 次元閉球, $K \subset \mathbb{R}^n$ を正則閉集合とする。 k は単調増加であり, $\text{Vol } K = \text{Vol } B$, $k(|\cdot|) * \chi_K(m_B)$ と $k(|\cdot|) * \chi_B(m_B)$ は共に有限であると仮定する。このとき, 次が成り立つ。

$$(1) \quad k(|\cdot|) * \chi_K(m_B) \geq k(|\cdot|) * \chi_B(m_B)$$

(2) さらに k が狭義単調増加ならば, 等号成立のための必要十分条件は $K = B$ である。

証明. B の半径を R とおく. k は単調増加だから,

$$\begin{aligned} k(|\cdot|) * \chi_K(m_B) - k(|\cdot|) * \chi_B(m_B) &= \left(\int_{K \setminus B} - \int_{B \setminus K} \right) k(|m_B - y|) \, dy \\ &\geq k(R) (\text{Vol } K \setminus B - \text{Vol } B \setminus K) \end{aligned}$$

である. $\text{Vol } K = \text{Vol } B$ より, $\text{Vol } K \setminus B = \text{Vol } B \setminus K$ である. $\square$

命題 3.2. k, B, K を補題 3.1 のものとする. ある $\xi \in \mathbb{R}^n$ が存在して, $k(|\cdot|) * \chi_K(\xi)$ は有限であると仮定する. このとき, 次が成り立つ.

$$(1) \quad k(|\cdot|) * \chi_K(\xi) \geq k(|\cdot|) * \chi_B(m_B)$$

(2) さらに k が狭義単調増加ならば, 等号成立のための必要十分条件は $K - \xi = B - m_B$ である.

証明. $K - \xi + m_B$ に対して, 補題 3.1 を用いる. $\square$

注意 3.3. $f \in L_2^1(\mathbb{R}^n)$ とする. $\int_{\mathbb{R}^n} f(y) \, dy \neq 0$ と仮定する. このとき, 任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して,

$$|\cdot|^2 * f(x) = |x - m_f|^2 \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \, dy + |\cdot|^2 * f(m_f)$$

が成り立つ.

系 3.4. $B \subset \mathbb{R}^n$ を n 次元閉球, $K \subset \mathbb{R}^n$ を正則閉集合とする. $\text{Vol } K = \text{Vol } B$, $\chi_K \in L_2^1(\mathbb{R}^n)$ と仮定する. このとき, 次が成り立つ.

(1) 任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して, $|\cdot|^2 * \chi_K(x) \geq |\cdot|^2 * \chi_B(m_B)$ が成り立つ.

(2) ある $x \in \mathbb{R}^n$ が存在して, $|\cdot|^2 * \chi_K(x) = |\cdot|^2 * \chi_B(m_B)$ が成り立つならば, $x = m_K$ である.

(3) $|\cdot|^2 * \chi_K(m_K) = |\cdot|^2 * \chi_B(m_B)$ であるための必要十分条件は, $K - m_K = B - m_B$ である.

3.2 Hot Potato Kugel 定理の改良

定理 1.1 を改良する. まず, 元の証明を注意深く読むと, 次の 2 つがわかる.

(1) X の補集合は連結でなくともよい. すなわち, 定理 1.1 は体 X を閉球 B と同定する.

(2) 開集合 O は $\mathbb{R}^n \setminus (X \cup B)$ に含まれる必要はない. すなわち, ある開集合 $O \subset \mathbb{R}^n$ が存在して, 任意の $x \in O$ に対して, (1.2) が成り立つならば, $X = B$ である.

本稿では, さらに次の 2 つの改良を加える.

(1)⁺ X は, 2 次モーメントを定義できるならば, 有界でなくともよい.

(2)⁺ affine 独立な $n + 1$ 点で (1.2) が成り立てばよい.

有界でない正則閉集合 X を対象とするために、漸近展開 (1.4) を改良する (できる)。

命題 3.5. $f \in L_2^1(\mathbb{R}^n)$ とする。任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して、

$$p(\cdot, t) * f(x) = p(0, t) \int_{\mathbb{R}^n} f(y) dy - \frac{p_1(0, t)}{2} |\cdot|^2 * f(x) + o(p_1(0, t)) \quad (t \rightarrow +\infty)$$

が成り立つ。

以下の基本方針は「命題 3.5 から従うことを考える」である。

補題 3.6. $f, g \in L_2^1(\mathbb{R}^n)$ とする。

$$L(z, w, t; f, g) = \frac{p(\cdot, t) * f(z) - p(\cdot, t) * g(w)}{p_1(0, t)}, \quad (z, w, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$$

とおく。

(1) 次は同値である。

(a) ある $(z, w) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ が存在して、 $t \rightarrow +\infty$ のとき $L(z, w, t; f, g)$ は収束する。

(b) 任意の $(z, w) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ に対して、 $t \rightarrow +\infty$ のとき $L(z, w, t; f, g)$ は収束する。

(c)
$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} g(y) dy$$

(2) $M \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ とする。 $\int_{\mathbb{R}^n} f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} g(y) dy = M$ ならば、任意の $(z, w) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ に対して、

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} L(z, w, t; f, g) = - \frac{M \left(|z - m_f|^2 - |w - m_g|^2 \right) + |\cdot|^2 * f(m_f) - |\cdot|^2 * g(m_g)}{2}$$

が成り立つ。

証明. (1) は命題 3.5 から、(2) は命題 3.5 と注意 3.3 から従う。 □

命題 3.7. L を補題 3.6 のものとする。 $B \subset \mathbb{R}^n$ を n 次元閉球、 $X \subset \mathbb{R}^n$ を正則閉集合とする。 $\chi_X \in L_2^1(\mathbb{R}^n)$ と仮定する。ある $(z, w) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ が存在して、 $|z - m_X| \geq |w - m_B|$ かつ $\lim_{t \rightarrow +\infty} L(z, w, t; \chi_X, \chi_B) = 0$ が成り立つならば、 $X - m_X = B - m_B$ である。

補題 3.8. f, g, L を補題 3.6 のものとする。次を仮定する。

(a) ある $x_1, \dots, x_{n+1} \in \mathbb{R}^n$ が存在して、次が成り立つ。

(a-1) $x_1, \dots, x_{n+1}$ は affine 独立である。

(a-2) ある $c \in \mathbb{R}$ が存在して、任意の $j \in \{1, \dots, n+1\}$ に対して、 $\lim_{t \rightarrow +\infty} L(x_j, x_j, t; f, g) = c$ が成り立つ。

(b) $\int_{\mathbb{R}^n} f(y) dy \neq 0$ かつ $\int_{\mathbb{R}^n} g(y) dy \neq 0$

このとき, $m_f = m_g$ である。

証明. $t \rightarrow +\infty$ のとき $L(x_1, x_1, t; f, g)$ は収束するから, $(z, w) = (x_1, x_1)$ とした補題 3.6 (1) より, $\int_{\mathbb{R}^n} f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} g(y) dy$ である。これを M とおく。仮定より, $M \neq 0$ である。任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して, $(z, w) = (x, x)$ とした補題 3.6 (2) より,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} L(x, x, t; f, g) = M(m_f - m_g) \cdot \left(x - \frac{m_f + m_g}{2} \right) - \frac{|\cdot|^2 * f(m_f) - |\cdot|^2 * g(m_g)}{2}$$

が成り立つ。よって,

$${}^t \begin{pmatrix} m_f - m_g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - x_2 & \cdots & x_1 - x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

が成り立つ。(ベクトルは縦ベクトルとして計算した。)

□

定理 3.9. L を補題 3.6 の, B, X を命題 3.7 のものとする。次を仮定する。

(a) ある $x_1, \dots, x_{n+1} \in \mathbb{R}^n$ が存在して, 次が成り立つ。

(a-1) $x_1, \dots, x_{n+1}$ は affine 独立である。

(a-2) ある $c \in \mathbb{R}$ が存在して, 任意の $j \in \{1, \dots, n+1\}$ に対して, $\lim_{t \rightarrow +\infty} L(x_j, x_j, t; \chi_K, \chi_B) = c$ が成り立つ。

(b) ある $x \in \mathbb{R}^n$ が存在して, $\lim_{t \rightarrow +\infty} L(x, x, t; \chi_K, \chi_B) = 0$ が成り立つ。

このとき, $X = B$ である。

証明. $(f, g) = (\chi_X, \chi_B)$ とした補題 3.8 より, $m_X = m_B$ である。これを m とおく。 $(z, w) = (x, x)$ とした命題 3.7 より, $X - m = X - m_X = B - m_B = B - m$ である。□

系 3.10. B, X を命題 3.7 のものとする。ある $(x_1, \dots, x_{n+1}, T) \in \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$ が存在して, 次が成り立つと仮定する。

(a) $x_1, \dots, x_{n+1}$ は affine 独立である。

(b) 任意の $(j, t) \in \{1, \dots, n+1\} \times [T, +\infty)$ に対して, $p(\cdot, t) * \chi_X(x_j) = p(\cdot, t) * \chi_B(x_j)$ が成り立つ。

このとき, $X = B$ である。

3.3 最大値を用いた Hot Potato Kugel 定理

熱流の値ではなく, 熱流の最大値で正則閉集合を閉球と同定する。Hot Potato Kugel 定理は, 各点における熱流の漸近展開を用いて示された。同様にして, 熱流の最大値の漸近展開も得られる。それを用いると, 2 次モーメントを定義できる正則閉集合を閉球と同定できる。

命題 3.11. $f \in L_2^1(\mathbb{R}^n)$, $\varphi : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ とする。 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = \xi$ と仮定する。このとき,

$$p(\cdot, t) * f(\varphi(t)) = p(0, t) \int_{\mathbb{R}^n} f(y) dy - \frac{p_1(0, t)}{2} |\cdot|^2 * f(\varphi(t)) + o(p_1(0, t)) \quad (t \rightarrow +\infty)$$

が成り立つ。

補題 3.12. f, g, L を補題 3.6 のもの, $\varphi : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\psi : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ とする。 $\int_{\mathbb{R}^n} f(y) dy \neq 0$, $\int_{\mathbb{R}^n} g(y) dy \neq 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = m_f$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \psi(t) = m_g$ と仮定する。このとき, 次が成り立つ。

(1) $t \rightarrow +\infty$ のとき $L(\varphi(t), \psi(t), t; f, g)$ が収束するための必要十分条件は,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} g(y) dy$$

である。

(2) $\int_{\mathbb{R}^n} f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} g(y) dy$ ならば,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} L(\varphi(t), \psi(t), t; f, g) = -\frac{|\cdot|^2 * f(m_f) - |\cdot|^2 * g(m_g)}{2}$$

である。

証明. (1) は命題 3.11 から, (2) は命題 3.11 と注意 3.3 から従う。 $\square$

命題 3.13. B, X を命題 3.7 のもの, $\varphi : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\psi : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ とする。 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = m_X$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \psi(t) = m_B$ と仮定する。 $\lim_{t \rightarrow +\infty} L(\varphi(t), \psi(t), t; \chi_K, \chi_B) = 0$ ならば, $X - m_X = B - m_B$ である。

証明. $t \rightarrow +\infty$ のとき $L(\varphi(t), \psi(t), t; \chi_X, \chi_B)$ は収束するから, $(f, g) = (\chi_X, \chi_B)$ とした補題 3.12 (1) より, $\text{Vol } X = \text{Vol } B$ である。 $(f, g) = (\chi_X, \chi_B)$ とした補題 3.12 (2) と, $K = X$ とした系 3.4 (1), (3) より, 結論を得る。 $\square$

定理 3.14. $f \in L_1^1(\mathbb{R}^n)$ とする。 $\int_{\mathbb{R}^n} f(y) dy > 0$ と仮定する。このとき, 次が成り立つ。

(1) ある $T \in (0, +\infty)$ が存在して, 任意の $t \in (T, +\infty)$ に対して, $p(\cdot, t) * f$ の最大点が唯一つ存在する。

(2) $t \rightarrow +\infty$ のとき, $p(\cdot, t) * f$ の (唯一つの) 最大点は m_f に収束する。

系 3.15. B, X を命題 3.7 のものとする。 $K \in \{B, X\}$ に対して, $p(\cdot, t) * \chi_K$ の最大点の 1 つを $h_K(t)$ とかく。このとき, 次が成り立つ。

(1) $\lim_{t \rightarrow +\infty} L(h_X(t), h_B(t), t; \chi_X, \chi_B) = 0$ ならば, $X - m_X = B - m_B$ である。

(2) ある $T \in (0, +\infty)$ が存在して, 任意の $t \in (0, +\infty)$ に対して,

$$t \geq T \implies \max p(\cdot, t) * \chi_X = \max p(\cdot, t) * \chi_B$$

が成り立つと仮定する。このとき, $X - m_X = B - m_B$ である。

3.4 積分を用いた Hot Potato Kugel 定理

熱流の値ではなく、熱流の積分で正則閉集合を閉球と同定する。熱流の値と熱流の最大値の漸近展開と同様に、熱流の積分の漸近展開も得られる。それを用いると、2 次モーメントを定義できる正則閉集合を閉球と同定できる。

命題 3.16. $f_1, f_2 \in L_2^1(\mathbb{R}^n)$ とする。このとき、

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} p(\cdot, t) * f_1(x) f_2(x) dx \\ &= p(0, t) \int_{\mathbb{R}^n} f_1(y) dy \int_{\mathbb{R}^n} f_2(x) dx - \frac{p_1(0, t)}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |\cdot|^2 * f_1(x) f_2(x) dx + o(p_1(0, t)) \quad (t \rightarrow +\infty) \end{aligned}$$

が成り立つ。

補題 3.17. $f_1, f_2, g_1, g_2 \in L_2^1(\mathbb{R}^n)$ とする。

$$\mathcal{L}(t; f_1, f_2, g_1, g_2) = \frac{\int_{\mathbb{R}^n} p(\cdot, t) * f_1(x) f_2(x) dx - \int_{\mathbb{R}^n} p(\cdot, t) * g_1(x) g_2(x) dx}{p_1(0, t)}, \quad t \in (0, +\infty)$$

とおく。

(1) $t \rightarrow +\infty$ のとき $\mathcal{L}(t; f_1, f_2, g_1, g_2)$ が収束するための必要十分条件は、

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_1(y) dy \int_{\mathbb{R}^n} f_2(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} g_1(y) dy \int_{\mathbb{R}^n} g_2(x) dx$$

である。

(2) $M_1, M_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ とする。

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} f_1(y) dy, \int_{\mathbb{R}^n} f_2(x) dx \right) = \left(\int_{\mathbb{R}^n} g_1(y) dy, \int_{\mathbb{R}^n} g_2(x) dx \right) = (M_1, M_2)$$

ならば、

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathcal{L}(t; f_1, f_2, g_1, g_2) &= -\frac{1}{2} \left[M_1 M_2 \left(|m_{f_1} - m_{f_2}|^2 - |m_{g_1} - m_{g_2}|^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + M_2 (|\cdot|^2 * f_1(m_{f_1}) - |\cdot|^2 * g_1(m_{g_1})) + M_1 (|\cdot|^2 * f_2(m_{f_2}) - |\cdot|^2 * g_2(m_{g_2})) \right] \end{aligned}$$

である。

証明. (1) は命題 3.16 から、(2) は命題 3.16 と注意 3.3 から従う。 $\square$

命題 3.18. B, X を命題 3.7 の、 $\mathcal{L}$ を補題 3.17 のものとする。 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathcal{L}(t; \chi_X, \chi_X, \chi_B, \chi_B) = 0$ ならば、 $X - m_X = B - m_B$ である。

証明. $t \rightarrow +\infty$ のとき $\mathcal{L}(t; \chi_X, \chi_X, \chi_B, \chi_B)$ は収束するから、 $(f_1, f_2, g_1, g_2) = (\chi_X, \chi_X, \chi_B, \chi_B)$ とした補題 3.17 (1) より、 $\text{Vol } X = \text{Vol } B$ である。 $(f_1, f_2, g_1, g_2) = (\chi_X, \chi_X, \chi_B, \chi_B)$ とした補題 3.17 (2) と、 $K = X$ とした系 3.4 (1), (3) より、結論を得る。 $\square$

系 3.19. B, X を命題 3.7 のものとする。ある $T \in (0, +\infty)$ が存在して、任意の $t \in (0, +\infty)$ に対して、

$$t \geq T \implies \int_X p(\cdot, t) * \chi_X(x) \, dx = \int_B p(\cdot, t) * \chi_B(x) \, dx$$

が成り立つと仮定する。このとき、 $X - m_X = B - m_B$ である。

謝辞

第 73 回幾何学シンポジウムで基調講演の機会をいただき、誠にありがとうございます。推薦いただいた幾何学分科会拡大幹事会の先生と、それをお認めいただいた先生に感謝いたします。

参考文献

- [1] M. Bonforte, Y. Sire and J. L. Vázquez, *Optimal existence and uniqueness theory for the fractional heat equation*, Nonlinear Anal. **153** (2017), 142–168.
- [2] K. Bogdan, A. Stós and P. Sztonyk, *Harnack inequality for stable processes on d -spaces*, Studia Math. **158** (2) (2003), 163–198.
- [3] I. Chavel and L. Karp, *Movement of hot spots in Riemannian manifolds*, J. d’Analyse Math. **55** (1990), 271–286.
- [4] A. Grigor’yan, *Heat kernels and function theory on metric measure spaces*, Contemp. Math. Vol. 338, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003, pp. 143–172.
- [5] R. Magnanini and S. Sakaguchi, *Matzoh ball soup: heat conductors with a stationary isothermic surface*, Ann. of Math. **156** (2002), Issue 3, 931–946.
- [6] C. Roden, *The Book of Jewish Food*, Penguin Books Ltd, 2022.
- [7] S. Sakata and Y. Wakasugi, *Asymptotic properties of a subordinated heat flow and their generalization*, preprint.
- [8] J. L. Vázquez, *Asymptotic behaviour for the fractional heat equation in the Euclidean space*, Complex Var. Elliptic Equ. **63** (2018), Issue 7-8, 1216–1231.
- [9] K. Yosida, *Functional Analysis*, Classics in Mathematics, Berlin, Springer-Verlag, 1995.
- [10] L. Zalcman, *Some inverse problems of potential theory*, Contemp. Math. Vol. 63, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987, pp. 337–350.

平衡計量と完備調和計量

東北大学数理科学共創社会センター 宮武夏雄

最初に Section 1 から Section 3 で背景となる事柄の説明をする. Section 1 から Section 3 に本稿執筆者のオリジナリティは一切含まれない. その後, 研究の紹介を Section 4 から Section 7 で行う.

1 平衡計量

1.1 劣調和関数

$\mathbb{C}$ を複素平面, $D \subseteq \mathbb{C}$ をその連結開集合とする. D 上の実数値もしくは $-\infty$ に値をとる関数 $u : D \rightarrow [-\infty, \infty)$ が**劣調和関数** (cf. [15, 30]) であるとは, u が上半連続関数であって, 全ての $a \in D$ と全ての $r > 0$ に対し, a を中心とする半径 r の閉球が D に含まれるとき常に, 以下の平均値の不等式が成り立つことをいう:

$$u(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{\sqrt{-1}\theta}) d\theta.$$

$u : D \rightarrow [-\infty, \infty)$ を劣調和関数で, 恒等的に $-\infty$ ではない (少なくとも一点 $u(a) \neq -\infty$ なる $a \in D$ が存在する) ものとする. このとき, u は局所可積分関数で, 以下の不等式を分布の意味で (弱い意味で) 満たすことが知られている (cf. [15, 30]):

$$\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}u \geq 0. \quad (1)$$

ここに, u が不等式 (1) を分布の意味で (弱い意味で) 満たすとは, 全ての滑らかなコンパクト台を持つ D 上の非負値関数 ϕ に対し, $\int_D u\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\phi \geq 0$ が成り立つことを言う. また逆に, 不等式 (1) を満たす上半連続な局所可積分関数は劣調和関数になることが知られている. $\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}u$ は自然に D 上の Borel 測度を誘導する. すなわち, D 上の Borel 測度 ν であって, $\int_D u\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\phi = \int_D \phi\nu$ が全ての D 上のコンパクトサポートを持つ滑らかな関数について成立するものが唯一つ存在することが知られている (cf. [15, 30]). ν を規格化した測度 $\frac{1}{\pi}\nu$ を μ_u と書き, これを u の **Riesz 測度** と呼ぶ.

Example 1. $f_1, \dots, f_N : D \rightarrow \mathbb{C}$ を正則関数, $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ を正の実数とすると, $\log(|f_1|^{\alpha_1} + \dots + |f_N|^{\alpha_N})$ は劣調和関数である. 特に, $a \in D$ に対し $\log|z - a|$ は劣調和関数であり, その Riesz 測度は a にのみサポートを持つ Dirac 測度 δ_a である.

以上の定義を $\mathbb{C}$ の領域から, 任意の Riemann 面に拡張することは容易である. ただし, 連結閉 Riemann 面の場合には, 劣調和関数は, 例えば劣調和関数の最大値原理を用いると, 定数関数しかないことが示される. そこで, 上述した概念の拡張を以下のように用意する. X を Riemann 面, $L \rightarrow X$ を X 上の正則直線束とする. 以下, L 上の半正值特異 Hermite 計量という概念を定義したいのだが, 後述するように, これは X が開 Riemann 面の場合には, 上述した劣調和関数と実質的には同じものである. 従って Riemann 面は閉 Riemann 面に限定しても良いのだが, 後程それらが同じであることを説明する際に便利のように, 差し当たって Riemann 面は特に閉には限定しないことにする. h_* を L 上の滑らかな参照計量とし, $\varphi : X \rightarrow [-\infty, \infty)$ を上半連続な局所可積分関数で, 局所的に劣調和関数と滑らかな関数の和で表すことができるものとする. このとき, $h_\varphi := e^{-\varphi}h_*$ を**特異 Hermite 計量**と呼ぶ. 特異 Hermite 計量は, 劣調和関数と同様に, 分布の意味 (弱い意味) でその曲率カレントを以下のように定めることができる:

$$F_{h_\varphi} := F_{h_*} + \partial\bar{\partial}\varphi.$$

ここに, F_{h_*} は h_* の通常の意味での曲率で, 右辺第二項は劣調和関数のときと同様に, 部分積分を用いて定義するものとする. 特異 Hermite 計量 h_φ の曲率が**半正**であるとは, 全ての滑らかなコンパクトサポートを持つ非負値関数 ϕ に対し, 積分 $\int_X (\phi\sqrt{-1}F_{h_*} + \varphi\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\phi)$ が非負値であることとして定める. これは, 参照計量の選び方には依存しない概念であることに注意せよ. 曲率が半正の特異 Hermite 計量を**半正值特異 Hermite 計量** (cf. [15]) と呼ぶ. X が開 Riemann 面の場合, 参照計量として平坦な計量を選べば, h_φ が半正值特異 Hermite 計量であることは, 関数 φ が劣調和関数であることに他ならない. 劣調和関数の場合と同様に, 半正值特異 Hermite 計量の曲率カレント $\sqrt{-1}F_{h_\varphi}$ は X 上の Borel 測度を誘導する.

Example 2. $L \rightarrow X$ を閉 Riemann 面上の正則直線束で, $\deg(L) > 0$ なるものとする. $s \in H^0(L^N)$ を L^N の正則切断とする. このとき, L^{-N} には s の零点において退化した Hermite 計量 h_s が以下のように誘導される:

$$h_s(u, v) := \langle s_x, u \rangle \overline{\langle s_x, v \rangle} \quad (x \in X, u, v \in (L^N)_x).$$

ここに, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は自然なカップリングである. このとき, h_s が L に誘導する s の零点において発散する特異 Hermite 計量 $h_s^{-1/N}$ は半正值特異 Hermite 計量である. その曲率カレントのサポートは, s の零点集合に一致する.

1.2 平衡測度と平衡計量

コンパクト Riemann 面上の平衡測度と平衡計量という概念の定義を紹介することが本小節の目標である. 平衡 (equilibrium) とは熱力学の用語である. 平衡測度は, その起源はガウスが考察した最適電荷分布の問題に遡ると言われている (cf. [30, 31]). その起源であるポテンシャル論だけでなく, 力学系や確率論や複素幾何学など多くの分野で研究がなされてきた非常に興味深い概念である.

X を閉 Riemann 面とする. X の部分集合 $E \subseteq X$ に対して以下の用語を定義することから始める. E が (局所) **極集合** (cf. [16]) であるとは, 任意の $x \in E$ に対して, x のある開近傍 $U \subseteq X$ と U 上の劣調和関数 $\varphi_U : U \rightarrow [-\infty, \infty)$ が存在して, $E \cap U \subseteq \varphi_U^{-1}(-\infty)$ となることをいう. 明らかに, 有限部分集合は (局所) 極集合である. Josefson の定理 (cf. [16]) によって, 上述した定義は, 実は大域的に極集合であることと同値, すなわち, (局所) 極集合 E に対して常に, X 上のある半正值特異 Hermite 計量 $e^{-\varphi} h_*$ であって, φ は恒等的に $-\infty$ ではなく, $E \subseteq \varphi^{-1}(-\infty)$ なるものをとることができることが知られている. X の閉部分集合 $K \subseteq X$ に対して, $\mathcal{M}_K$ でサポートが K に含まれるような Borel 確率測度全体の空間を表すことにする. 以下本小節を通して, K は極集合ではないと仮定する. $L \rightarrow X$ を $\deg(L) = 1$ の正則直線束, h_* を L 上の滑らかな Hermite 計量, その曲率形式を全体積 1 に規格化したものを $\omega := \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} F_{h_*}$ と定める. $\mathcal{M}_K$ 上の汎関数 E_ω を $\mu \in \mathcal{M}_K$ に対して以下のように定める (cf. [3, 7]):

$$E_\omega(\mu) := \frac{1}{2} \int_X d\varphi_\mu \wedge d^c \varphi_\mu.$$

ここに, $d^c := \frac{1}{2\sqrt{-1}\pi}(\partial - \bar{\partial})$ であり, φ_μ は $dd^c \varphi_\mu = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} \varphi_\mu = \mu - \omega$ の (弱) 解である. X が複素射影直線るときには, K に含まれない 1 点を取りこれを無限遠とし, ω を無限遠にのみサポートをもつディラックカレントに選べば (厳密には, h_* は滑らかな Hermite 計量として選んだのでそのようなものに近づければ), この汎関数はポテンシャル論における伝統的な汎関数である対数エネルギー (cf. [30, 31]) と (定数倍の差を無視して) 一致する. この汎関数 E_ω は弱 $*$ -位相に関して下半連続かつ, 有限エネルギーの Borel 確率測度全体の中で厳密凸関数になることを確かめることができる (cf. [3, 7, 30, 31]). 従って ϕ を連続関数としたとき, E_ω に μ に関する一次の項を足した以下の汎関数

$$E_\omega(\mu) + \int_X \phi d\mu$$

は $\mathcal{M}_K$ の中に唯一つミニマイザーを持ち, これを (K, ϕ) に付随する**平衡測度**と呼ぶ. 以上が, 平衡測度の, ポテンシャル論における古典的な定義を一般化した測度論からの定義であったが, これを平衡計量と呼ばれる特別な半正值特異 Hermite 計量の曲率カレントが誘導する Borel 確率測度として定義することもでき, 今回紹介する研究ではむしろその定義を積極的に用いるので, 以下その紹介をしたい. 上述した設定をそのまま踏襲する. X 上の $\varphi : X \rightarrow [-\infty, \infty)$ で, 局所的に滑らかな関数と劣調和関数の和で表すことができ, $e^{-\varphi} h_*$ の曲率が半正になるものを, **劣調和関数ウェイト関数**と以下呼ぶ. X 上の劣調和ウェイト関数全体の集合を $SH(X)$ で表す. このとき, 非極コンパクト集合 K と連続関数 ϕ の組 (K, ϕ) に付随する**平衡ウェイト** $\varphi_{\text{eq}}(K, \phi)$ を以下のように定める:

$$\varphi_{\text{eq}}(K, \phi) := \sup\{\varphi \in SH(X) \mid \varphi \leq \phi \text{ on } K\}^*. \quad (2)$$

ここに, $*$ は上半連続正則化 (cf. [15, 30]) を表す. K が極集合でないという事情により, 式 (2) の右辺の上限が発散せず有限値になる (cf. [16]). $\varphi_{\text{eq}}(K, \phi)$ も再び劣調和ウェイト関数になる. この平衡ウェイトを用いて定まる半正值特異 Hermite 計量 $h_{\text{eq}} := e^{-\varphi_{\text{eq}}(K, \phi)} h_*$ を**平衡計量** (cf. [3, 7, 15, 34]) と呼ぶ. Frostman の議論 (cf. [30]) を用いると, 平衡測度 μ_{eq} に付随するポテンシャル $\varphi_{\mu_{\text{eq}}}$ として平衡ウェイトを選ぶことができる (平衡ウェイトが $dd^c \varphi_{\text{eq}}(K, \phi) = \mu_{\text{eq}} - \omega$ の解になる) ことを示すことができる. 別の言い方をすれば, 平衡計量の曲率カレントから誘導される Borel 確率測度が実は平衡測度になる, ということを示すことができる. この意味で, 上述したポテンシャルから出発する方法で平衡測度を構成することもできる. 本小節の最後に平衡測度や平衡計量の具体例を述べて終わりたい. 以下述べる Example 4 は, 具体形を明確に知ることができる数少ない具体例の内の一つである.

Example 3. $K = X$ で, $e^{-\phi} h_*$ そのものが半正值曲率を持つとき, $e^{-\phi} h_*$ は平衡計量になる. 従って特に, 曲率正の Hermite 計量, 例えば複素射影直線上の Fubini-Study 計量から誘導される Hermite 計量は $K = X$ に対する平衡計量である.

Example 4. X を複素射影直線 $\mathbb{CP}^1$ とし, L を超平面直線束とする. $s \in H^0(L)$ を, $s(\infty) = 0$ なる正則切断とし, $h_s^{-1} = e^{-\log|s|_{h_*}} h_*$ を s により誘導される L 上の半正値特異 Hermite 計量とする. $K = S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ と定め, 連続関数 ϕ を $\mathbb{C}$ 上の定数関数に取る. このとき, 平衡ウェイトは

$$\varphi_{\text{eq}}(S^1, \phi) = \max(0, \log|z|).$$

h_s が無限遠で発散しているのに厳密には上で述べた構成と全く同じではないのだが, このウェイト関数も無限遠で発散しており, それらがキャンセルして $\mathbb{CP}^1$ 上の連続な平衡計量が定まる. 対応する平衡測度は, 以下ようになる:

$$\mu_{\text{eq}}(S^1, \phi) = \frac{1}{2\pi} d\theta.$$

ここに, $d\theta$ は円周上の一様弧長測度である.

1.3 平衡測度と平衡計量の近似

平衡測度や平衡計量は, 伝統的に, 非平衡測度や非平衡計量による**近似**が様々な文脈で研究されてきた. 例えば, 複素力学系 (cf. [30]), ランダム行列の固有値 (から構成される測度) (cf. [1]), ランダム多項式やランダム切断の零点 (cf. [35, 36]), Bergman 核近似 (cf. [3, 4, 8, 9, 37, 38]), 直交多項式の零点 (cf. [31]), Fekete 配置 (cf. [6, 30, 31]) などである.

Example 5. 上述したものそれぞれを説明するだけの余裕はないが, 簡単なもので近似の雰囲気の説明する. $f(z) := z^d$ ($d \geq 2$) から定まる $\mathbb{CP}^1$ 上の正則自己写像からなる複素力学系を考える. $s \in H^0(L)$ を超平面直線束の正則切断で, その零点が原点でも無限遠でもない, 例えば単位円の内部で原点からは少しずれたところにあるものとする. $h := h_s^{-1}$ を s の零点において発散する超平面直線束上の半正値特異 Hermite 計量とする. f で繰り返し引き戻し, 引き戻したものを正規化することにより, 超平面直線束の半正値特異 Hermite 計量の列 $((f^{k*}h)^{1/d^k})_{k \in \mathbb{N}}$ が得られる. k が大きくなるごとに, 特異 Hermite 計量の発散する点, 曲率カレントのサポートの個数は増えていき, また単位円に内側から近づいていく. $k \rightarrow \infty$ の極限で, 上述した Example 4 の特異計量に収束し, また曲率カレントから誘導される確率測度の列は単位円周上の一様測度に収束する.

2 完備調和計量

2.1 定義と Li-Mochizuki の定理

Li-Mochizuki [20] の定理の内容を説明することが本小節の目標である. X をコンパクトとは限らない連結 Riemann 面, $K_X \rightarrow X$ を X の標準束とする. 標準束の二乗根 $K_X^{1/2} \rightarrow X$ ($K_X^{1/2} \otimes K_X^{1/2} \simeq K_X$) を一つ固定し, X 上の階数 $r \geq 2$ の正則ベクトル束 $\mathbb{K}_r \rightarrow X$ を

$$\mathbb{K}_r := \bigoplus_{j=1}^r K_X^{(r-(2j-1))/2} = K_X^{(r-1)/2} \oplus K_X^{(r-3)/2} \oplus \cdots \oplus K_X^{-(r-3)/2} \oplus K_X^{-(r-1)/2}$$

と定める. これは, Hitchin [18] により導入されたもので, A_{r-1} 型の Weyl ベクトルにその定義が由来する. この正則ベクトル束の上に, 上述した分解に対して対角形の Hermite 計量 $h = (h_1, \dots, h_r)$ が与えられているとする. このとき, 隣接成分の差をとることにより, K_X^{-1} 上に $r-1$ 個の Hermite 計量が $H_j := h_j^{-1} \otimes h_{j+1}$ と定まる. Hermite 計量 h が**完備** (cf. [20]) であるということを, これらの $r-1$ 個の Hermite 計量から誘導される Kähler 計量が全て完備になることとして定義する. この完備性という概念は文献 [20] で最初に導入されたものであるが, 厳密には, [20] では, 対角形の Hermite 計量 $h = (h_1, \dots, h_r)$ であって, 後程すぐに述べる Hitchin 方程式の解になっているものについて, 完備解 (complete solution) という言い方が使われている (さらに厳密なことを言えば, [20] では, Hermite 計量そのものというよりも, 対角形の参照 Hermite 計量を一つ固定したうえで, 対角形の Hermite 計量を関数の組と同一視し, それに対して完備解という用語が使われている). 元の論文よりも言葉の使い方が少し広いが, 本稿を通じてこのような言い方をすることにする. 対角形の Hermite 計量が与えられると, 上述したように $r-1$ 個の K_X^{-1} 上の Hermite 計量を得ることができるが, さらに, $K_X^r \rightarrow X$ の正則切断 $q \in H^0(K_X^r)$ が一つ与えられているとすると, 以下のように, q の零点において退化した Hermite 計量 $H_r = H_0$ が一つ定まる:

$$H_r = H_0 := h_r^{-1} \otimes h_1 \otimes h_q.$$

ここに, h_q は Example 2 のように q から誘導される K_X^r 上の q の零点において退化した Hermite 計量である. 以上の記号の準備の下で, $\mathbb{K}_r$ 上の対角形の Hermite 計量 $h = (h_1, \dots, h_r)$ に対する以下の楕円型方程式を導入し, (巡回 Higgs 束の) **Hitchin 方程式** [17] と呼ぶ:

$$\sqrt{-1}F_{h_j} + \text{vol}(H_{j-1}) - \text{vol}(H_j) = 0 \text{ for } j = 1, \dots, r-1. \quad (3)$$

ここに, $\text{vol}(H_j)$ は H_j の体積形式を表す. 上述した用語に関していくつかの補足をしたい. まず, Higgs 束や Hitchin 方程式は, Hitchin [17] や Simpson [33] により導入されたより広い概念であり, 方程式 (3) は, 巡回 Higgs 束と呼ばれる, [2, 17, 18] で導入された特別な Higgs 束の Hitchin 方程式である. Higgs 束や Hitchin 方程式の一般的な定義は本稿では行わない. 方程式 (3) は戸田方程式の変種であるとも見做せることもリマークする (cf. [14, 20]). Hitchin 方程式の解は一般に調和計量とも呼ばれる (cf. [10]). 方程式 (3) の完備解, すなわち完備調和計量に対して, Li–Mochizuki は以下の定理を確立した:

Theorem 6 ([20]). 正則切断 q は, X が双曲型でない場合には 0 でないと仮定する. このとき, 方程式 (3) の完備解で $\det(h) = 1$ なるものが唯一つ存在する.

上述した定理の背景については本稿では触れない ([20] を参照せよ). また, 完備でない解の分類に関する研究も Li–Mochizuki によりなされている [21].

2.2 Hitchin 方程式の 2 種類の自明解

巡回 Higgs 束の Hitchin 方程式 (3) には 2 種類の自明解 (明示的に書くことができる解) が存在する. これは, よく知られている事実ではあるものの, 巡回 Higgs 束に関連する文献においてことさらに強調されることはほとんどないことである. しかしながら, 今回の研究の立場からは, その出発点となった重要な観察を含むものであるので, 予稿のスペースを割いてきちんと紹介をしたい.

上述したように, 対角形の Hermite 計量 $h = (h_1, \dots, h_r)$ からは, $(r-1)$ 個の K_X^{-1} 上の Hermite 計量 $H_1, \dots, H_{r-1}$ が構成されるが, この $H_1, \dots, H_{r-1}$ に変数変換をすると, 方程式 (3) は以下のように書き直すことができる:

$$\sqrt{-1}F_{H_j} + 2\text{vol}(H_j) - \text{vol}(H_{j-1}) - \text{vol}(H_{j+1}) = 0 \text{ for } j = 1, \dots, r-1. \quad (4)$$

特に, $r = 2$ かつ $q = 0$ のときには, 方程式 (3) と (4) は負の定曲率 Kähler 計量に関する以下の方程式に一致する:

$$\sqrt{-1}F_H + 2\text{vol}(H) = 0. \quad (5)$$

ここに, 方程式 (5) の解 H は $K_X^{-1} \rightarrow X$ 上の Hermite 計量である. このとき, 次が成り立つ:

- もし q が零点を全く持たなかったとすると, $H_1 = \dots = H_{r-1} = h_q^{1/r}$ において得られる Hermite 計量は方程式 (4) の解である. 特に, $h_q^{1/r}$ が完備 Kähler 計量を誘導するならば, 逆変数変換で得られる調和計量 $h = (h_1, \dots, h_r)$ は完備である.
- 上述した場合とは全く逆に, $q = 0$ であったとする. 以下のように実数 $\lambda_1, \dots, \lambda_{r-1}$ を定める:

$$\lambda_j := 2 \sum_{k=1}^{r-1} (\Lambda_{r-1}^{-1})_{jk} = j(r-j). \quad (6)$$

ここに, Λ_{r-1}^{-1} は A_{r-1} 型の Cartan 行列の逆行列である. 方程式 (5) の解 H と, (6) で定まる実数 $\lambda_1, \dots, \lambda_{r-1}$ を用いて Hermite 計量 $H_1, \dots, H_{r-1}$ を $H_j = \lambda_j H$ ($j = 1, \dots, r-1$) と定めると, これは方程式 (4) の解である. 特に, X が双曲 Riemann 面で, H が完備双曲 Kähler 計量から誘導されるものであったとすると, $H_1, \dots, H_{r-1}$ を逆変数変換で戻して得られる調和計量 $h = (h_1, \dots, h_r)$ は完備である.

上述したように, 完備調和計量は, その特別な場合として, 非正完備定曲率 Kähler 計量を含むものである. 双曲計量とユークリッド計量はそれぞれ, q が零点を全く持たない場合 (でかつ, $h_q^{1/r}$ が完備な場合) と, q が恒等的に零の場合という, 2 つの極端な場合に対応する. Hitchin 方程式 (3) は, 伝統的には, その解から, 調和写像が生じるもの, もしくは, 平坦束が生じるもの, またもしくは, モジュライ空間を調べるときに役立つ何かを提供するもの, という見方で研究されることがほとんどであったが, 本稿執筆者はそのどれでもなく, 方程式 (3) の完備解を, 双曲計量とユークリッド計量の中間に位置する何かを提供するもの (特に, q の零点の影響を受けてユークリッド計量から見て曲がった何かを提供するもの) との見方を積極的にして, ポテンシャル論的・複素解析的な立場からの新しい研究の仕方があり得るのではないかと考えており, 今回の発表ではそれをお伝えすることが目的である.

3 カノニカル分布

3.1 カノニカル分布

平衡統計力学における, 有限準位系のカノニカル分布 (cf. [19]) に関連する用語の紹介をする. Ω を (ミクロ状態をラベルする) 有限集合, $E : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ を (各状態にそのエネルギーを対応させる) 実数もしくは無限大に値を取る関数とする. $i \in \Omega$ にお

る E の値を E_i と書く．(逆温度に対応する) 正の実数 β を一つ取る．このとき, Ω 上の以下の確率分布 $(p_i(\beta))_{i \in \Omega}$ を**カノニカル分布**と呼ぶ:

$$p_i(\beta) := \frac{e^{-\beta E_i}}{\sum_{j \in \Omega} e^{-\beta E_j}} \quad (i \in \Omega).$$

ただし, E が恒等的に ∞ の場合は確率分布は一様分布であると約束する．上述した確率分布における規格化因子を $Z(\beta)$ で表し, **分配関数**と呼ぶ:

$$Z(\beta) := \sum_{j \in \Omega} e^{-\beta E_j}.$$

またさらに, 分配関数の対数を取り, 因子 $-1/\beta$ を乗じたものを**自由エネルギー**と呼び, $F(\beta)$ で表す:

$$F(\beta) := -\frac{1}{\beta} \log Z(\beta).$$

さらに, **エントロピー**を以下のように定める:

$$S(\beta) := \beta(\langle E \rangle^{\text{can}} - F(\beta)).$$

ここに, $\langle E \rangle^{\text{can}} = \sum_{j \in \Omega} E_j p_j(\beta)$ は関数 E のカノニカル分布に関する期待値である．このとき計算から, 上述したエントロピー $S(\beta)$ は以下の情報理論における **Shannon エントロピー** [32] と一致することがわかる:

$$S(\beta) = -\sum_{j \in \Omega} p_j(\beta) \log p_j(\beta).$$

上述した説明においては逆温度に対応する実数 β は正としたが, E が無限大をとらなければ, 純数学的には β が負の場合への拡張も可能である．

3.2 Shannon エントロピーの Schur 凹性

Shannon エントロピーには Schur 凹性と呼ばれる重要な性質があって, 主定理の証明においてもそれを用いるので, その点について軽く触れたい．Schur 凹性とは, 厳密な定義はしないが, 少々雑に言って確率分布が一様分布に近づけば近づくほど, 値が大きくなるという性質である．特に, 以下の評価が成り立つ:

$$0 \leq S(\beta) \leq \log |\Omega|.$$

ここに, $|\Omega|$ は有限集合 Ω の点の個数である．最小を達成するのは, $p_j(\beta) = 1$ がある $j \in \Omega$ について成り立っていて他が全て 0 の場合, すなわち j 以外の状態はすべてエネルギーが無限大で j のみ有限の場合, 最大を達成するのは $p_j(\beta) = 1/|\Omega|$ が全ての $j \in \Omega$ について成り立つ場合, 換言すれば $E: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ が定数関数の場合である．

4 完備調和計量の拡張

4.1 より一般の劣調和ウェイト関数への拡張

各正則切断 $q \in H^0(K_X^r)$ に対し, Hermite 計量 h_q は q の零点において発散する標準束上の半正值特異 Hermite 計量 $h_q^{-1/r}$ を誘導する．[23, 24] において, この任意の標準束上の半正值特異 Hermite 計量 $e^{-\varphi} h_*$ への拡張を導入した:

$$\sqrt{-1}F_{h_j} + \text{vol}(H_{j-1}) - \text{vol}(H_j) = 0 \text{ for } j = 1, \dots, r-1. \quad (7)$$

ここに, Hitchin 方程式と同様に $\mathbb{R}_r$ 上の対角形の Hermite 計量 $h = (h_1, \dots, h_r)$ が方程式 (7) の解であって, $H_1, \dots, H_{r-1}$ は Hitchin 方程式の場合と同様に $H_j := h_j^{-1} \otimes h_{j+1}$ と各 $j = 1, \dots, r-1$ に対して定まるものである． $H_r = H_0$ は以下のように定義する:

$$\begin{aligned} H_r = H_0 &:= h_r^{-1} \otimes h_1 \otimes (e^{-\varphi} h_*)^{-r} \\ &= H_1^{-1} \otimes \dots \otimes H_{r-1}^{-1} \otimes (e^{-\varphi} h_*)^{-r}. \end{aligned}$$

劣調和ウェイト関数 φ が $\varphi = \phi_q = \frac{1}{r} \log |q|_{h_*}^2$ で与えられるとき, 方程式 (7) は巡回 Higgs 束の Hitchin 方程式 (3) に他ならない．劣調和ウェイト関数が $\varphi = \phi_{q_N} = \frac{1}{N} \log |q_N|_{h_*}^2$ となるとき, (7) は一般に X の分岐被覆上の調和計量を与える．より一般の φ は $(\phi_{q_N})_{N \in \mathbb{N}}$ の形の元で近似できることが知られているので (cf. [15]), 方程式 (7) は被覆次数無限大極限, もしくは零点の個数を無限大に増やして得られる極限であると見做せる．

4.2 2種類の自明解

Hitchin 方程式の場合と同様に, 方程式 (7) にも 2 種類の自明解が存在する. $h = (h_1, \dots, h_r)$ から $H_1, \dots, H_{r-1}$ に変数変換をすることにより, 方程式 (7) は以下のように書き換えることができる:

$$\sqrt{-1}F_{H_j} + 2\text{vol}(H_j) - \text{vol}(H_{j-1}) - \text{vol}(H_{j+1}) = 0 \text{ for } j = 1, \dots, r-1. \quad (8)$$

次が成り立つ:

- もし $e^{-\varphi}h_*$ が平坦だったとすると, $H_1 = \dots = H_{r-1} = (e^{-\varphi}h_*)^{-1}$ は方程式 (8) の解である. 特に, $e^{\varphi}h_*^{-1}$ が完備ならば, $H_1, \dots, H_{r-1}$ を逆変数変換で戻して得られる方程式 (7) の解は完備である.
- 劣調和ウェイト関数が恒等的に $-\infty$ であったとする: $\varphi = -\infty$. このとき, 方程式 (8) は Hitchin 方程式 (4) の $q = 0$ の場合と同じ方程式である. 従って, 方程式 (5) の解 H と定数 $\lambda_j = j(r-j)$ に対し, $H_j = \lambda_j H$ ($j = 1, \dots, r-1$) は方程式 (8) の解である. 特に, H が完備ならば, その解から誘導される方程式 (7) の解 $h = (h_1, \dots, h_r)$ は完備である.

4.3 完備解の存在と一意性と近似について

方程式 (7) に対する, Li-Mochizuki の完備調和計量の存在と一意性の定理の拡張に関して, 本稿執筆時点で完成していることは以下の通りである. 次の条件を考える:

(*) $e^{\varphi}h_*^{-1} \otimes H_j^{-1}$ が全ての $j = 1, \dots, r-1$ に対して有界になる.

Theorem 7 (完備解の存在, [27, 28]). φ は X が双曲的でないならば, $-\infty$ ではないと仮定する. このとき, 方程式 (7) の完備解 $h = (h_1, \dots, h_r)$ で $\det(h) = 1$ かつ条件 (*) を満たすものが存在する.

Theorem 8 (完備解の一意性, [27, 28]). 方程式 (7) の完備解で条件 (*) を満たすものは唯一つである. さらに, $e^{\varphi}h_*^{-1}$ があるコンパクト集合の外側で連続ならば, 全ての完備解は条件 (*) を満たすことを示すことができ, ゆえに完備解は唯一つしかない.

Theorem 9 (完備解の近似, [27, 28]). $(e^{-\varphi_{\epsilon}}h_*)_{\epsilon>0}$ を, 各 ϵ に対し円盤 $D_{\epsilon} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 - \epsilon\}$ の標準束上の滑らかな半正値 Hermite 計量であるか, もしくは全ての ϵ に対し $\mathbb{C}$ の標準束上の滑らかな半正値 Hermite 計量であるかどうかであるとする. 以下の単調性と収束を仮定する:

- 各 $\epsilon > \epsilon' > 0$ に対し, $\varphi_{\epsilon'} \leq \varphi_{\epsilon}$ が成り立ち, $(\varphi_{\epsilon})_{\epsilon>0}$ は劣調和ウェイト関数 φ に $\epsilon \searrow 0$ で収束する.

このとき, 対応する滑らかな完備解の族 $(h_{\epsilon} = (h_{1,\epsilon}, \dots, h_{r,\epsilon}))_{\epsilon>0}$ は, $\epsilon \searrow 0$ で φ に付随する完備解 $h = (h_1, \dots, h_r)$ で条件 (*) を満たすものに収束する.

条件 (*) を外す形で完全に一意性の定理が確立していないのは, 楕円型方程式の弱劣解に対する強 Liouville 性の定理を, 方程式 (7) に対して適用できる形で本稿執筆者が十分よく定式化できていないからである.

5 エントロピーと自由エネルギー

以下, 全て $H_1, \dots, H_r$ は Section 4.3 における有界性条件 (*) を満たす方程式 (7) の唯一つの完備解から構成されるものとする. Section 3 において説明をした有限集合上のカノニカル分布を $H_1, \dots, H_r$ に適用し, 以下の二つの関数を導入する:

Definition 10 ([25]). 各 $j = 0, 1, \dots, r-1$ と正の実数 β に対し, 関数 $p_j(r, \beta, \varphi) : X \rightarrow [0, 1]$ を以下のように定める:

$$p_j(r, \beta, \varphi)(x) := \frac{\text{vol}(H_j)^{\beta}}{\sum_{j=0}^{r-1} \text{vol}(H_j)^{\beta}}(x) \text{ for each } j = 0, \dots, r-1.$$

ここに, $\text{vol}(H_j)^{\beta} / \sum_{j=0}^{r-1} \text{vol}(H_j)^{\beta}$ はある参照計量 H_* ($\text{vol}(H_j) / \text{vol}(H_*)^{\beta} / \sum_{j=0}^{r-1} (\text{vol}(H_j) / \text{vol}(H_*)^{\beta})^{\beta}$ の値のことで, これは H_* の取り方に依らないことは明らかである. これを用いて, 以下の**エントロピー**という関数を定義する:

$$S(r, \beta, \varphi) := - \sum_{j=0}^{r-1} p_j(r, \beta, \varphi) \log p_j(r, \beta, \varphi).$$

Section 4.2 で述べた 2 種類の自明解の場合はどちらも、エントロピーは定数になることに注意する。 $e^{-\varphi}h_*$ が平坦で、 $e^{\varphi}h_*^{-1}$ が完備であるとする。このとき、 $H_0 = \cdots = H_{r-1} = e^{\varphi}h_*^{-1}$ となり、ゆえに、 $S(r, \beta, \varphi) = \log r$ が成り立つ。次に、 X が双曲 Riemann 面で $\varphi = -\infty$ が成り立つとする。このとき、Section 4.2 の記号を用いれば、

$$S(r, \beta, -\infty) = -\sum_{j=1}^{r-1} \hat{p}_{\beta,j} \log \hat{p}_{\beta,j},$$

$$\hat{p}_{\beta,j} := \frac{\lambda_j^\beta}{\sum_{k=1}^{r-1} \lambda_k^\beta}$$

が各 $j = 1, \dots, r-1$ について成立する。 $S_{r,\beta}$ で定数 $S(r, \beta, -\infty) = -\sum_{j=1}^{r-1} \hat{p}_{\beta,j} \log \hat{p}_{\beta,j}$ を表すことにする。

Definition 11 ([26]). β を正の実数、 H_* を K_X^{-1} 上の参照計量とする。以下の関数 $F(r, \beta, \varphi, H_*)$ を**自由エネルギー**と呼ぶ:

$$F(r, \beta, \varphi, H_*) := -\frac{1}{\beta} \log \left(\sum_{j=0}^{r-1} (\text{vol}(H_j) / \text{vol}(H_*))^\beta \right).$$

同じ参照計量を選んだ時、自由エネルギーの差は参照計量の取り方に依らないことに注意せよ。上述した定義では $\beta > 0$ としたが、 $\beta < 0$ の場合にも、 φ が $-\infty$ をとるところに適切に注意を払えばエントロピーと自由エネルギーをそれぞれ定義することは可能である。

6 プローブ

様々な状況で、平衡計量が非平衡計量により近似されるという過程を、Section 5 で導入したエントロピーと自由エネルギーを用いて新しい観点から研究をしたいのだが、エントロピーと自由エネルギーのどちらも、Riemann 面の標準束上の半正值特異 Hermite 計量に対して定義される関数であったので、より一般の直線束上に定義された半正值特異 Hermite 計量を、何か別の Riemann 面上の標準束上の半正值特異 Hermite 計量に引き戻す、という作業が、上述したことを行うにあたって必要になる。特に、 $\mathbb{CP}^1$ 上で起きることは、 $\mathbb{CP}^1$ に値をとる正則関数論と組み合わせて考察する必要がある。本節では、そのために新しい概念を導入する。 $L \rightarrow X$ をある Riemann 面 X 上の正則直線束とする。 Y を別の Riemann 面で、 $K_Y \rightarrow Y$ をその標準束とする。

Definition 12 (プローブ (probe), [29]). 組 (X, L) に対する**プローブ**とは、正則関数 $f: Y \rightarrow X$ とある $m, n > 0$ に対する滑らかなバンドル同型

$$f^*L^m \simeq K_Y^n$$

であって、 f^*L^m 上の全ての半正值特異 Hermite 計量を K_Y^n 上の半正值特異 Hermite 計量に移すものとする。

Example 13. X を種数 $g \geq 2$ のコンパクト Riemann 面、 $L \rightarrow X$ を次数 $d \geq 1$ の正則直線束とする。このとき、恒等写像 $\text{id}: X \rightarrow X$ と滑らかなバンドル同型 $L^{2g-2} \simeq K_X^d$ は (X, L) に対するプローブである。

Example 14. $\pi: Y \rightarrow X$ を臨界点を持たない正則全射とする。この π と、自然な同型写像 $\pi^*K_X \simeq K_Y$ は (X, K_X) に対するプローブである。

Example 15. X を Riemann 面、 $K_X \rightarrow X$ を標準束とする。 $s = (s_1, s_2)$ を K_X^d の正則切断の組で共通零点を持たないものとする。このとき自然に正則写像 $f_s: X \rightarrow \mathbb{CP}^1$ が以下のように誘導される:

$$f_s(x) := [s_1(x) : s_2(x)] \quad \text{for } x \in X.$$

$L \rightarrow \mathbb{CP}^1$ を超平面直線束とする。 f_s と自然な同型 $f_s^*L \simeq K_X^d$ は $(\mathbb{CP}^1, L)$ に対するプローブになる。

7 主定理

7.1 主定理

最初に、エントロピーと自由エネルギーに関する一般論を述べ、次にその平衡計量への帰結を述べる。紙数の都合から、[25, 26] における定理を抜粋して記載する。

Theorem 16 ([25]). $e^{-\varphi}h_*$ を $K_X \rightarrow X$ の半正值特異 Hermite 計量で, ウェイト関数 φ は恒等的に $-\infty$ ではなく, また $e^{-\varphi}h_*$ はユークリッド計量から誘導されるものでもないとする. このとき, エントロピー $S(r, \beta, \varphi)$ に対して以下の一様評価が成り立つ:

$$S_{r,\beta} \leq S(r, \beta, \varphi)(x) < \log r \quad \text{for any } x \in X. \quad (9)$$

さらに, 下からの評価において等号が成立するのは, $\varphi(x) = -\infty$ かつ $r = 2, 3$ の場合に限る.

Theorem 17 ([25]). 上述した Theorem 16 の一様評価の下界と上界に関して, 以下の漸近公式が成り立つ:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (S_{r,\beta} - \log r) = \frac{2\beta d_\beta}{c_\beta} - \log(c_\beta),$$

ここに, c_β と d_β は以下のように定義される定数である:

$$c_\beta := \int_0^1 s^\beta (1-s)^\beta ds,$$

$$d_\beta := \int_0^1 s^\beta (1-s)^\beta \log s ds.$$

Theorem 18 ([26]). $e^{-\varphi}h_*$ と $e^{-\varphi'}h_*$ を $K_X \rightarrow X$ 上の半正值特異 Hermite 計量とする. φ と φ' に対する以下の条件を考える:

- (i) 各 $x \in X$ に対し $\varphi(x) \geq \varphi'(x)$ が成立し, 少なくとも一点で $\varphi(x) > \varphi'(x)$ が成り立つ.
- (ii) 各 $x \in X$ に対し, $\sqrt{-1}\bar{\partial}\partial\varphi(x) \geq \sqrt{-1}\bar{\partial}\partial\varphi'(x)$ が成り立つ.

また, 有界性とレギュラリティについて適切な仮定を φ, φ' は満たすとする. このとき, 次が成り立つ:

- (a) φ と φ' が条件 (i) を満たし, また $r = 2, 3$ のいずれかとする. このとき, 自由エネルギーは以下を満たす:

$$0 < F(r, \beta, \varphi', H_*)(x) - F(r, \beta, \varphi, H_*)(x) \quad \text{for } x \in X.$$

- (b) φ と φ' が条件 (i), (ii) を満たすとする. このとき, 次が成り立つ:

$$0 < F(r, \beta, \varphi', H_*)(x) - F(r, \beta, \varphi, H_*)(x) < r(\varphi(x) - \varphi'(x)) \quad \text{for } x \in X.$$

Theorem 19 ([26]). $r = 2, 3$ のいずれかとする. $e^{-\varphi}h_*$ と $e^{-\varphi'}h_*$ を $K_X \rightarrow X$ 上の半正值特異 Hermite 計量とする. φ と φ' が以下を満たすとする:

- (i) 各 $x \in X$ に対し $\varphi(x) \geq \varphi'(x)$ が成立し, 少なくとも一点で $\varphi(x) > \varphi'(x)$ が成り立つ.
- (ii) 各 $x \in X$ に対し, $\sqrt{-1}\bar{\partial}\partial\varphi(x) \geq \sqrt{-1}\bar{\partial}\partial\varphi'(x)$ が成り立つ.

また, 有界性とレギュラリティについて適切な仮定を φ, φ' は満たすとする. このとき, エントロピーは次を満たす:

$$S(r, \beta, \varphi)(x) > S(r, \beta, \varphi')(x) \quad \text{for all } x \in X. \quad (10)$$

X を閉 Riemann 面, $L \rightarrow X$ を正の直線束とする. $e^{-\phi}h_*$ を $L \rightarrow X$ 上の連続な Hermite 計量, $K \subseteq X$ を非極コンパクト集合とする. φ を劣調和ウェイト関数で $\sup_K(\varphi - \phi) \leq 0$ なるものとする. このとき, 公式 (cf. [5])

$$\sup_K(\varphi - \phi) = \sup_X(\varphi - \varphi_{\text{eq}}(K, \phi)),$$

から, $\sup_X(\varphi - \varphi_{\text{eq}}(K, \phi)) \leq 0$ が成り立つ. φ が $\varphi_{\text{eq}}(K, \phi)$ とは一致しないと仮定する. また, $f: Y \rightarrow X$ を (X, L) に対するあるプローブに付随する正則写像とする. $f^*\varphi$ と $f^*\varphi_{\text{eq}}(K, \phi)$ で, $K_Y \rightarrow Y$ 上に誘導されるウェイト関数を表すものとする.

Corollary 20 ([29]). $r = 2, 3$ とする. このとき, 次が成り立つ:

$$F(r, \beta, f^*\varphi, H_*)(x) > F(r, \beta, f^*\varphi_{\text{eq}}, H_*)(x) \quad \text{for all } x \in Y.$$

さらに, $\varphi - \varphi_{\text{eq}}(K, \phi)$ が定数で $f^*\varphi_{\text{eq}}$ が $f^*\varphi$ がレギュラリティと有界性に関する適切な仮定を満たせば, 次が成り立つ:

$$F(r, \beta, f^*\varphi, H_*)(x) > F(r, \beta, f^*\varphi_{\text{eq}}(K, \phi), H_*)(x) \quad \text{for all } x \in Y.$$

Corollary 21 ([29]). $r = 2, 3$, $\varphi - \varphi_{\text{eq}}(K, \phi)$ が定数で, $f^*\varphi_{\text{eq}}$ と $f^*\varphi$ がレギュラリティと有界性に関する適切な仮定を満たすとする. このとき, 次が成り立つ:

$$S(r, \beta, f^*\varphi_{\text{eq}}(K, \phi))(x) > S(r, \beta, f^*\varphi)(x) \quad \text{for all } x \in Y.$$

「非平衡系に何らかの意味でエントロピーと自由エネルギーが定義されたとき, エントロピーは平衡に近づけば近づくほど大きく, 自由エネルギーは平衡に近づくと小さくなる」という直観と上述した系が整合していることが非常に興味深い点である. 現在, 上述した定理と系について, 曲率カレントの差に必ずしも 0 以上とは限らない誤差項を許した場合の拡張と, その Bergman 核近似への帰結を考察しており, 講演ではこのあたりのことも発表する予定である.

7.2 主定理の証明について

主定理の証明では, Dai–Li の論文 [11, 12, 13] と Li–Mochizuki の論文 [20] で開発された最大値原理やアприオリ評価の技術を拡張してエントロピーと自由エネルギーに対して適用した. 例えば, 上述した Theorem 16 の背景には, [11, 12, 20] で開発された以下の評価があった:

Theorem 22 ([11, 12, 20]). q を $K_X^r \rightarrow X$ の正則切断で, 恒等的に 0 ではなく, $h_q^{1/r}$ がユークリッド計量から定まるものと一致することはないと仮定する. このとき, 完備調和計量から誘導される Hermite 計量 $H_1, \dots, H_r$ は以下の評価を満たす:

$$\frac{\lambda_{j-1}}{\lambda_j} = \frac{(j-1)(r-j+1)}{j(r-j)} < H_{j-1} \otimes H_j^{-1} < 1 \text{ for all } 2 \leq j \leq [r/2],$$
$$H_r \otimes H_1 < 1.$$

この評価を劣調和ウェイト関数に拡張したうえで, Shannon エントロピーの Schur 凹性と組み合わせる, というのが, Theorem 16 の証明の概略である.

参考文献

- [1] G. W. Anderson, A. Guionnet, and O. Zeitouni, *An introduction to random matrices* (No. 118). Cambridge university press (2010).
- [2] D. Baraglia, *G₂ Geometry and integrable systems*, Ph.D.thesis, arXiv:1002.1767v2, 2010.
- [3] R. J. Berman, *Bergman kernels for weighted polynomials and weighted equilibrium measures of $\mathbb{C}^n$* , Indiana University mathematics journal (2009): 1921-1946.
- [4] R. J. Berman, *Bergman kernels and equilibrium measures for line bundles over projective manifolds*, American journal of mathematics, 131(5), 1485-1524 (2009).
- [5] R. Berman and S. Boucksom, *Growth of balls of holomorphic sections and energy at equilibrium*, Inventiones mathematicae 181.2 (2010): 337-394.
- [6] R. Berman, S. Boucksom, and D. W. Nyström, *Fekete points and convergence towards equilibrium measures on complex manifolds*, Acta Math. 207 (2011), no. 1, 1–27.
- [7] R. Berman, S. Boucksom, V. Guedj, and A. Zeriahi, *A variational approach to complex Monge-Ampère equations*. Publications mathématiques de l’IHÉS, 117, 179-245 (2013).
- [8] T. Bouche, *Convergence de la métrique de Fubini–Study d’un fibré linéaire positif*, Annales de l’Institut Fourier 40 (1990), 117–130.
- [9] D. Catlin, *The Bergman kernel and a theorem of Tian*, in Analysis and Geometry in Several Complex Variables, Birkhäuser, 1999.
- [10] K. Corlette, *Flat G-bundles with canonical metrics*, Journal of differential geometry 28.3 (1988): 361-382.
- [11] S. Dai and Q. Li, *Minimal surfaces for Hitchin representations*, Journal of Differential Geometry 112.1 (2019): 47-77.
- [12] S. Dai and Q. Li, *On cyclic Higgs bundles*, Math. Ann. 376 (2020), no. 3-4, 1225–1260.
- [13] S. Dai and Q. Li, *Bounded differentials on the unit disk and the associated geometry*, Transactions of the American Mathematical Society 377.08 (2024): 5445-5481.
- [14] M. A. Guest and C.-S. Lin, *Nonlinear PDE aspects of the tt^* equations of Cecotti and Vafa*, J. Reine Angew. Math. 689 (2014), 1–32.
- [15] V. Guedj and A. Zeriahi, *Degenerate complex Monge-Ampère equations*, EMS Tracts in Mathematics, vol. 26, European Mathematical Society (EMS), Zurich, 2017.

- [16] V. Guedj and A. Zeriahi, *Intrinsic capacities on compact Kähler manifolds*, The Journal of Geometric Analysis 15.4 (2005): 607-639.
- [17] N. J. Hitchin, *The self-duality equations on a Riemann surface*, Proceedings of the London Mathematical Society 3.1 (1987): 59-126.
- [18] N. J. Hitchin, *Lie groups and Teichmüller space*, Topology 31.3 (1992): 449-473.
- [19] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Statistical physics: volume 5*, Vol. 5. Elsevier, 2013.
- [20] Q. Li and T. Mochizuki, *Complete solutions of Toda equations and cyclic Higgs bundles over non-compact surfaces*, arXiv:2010.05401 (2020).
- [21] Q. Li and T. Mochizuki, *Isolated singularities of Toda equations and cyclic Higgs bundles*, arXiv:2010.06129 (2020).
- [22] A. E. Marshall, I. Olkin, and B. C. Arnold, *Inequalities: theory of majorization and its applications*, (1979): 28.
- [23] N. Miyatake, *Generalizations of Hermitian-Einstein equation of cyclic Higgs bundles, their heat equation, and inequality estimates*, preprint, arXiv:2301.01584 (2023).
- [24] N. Miyatake, *Cyclic Higgs bundles, subharmonic functions, and the Dirichlet problem*, Annals of Global Analysis and Geometry 67.1 (2025): 1-16.
- [25] N. Miyatake, *Shannon entropy for harmonic metrics on cyclic Higgs bundles*, preprint, arXiv: 2410.08571.
- [26] N. Miyatake, *Shannon entropy for harmonic metrics on cyclic Higgs bundles II*, preprint, arXiv:2508.12844.
- [27] N. Miyatake, *Complete harmonic metrics and subharmonic functions on the unit disc*, preprint, arXiv: 2508.12848.
- [28] N. Miyatake, in preparation.
- [29] N. Miyatake, in preparation.
- [30] T. Ransford, *Potential theory in the complex plane*, No. 28. Cambridge university press, 1995.
- [31] E. B. Saff and V. Totik, *Logarithmic potentials with external fields*, Vol. 316. Springer Science & Business Media, 2013.
- [32] C. E. Shannon, *A mathematical theory of communication*, The Bell system technical journal, 27(3), 379-423 (1948).
- [33] C.T. Simpson, *Constructing variations of Hodge structure using Yang-Mills theory and applications to uniformization*, J. Amer. Math. Soc. 1 (1988), no. 4, 867–918.
- [34] J. Siciak, *On some extremal functions and their applications in the theory of analytic functions of several complex variables*, Transactions of the American Mathematical Society 105.2 (1962): 322-357.
- [35] B. Shiffman and S. Zelditch, *Distribution of zeros of random and quantum chaotic sections of positive line bundles*, Communications in Mathematical Physics 200 (1999): 661-683.
- [36] B. Shiffman and S. Zelditch, *Stochastic Kähler geometry: from random zeros to random metrics*, arXiv:2303.11559 (2023).
- [37] Gang Tian, *On a set of polarized Kähler metrics on algebraic manifolds*, Journal of Differential Geometry 32 (1990), 99–130.
- [38] S. Zelditch, *Szegő kernels and a theorem of Tian*, IMRN 1998, no. 6, 317–331.

群同変調和写像の構成と分類について

高橋 正郎 (久留米工業高等専門学校)

本講演では、球面から球面、球面からグラスマン多様体、および四元数射影空間から複素グラスマン多様体への群同変調和写像の構成と分類について報告する。

調和写像は、エネルギー汎関数の臨界点として定義され、測地線、極小曲面、ケーラー多様体間の正則写像、極小部分多様体等の例を含む重要な研究対象である。しかし、調和写像の方程式は非線形になるため、一般的には、すべての解を分類することは非常に難しい。

そのため、群作用を持つ調和写像、群同変調和写像の構成や分類は興味深い問題であり、研究が行われてきた。球面 S^m から球面への $SO(m+1)$ 同変調和写像の剛性については、[1], [9] により知られている。また、[7] では、複素射影空間 $\mathbf{P}(\mathbf{C}^{m+1})$ から複素射影空間への $SU(m+1)$ 同変調和写像の剛性が証明されている。さらに、[2] には、群作用をもつ調和写像の構成方法がいくつか述べられている。

球面 S^m は、 $SO(m+1)$ 以外にも推移的に作用する $SO(m+1)$ の部分群があることが知られており、それらはすでに分類されている。しかし、これらの群に関する同変調和写像の分類は未解決であった。本研究では、グラスマン多様体への調和写像に関する理論 [5] を応用することで、これらの群に関する球面から球面への同変調和写像の分類を行うことができた [6]。さらに、特別な群作用について、球面からグラスマン多様体への群同変調和写像、四元数射影空間からグラスマン多様体への群同変調和写像の分類も得られたので報告する ([3], [4])。

本研究は古賀勇氏 (九州国際大学)、長友康行氏 (明治大学理工学部) との共同研究である。

1. 準備

以下、体 $\mathbf{K}$ は $\mathbf{R}$ または $\mathbf{C}$ を表す。 W を内積 ($\mathbf{K} = \mathbf{C}$ のときはエルミート内積) $(\cdot, \cdot)$ を持つ $\mathbf{K}$ 上の N 次元ベクトル空間とする。

多様体 M 上のベクトル束 $V \rightarrow M$ に計量 h とその計量を保つ接続 ∇ が与えられているとき、これを (V, h, ∇) と書く。必要に応じて $(V \rightarrow M, h, \nabla)$ と書く。なお、 V が複素ベクトル束のときは、計量としてエルミート計量を考える。

定義 1.1. 2つのベクトル束 (V_1, h_1, ∇^1) , (V_2, h_2, ∇^2) に対して、計量と接続を保つベクトル束としての同型写像 $\phi: V_1 \rightarrow V_2$ が存在するとき、 V_1 と V_2 は同型という。

定義 1.2. $\Gamma(V)$ でベクトル束 $V \rightarrow M$ の切断全体を表す。 $x \in M$ と $t \in \Gamma(V)$ に対し、写像

$$ev: M \times \Gamma(V) \rightarrow V, \quad (x, t) \mapsto t(x)$$

を評価写像 (evaluation map) と呼ぶ. ev を $\Gamma(V)$ の部分空間に制限したのも評価写像と呼び, ev と書く.

$Gr_p(W)$ を W 内の p 次元部分空間からなるグラスマン多様体とし, $\underline{W} \rightarrow Gr_p(W)$ で, $Gr_p(W)$ 上の自明束 $Gr_p(W) \times W \rightarrow Gr_p(W)$ を表す. $S \rightarrow Gr_p(W)$ で同語反復束を表す. さらに, $Q \rightarrow Gr_p(W)$ で普遍商束を表す. このとき, 完全系列

$$0 \rightarrow S \xrightarrow{i} \underline{W} \xrightarrow{\pi} Q \rightarrow 0$$

が存在する. W の内積から S と Q の計量 g_S, g_Q が誘導される. また, $Gr_p(W)$ の接束 $TGr_p(W)$ は $S^* \otimes Q$ と同一視されるので, $Gr_p(W)$ には Fubini-Study 型のリーマン計量 g_{Gr} が誘導される.

定義 1.3. $s \in \Gamma(S)$, $t \in \Gamma(Q)$ に対して, 接続 ∇^S, ∇^Q を

$$\nabla^S s = i^* d(i(s)), \quad \nabla^Q t = \pi^* d(\pi^*(t))$$

と定める. 第二基本形式 $H \in \Omega^1(S^* \otimes Q)$, $K \in \Omega^1(S \otimes Q^*)$ を

$$Hs = \pi^* d(i(s)), \quad Kt = i^* d(\pi^*(t))$$

と定義する.

M を m 次元リーマン多様体とし, 写像 $f: M \rightarrow Gr_p(W)$ を考える. 引き戻し束 f^*S, f^*Q のそれぞれの引き戻し計量を g_{f^*S}, g_{f^*Q} とし, 引き戻し接続を $\nabla^{f^*S}, \nabla^{f^*Q}$ とする. 第二基本形式については同じ記号 H と K を用いる.

定義 1.4. M を m 次元リーマン多様体とし, 写像 $f: M \rightarrow Gr_p(W)$ に対して, 平均曲率作用素 $A \in \Gamma(\text{End}(f^*Q))$ を

$$A := \sum_{i=1}^m H_{e_i} K_{e_i}$$

と定義する. ここで, $e_1, \dots, e_m$ は $T_x M$ の正規直交基底である.

球面への極小等長埋め込みに関する定理 [8] をグラスマン多様体への写像に拡張した定理 [5] を紹介する.

定理 1.5. 写像 $f: M \rightarrow Gr_p(W)$ に対して $W \subset \Gamma(f^*Q)$ とみなす. このとき次の 2 条件は互いに同値である.

- (1) $f: M \rightarrow Gr_p(W)$ は調和写像である.
- (2) f^*Q の自己同型 $\tilde{A}$ が存在して, 任意の $t \in W$ に対して,

$$(\Delta + \tilde{A})t = 0$$

である.

このとき, $\tilde{A}$ は平均曲率作用素 A と一致し, エネルギー密度関数は $e(f) = -\text{trace} A$ ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$ のとき), $e(f) = -2\text{trace} A$ ($\mathbf{K} = \mathbf{C}$ のとき) で与えられる.

グラスマン多様体への写像の構成法を述べる.

$V \rightarrow M$ をベクトル束とし, $W \subset \Gamma(V)$ を V の切断のなす有限次元部分空間とする.

ベクトル束の準同型 $ev : \underline{W} \rightarrow V$ が全射であるとき, ベクトル束 $V \rightarrow M$ は W によって大域的に生成されるという.

定義 1.6. $V \rightarrow M$ が W により大域的に生成されているとする. このとき写像 $f : M \rightarrow Gr_p(W)$ ($p = \dim W - \text{rank} V$) を

$$f(x) := \text{Ker } ev_x = \{t \in W \mid t(x) = 0\}$$

と定義する. この写像を (V, W) による誘導写像という. ベクトル束 V が明らかな場合には W による誘導写像ともいう.

任意の写像 $f : M \rightarrow Gr_p(W)$ は, (f^*Q, W) による誘導写像とみなすことができる.

定義 1.7. ベクトル束 $(V \rightarrow M, h, \nabla)$ を一つ固定する. 写像 $f : M \rightarrow Gr_p(W)$ に対して, $(f^*Q, g_{f^*Q}, \nabla^{f^*Q})$ と (V, h, ∇) が同型なとき, 写像 f は (V, h, ∇) に関するゲージ条件を満たすという.

グラスマン多様体 $(Gr_p(W), g_{Gr})$ はコンパクト型対称空間であり, 対応するコンパクト対称対を $(\tilde{G}, \tilde{K})$ で表す. ただし, $\tilde{G}$ は直交群または特殊ユニタリ群とする.

定義 1.8. 写像 $f_i : M \rightarrow Gr_p(W)$ ($i = 1, 2$) に対して, ある $\psi \in \tilde{G}$ があって, $f_2 = \psi \circ f_1$ を満たすとき, f_1 と f_2 は像同値であるという.

この像同値性により, $f \cong -f$ となるので, 写像 $S^m \rightarrow S^N$ を実射影空間 $\mathbf{P}(\mathbf{R}^{N+1})$ への写像として考える.

定義 1.9. $f : M \rightarrow Gr_p(W)$ に対して誘導される線形写像 $F : W \rightarrow \Gamma(f^*Q)$ が単射であるとき, 写像 f は充満であるという.

写像 f が充満でないとき, $\text{Ker } F$ の W における直交補空間 W' をとると, f は $Gr_{p-r}(W')$ への写像とみなすことができる. ここで, $r = \dim \text{Ker } F$ である. そのため, この定義は終域が球面や複素射影空間の場合には, 古典的な意味での充満性と一致する.

定義 1.10. ベクトル束 $(V \rightarrow M, h, \nabla)$ を考える. $W \subset \Gamma(V)$ は切断全体の空間の有限次元部分空間とし, W には L^2 内積を与える. このとき, (V, W) による誘導写像 $f_0 : M \rightarrow Gr_p(W)$ を標準写像という. ただし, $p = \dim W - \text{rank} V$ である.

簡約型リーマン等質空間 G/K を考える. $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}$ をそれぞれ G, K のリー代数とし, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$ を K 不変分解とする.

定義 1.11.

- 各点 $g \in G$ において, $\mathfrak{m}$ の左移動による像 $L_g \mathfrak{m}$ を水平部分空間として定めることで, 主束 $G \rightarrow G/K$ に接続が定義される. これを標準接続という.

- K の表現空間 V_0 を用いて, $V = G \times_K V_0$ で定まる主束 $G \rightarrow G/K$ に同伴したベクトル束を等質ベクトル束という. このとき, V には G が作用する. また, 標準接続から誘導された等質ベクトル束の共変微分も標準接続と呼ぶ.
- 等質空間から等質空間への写像 $f : G/K \rightarrow G'/K'$ に対して, G から G' への準同型写像 $\varphi : G \rightarrow G'$ が存在し, 任意の $g \in G$, $x \in G/K$ に対して, $\varphi(g)f(x) = f(gx)$ が成り立つとき, 写像 f を G 同変写像という.
- 主束 $G \rightarrow G/K$ に同伴した 2 つの等質ベクトル束 (V_1, g_1, ∇^1) , (V_2, g_2, ∇^2) を考える. 任意の $g \in G$ に対して, 計量と接続を保つ G 同変同型写像 $\phi : V_1 \rightarrow V_2$ が存在するとき, V_1 と V_2 は等質ベクトル束として同型であるという.

S , Q は $\tilde{G}$ に関する等質ベクトル束であり, g_S , g_Q は $\tilde{G}$ 不変計量で, ∇^S , ∇^Q は標準接続と一致する.

2. 球面から球面の群同変調和写像

単位球面は, 次のような等質空間 G/K としての表示を持つことが知られている.

- $S^m = \mathrm{SO}(m+1)/\mathrm{SO}(m) = \mathrm{Spin}(m+1)/\mathrm{Spin}(m)$
- $S^{2m+1} = \mathrm{SU}(m+1)/\mathrm{SU}(m) = \mathrm{U}(m+1)/\mathrm{U}(m)$
- $S^{4m+3} = \mathrm{Sp}(m+1)/\mathrm{Sp}(m) = \mathrm{Sp}(m+1) \times \mathrm{U}(1)/\mathrm{Sp}(m) \times \mathrm{U}(1)$
 $= \mathrm{Sp}(m+1) \times \mathrm{Sp}(1)/\mathrm{Sp}(m) \times \mathrm{Sp}(1)$
- $S^6 = G_2/\mathrm{SU}(3)$
- $S^7 = \mathrm{Spin}(7)/G_2$
- $S^{15} = \mathrm{Spin}(9)/\mathrm{Spin}(7)$

この節では, G を $\mathrm{SU}(m+1)$, $\mathrm{U}(m+1)$, $\mathrm{Sp}(m+1)$, $\mathrm{Sp}(m) \times \mathrm{U}(1)$, $\mathrm{Sp}(m) \times \mathrm{Sp}(1)$, G_2 , $\mathrm{Spin}(7)$, $\mathrm{Spin}(9)$ のいずれかとし, 球面 G/K から球面への群同変調和写像について得られた結果を述べる [6].

$\mathcal{H}^k$ を球面 S^m 上の複素数値関数に作用するラプラス作用素の固有値 $k(k+m-1)$ の固有空間とする. $\mathcal{H}^k$ は $\mathrm{SO}(m+1)$ 表現空間で, $\mathrm{SO}(m+1)$ 不変な実部分空間 $\mathcal{H}_{\mathbf{R}}^k$ をもつ. $\mathcal{H}_{\mathbf{R}}^k$ はラプラス作用素の実数値関数からなる固有空間になる.

また, $\mathcal{H}_{\mathbf{R}}^k$ の L^2 内積により, $\mathcal{H}_{\mathbf{R}}^k$ と $\mathcal{H}_{\mathbf{R}}^{k*}$ を同一視する.

f がエネルギー密度関数一定な調和写像ならば, $f : S^m \rightarrow \mathbf{P}(\mathbf{R}^{N+1})$ に対して, 高橋恒郎の定理 [8] から, ある k が存在して, $\mathbf{R}^{N+1} \subset \mathcal{H}_{\mathbf{R}}^k$ となることがわかる. このとき, 写像 f を次数 k の調和写像という.

v_0 を $\mathrm{SO}(m)$ 不変な $\mathcal{H}_{\mathbf{R}}^k$ の単位ベクトルとする. このとき, $\mathcal{H}_{\mathbf{R}}^k$ による標準写像 $f_k : S^m \rightarrow \mathbf{P}(\mathcal{H}_{\mathbf{R}}^k)$ は

$$f_k([g]) = g\mathbf{R}v_0, \quad g \in \mathrm{SO}(m+1)$$

と表される.

G 同変な充満調和写像のモジュライ空間は以下のように記述できる.

定理 2.1. $f : S^m = G/K \rightarrow \mathbf{P}(\mathbf{R}^{N+1})$ を次数 k の G 同変充満調和写像とする. すると, $N+1 \leq \dim \mathcal{H}_{\mathbf{R}}^k$ である.

$\mathcal{M}_k^G$ で G/K から $\mathbf{P}(\mathcal{H}_{\mathbf{R}}^k)$ への次数 k の G 同変な充満調和写像の像同値によるモジュライ空間を表す. $\mathcal{M}_k^G$ は次の集合と同一視される.

$$\left\{ T \in \text{Sym}_G(\mathcal{H}_{\mathbf{R}}^k) \mid T > 0, (Tv_0, Tv_0) = 1 \right\}$$

$\mathcal{M}_k^G$ には $\text{End } \mathcal{H}_{\mathbf{R}}^k$ の L^2 内積から位相をいれる. $\mathcal{M}_k^G$ の閉包を $\overline{\mathcal{M}_k^G}$ とすれば,

$$\overline{\mathcal{M}_k^G} = \left\{ T \in \text{Sym}_G(\mathcal{H}_{\mathbf{R}}^k) \mid T \geq 0, (Tv_0, Tv_0) = 1 \right\}$$

となる. このとき, T に対応する f は

$$f([g]) = Tg\mathbf{R}v_0$$

である.

例を挙げる. 双次数 (p, q) の調和多項式の集合を $\mathcal{H}^{p,q}$ と表す. $G = \text{SU}(2)$ とする. $\mathcal{H}^k$ の $\text{SU}(2)$ 既約分解は $\mathcal{H}^k = \bigoplus_{p+q=k} \mathcal{H}^{p,q}$ となり, $\mathcal{H}^{p,q}$ と $\mathcal{H}^{p',q'}$ は $p+q = p'+q'$ のとき同値な表現である. 対応する実表現 $\mathcal{H}_{\mathbf{R}}^k$ の既約分解に応じて, $k = 2l$ のとき,

$$T = \left(\begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\ 2l+1} \\ \hline a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\ 2l+1} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline a_{l1} & a_{l2} & \cdots & a_{l\ 2l+1} \end{array} \right)$$

と表される. ここで, a_{ij} は $a_{ij} = a_{ji}$ を満たす実数で, $a_{ij} = a_{ij} \text{Id}_{\mathcal{H}_{\mathbf{R}}^{p,q}}$ を表す. また, $k = 2l+1$ のときは $\mathcal{H}^{p,q}$ は四元数構造 I, J, K を持ち, $\mathcal{H}^{p,q}$ を実表現空間とみなすと

$$T = \left(\begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1\ l+1} \\ \hline A_{21} & a_{22} & \cdots & A_{2\ l+1} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline A_{l1} & A_{l2} & \cdots & a_{l\ l+1} \end{array} \right)$$

と表される. ここで, a_{ii} は $a_{ii} \text{Id}_{\mathcal{H}^{p,q}}$ を表し,

$$A_{ij} = a_{ij} \text{Id}_{\mathcal{H}^{p,q}} + b_{ij}I + c_{ij}J + d_{ij}K, \quad a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij} \in \mathbf{R}, \quad A_{ji} = A_{ij}.$$

である.

しかし, $G = \text{U}(2)$ の場合は既約表現 $\mathcal{H}^{p,q}$ はどの異なる 2 つも同値でない. この場合には次の系を適用できる.

系 2.2. 定理 2.1 の仮定に加えて, $\mathcal{H}_{\mathbf{R}}^k$ の G 既約分解

$$\mathcal{H}_{\mathbf{R}}^k = \bigoplus_{i=0}^l W_i$$

において $i \neq j$ ならば W_i と W_j は G 表現空間として同値でないとする. このとき, $\overline{\mathcal{M}_k^G}$ はつぎと同一視できる.

$$\left\{ (x_0, x_1, \dots, x_l) \in \mathbf{R}^l \mid x_j \geq 0, \sum_{i=0}^l (\dim W_i) x_i^2 = \dim \mathcal{H}_{\mathbf{R}}^k \right\}$$

このとき、定理 2.1 の T は

$$(2.1) \quad T = \left(\begin{array}{c|c|c|c} x_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & x_1 & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \cdots & x_l \end{array} \right)$$

と表される．ここで、 x_i は実数で、 $x_i \text{Id}_{W_i}$ を表す．

$G = \text{SU}(m+2), \text{U}(m+1), \text{Sp}(m+1) \times \text{U}(1), \text{Sp}(m+1) \times \text{Sp}(1)$ ($m \geq 1$), $\text{Spin}(9)$ のときはこの系が適用可能である．

このことから、モジュライ空間の次元が求まる．

定理 2.3. (1) $G = \text{SU}(2)$ のとき、

$$\dim \mathcal{M}_{2l}^G = \dim \mathcal{M}_{2l+1}^G = l(2l+3)$$

(2) $G = \text{SU}(m+2), \text{U}(m+1), \text{Sp}(m+1) \times \text{Sp}(1)$ ($m \geq 1$), $\text{Spin}(9)$ のとき、

$$\dim \mathcal{M}_{2l}^G = \dim \mathcal{M}_{2l+1}^G = l$$

(3) $G = \text{Sp}(m+1)$ のとき、

$$\dim \mathcal{M}_{2l}^G = \dim \mathcal{M}_{2l+1}^G = \frac{l}{6}(4l^2 + 15l + 17)$$

(4) $G = \text{Sp}(m+1) \times \text{U}(1)$ のとき、

$$\dim \mathcal{M}_{2l}^G = \dim \mathcal{M}_{2l+1}^G = \frac{l}{2}(l+3)$$

$\mathcal{H}_{\mathbf{R}}^k$ は $\text{SO}(m+1), \text{Spin}(m+1)$ 既約であるので、 $\text{SO}(m+1), \text{Spin}(m+1)$ 同変調和写像は標準写像と像同値になる ([1],[9])． $G = G_2, \text{Spin}(7)$ のときも $\mathcal{H}_{\mathbf{R}}^k$ は G 既約であるので、同様の結果を得る．

定理 2.4. $G_2/\text{SU}(3), \text{Spin}(7)/G_2$ のとき、 G 同変調和写像は標準写像と像同値である．

$\mathcal{H}^k$ の $\text{SU}(m+2)$ 既約分解は、 m によらず $\mathcal{H}^k = \bigoplus_{p+q=k} \mathcal{H}^{p,q}$ となる． $m \geq 1$ のとき、 T は (2.1) と表されることから、次の一致の定理を得る．

任意の $\mathbf{C}^3 \subset \mathbf{C}^{m+1}$ に対して、 $\text{SU}(m+2)$ の部分群 $\text{SU}(3)$ がただ一つ決まる．この $\text{SU}(3)$ は $S^{2m+1} \cap \mathbf{C}^3$ として得られる S^{2m+1} の全測地的部分多様体 S^5 に作用する．

定理 2.5. $\text{SU}(m+2)$ 同変調和写像 $f : S^{2m+3} \rightarrow S^N$ ($m \geq 1$) を上記の S^5 に制限した写像 $f|_{S^5}$ は $\text{SU}(3)$ 同変調和写像である．

また、 $\text{SU}(3)$ 同変調和写像は一意的に $\text{SU}(m+2)$ 同変調和写像 $f : S^{2m+3} \rightarrow S^N$ に拡張される．

さらに、充満な $\text{SU}(m+2)$ 同変調和写像 $f_i : S^{2m+3} \rightarrow S^N$ ($i = 1, 2$) に対して、 f_1 と f_2 が像同値となるための必要十分条件は、 $f_1|_{S^5}$ と $f_2|_{S^5}$ が像同値となることである．

同様の一致の定理が $G = \mathrm{U}(m+1)$, $(m \geq 1)$ のときも成り立つ。

$\mathbf{H}$ を四元数体とする。任意の $\mathbf{H}^2 \subset \mathbf{H}^{m+1}$ に対して, $\mathrm{Sp}(m+1)$ の部分群 $\mathrm{Sp}(2)$ がただ一つ決まる。この $\mathrm{Sp}(2)$ は $S^{4m+3} \cap \mathbf{H}^2$ として得られる S^{4m+3} の全測地的部分多様体 S^7 に作用する。

定理 2.6. $\mathrm{Sp}(m+1)$ 同変調和写像 $f : S^{4m+3} \rightarrow S^N$ ($m \geq 1$) を上記の S^7 に制限した写像 $f|_{S^7}$ は $\mathrm{Sp}(2)$ 同変調和写像である。

また, $\mathrm{Sp}(2)$ 同変調和写像は一意的に $\mathrm{Sp}(m+1)$ 同変調和写像 $f : S^{4m+3} \rightarrow S^N$ に拡張される。

さらに, 充満な $\mathrm{Sp}(m+1)$ 同変調和写像 $f_i : S^{4m+3} \rightarrow S^N$ ($i = 1, 2$) に対して, f_1 と f_2 が像同値となるための必要十分条件は, $f_1|_{S^7}$ と $f_2|_{S^7}$ が像同値となることである。

同様の一致の定理が $G = \mathrm{Sp}(m+1) \times \mathrm{U}(1)$, $\mathrm{Sp}(m+1) \times \mathrm{Sp}(1)$ のときも成り立つ。

3. 球面からグラスマン多様体への群同変調和写像

この節では, (G, K) を $(\mathrm{SO}(m+1), \mathrm{SO}(m))$, $(\mathrm{Spin}(m+1), \mathrm{Spin}(m))$, $(\mathrm{Spin}(7), G_2)$ または $(G_2, \mathrm{SU}(3))$ とする。このとき, 前節で見たように球面から球面への同変調和写像は標準写像に像同値である。この結果を終域がグラスマン多様体の場合に拡張する。

評価写像 $ev : S^m \times \mathcal{H}^k \rightarrow \underline{\mathbf{C}}$ または $ev : S^m \times \mathcal{H}_{\mathbf{R}}^k \rightarrow \underline{\mathbf{R}}$ が計量を保つように $\mathcal{H}^k$, $\mathcal{H}_{\mathbf{R}}^k$ に L^2 内積を定める。 $(\underline{\mathbf{R}}, \mathcal{H}_{\mathbf{R}}^k)$ による標準写像 $f_k : S^m \rightarrow \mathbf{P}(\mathcal{H}_{\mathbf{R}}^k)$ は [1] により調和写像であり, 定義から G 同変である。同様に $(\underline{\mathbf{C}}, \mathcal{H}^k)$ による複素射影空間 $\mathbf{P}(\mathcal{H}^{k*})$ への標準写像も f_k とすると, 次の定理が成り立つ。

定理 3.1. $(\underline{\mathbf{C}}, \mathcal{H}^k)$ による標準写像

$$f_k : S^m \rightarrow \mathbf{P}(\mathcal{H}^{k*})$$

は調和かつ全実な写像であり, G 同変である。

定義 3.2. 直積ベクトル束 $\underline{\mathbf{K}}^r = S^m \times \mathbf{K}^r$ を考える。 G の $\underline{\mathbf{K}}^r$ への作用

$$g(x, v) = (gx, v) \quad g \in G, x \in S^m, v \in \mathbf{K}^r$$

を直積束 $\underline{\mathbf{K}}^r$ への標準的な作用という。

W を直交直和 $\oplus_{i=1}^r \mathcal{H}_{\mathbf{R}}^{k_i}$ または $\oplus_{i=1}^r \mathcal{H}^{k_i}$ とする。 $(\underline{\mathbf{K}}^r, W)$ から誘導される写像は

$$f_0 = f_{k_1} \times \cdots \times f_{k_r} : S^m \longrightarrow \prod_{i=1}^r \mathbf{P}(\mathcal{H}_{\mathbf{R}}^{k_i*}) \subset Gr_{\dim W - r}(W)$$

または

$$f_0 = f_{k_1} \times \cdots \times f_{k_r} : S^m \longrightarrow \prod_{i=1}^r \mathbf{P}(\mathcal{H}^{k_i*}) \subset Gr_{\dim W - r}(W)$$

となり, 定理 1.5 から G 同変な調和写像である。これらを, それぞれ, $\oplus_{i=1}^r \mathcal{H}_{\mathbf{R}}^{k_i}$ または $\oplus_{i=1}^r \mathcal{H}^{k_i}$ による標準写像と呼ぶことにする。

定理 3.3. $f : S^m \rightarrow Gr_p(\mathbf{R}^{p+q})$ を充満な G 同変調和写像とする. $q < m$ ならば, f は $\oplus_{i=1}^q \mathcal{H}_{\mathbf{R}}^{k_i}$ による標準写像と像同値である.

定理 3.4. $f : S^m \rightarrow Gr_p(\mathbf{C}^{p+q})$ を充満な G 同変調和写像とする. q が以下の不等式をみたすとき, f は自明束 $\oplus_{i=1}^q \mathcal{H}^{k_i}$ による標準写像と像同値である.

- (1) $G = \mathrm{SO}(m+1)$, $\mathrm{Spin}(7)$ ($m = 7$) または $\mathrm{Spin}(m+1)$ ($m \geq 7$) のとき, $q < m$.
- (2) $G = G_2$ ($m = 6$) のとき, $q < 3$.
- (3) $G = \mathrm{Spin}(m+1)$ とする. $m = 3, 4$ のとき $q < 2$, $m = 5, 6$ のとき $q < 4$.

定理 3.3 と定理 3.4 における q の不等式を等号にすると, 定理の標準写像とは異なる G 同変写像が存在する. ここで, G 同変写像として異なるとは, G 同変写像の終域における G 作用が異なることを意味する. 等質ベクトル束として同型でない等質ベクトル束とその切断の空間からは, 異なる G 同変写像が誘導される.

q の条件が最良であることは, 次の定理 3.5 と表 1, 2 から得られる.

定理 3.5. V_0 を K の表現空間とし, $V = G \times_K V_0$ とする. $\Gamma(V)$ に $V \rightarrow S^m$ への G 作用から誘導される G 作用を考える. $W \subset \Gamma(V)$ は重複度 1 の部分表現であり, かつ V を大域的に生成するとする. このとき, (V, W) による誘導写像は調和写像である.

以下の表 1, 2 の V_0 の同伴ベクトル束とその切断の空間 W から誘導される写像は定理 3.5 より G 同変調和写像である. つまり, 定理 3.3, 3.4 の q に関する不等式が最良となることを示すことができる. ここで, $\mathbb{S}_k$ ($\mathbb{S}_k^\pm$) は $\mathrm{Spin}(k)$ の (半) スピン表現を表す. 表の V_0 の同伴ベクトル束の中には自明束と同型なものもあるが, その G 作用は標準的な作用ではない.

表 1 : $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ のとき

G	K	V_0	W
$\mathrm{SO}(m+1)$	$\mathrm{SO}(m)$	$\mathbf{R}^m$	$\mathfrak{g}$
$\mathrm{Spin}(m+1)$	$\mathrm{Spin}(m)$	$\mathbf{R}^m$	$\mathfrak{g}$
G_2	$\mathrm{SU}(3)$	$\mathbf{R}^6$	$\mathfrak{g}$
$\mathrm{Spin}(7)$	G_2	$\mathbf{R}^7$	$\mathfrak{g}$

表 2 : $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ のとき

G	K	V_0	W
$\mathrm{SO}(m+1)$	$\mathrm{SO}(m)$	$\mathbf{C}^m$	$\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$
$\mathrm{Spin}(7)$	G_2	$\mathbf{C}^7$	$\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$
G_2	$\mathrm{SU}(3)$	$\mathbf{C}^3$	$\mathbf{C}^7$
$\mathrm{Spin}(4)$	$\mathrm{Spin}(3)$	$\mathbb{S}_3$	$\mathbb{S}_4^+ \oplus \mathbb{S}_4^-$
$\mathrm{Spin}(5)$	$\mathrm{Spin}(4)$	$\mathbb{S}_4^\pm$	$\mathbb{S}^5$
$\mathrm{Spin}(6)$	$\mathrm{Spin}(5)$	$\mathbb{S}_5$	$\mathbb{S}_5^+ \oplus \mathbb{S}_5^-$
$\mathrm{Spin}(7)$	$\mathrm{Spin}(6)$	$\mathbb{S}_6^\pm$	$\mathbb{S}^7$
$\mathrm{Spin}(m+1)$	$\mathrm{Spin}(m)$	$\mathbf{C}^m$	$\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$

4. 四元数射影空間からグラスマン多様体への $\mathrm{Sp}(m+1)$ 同変調和写像

この節では [4] の結果, 四元数射影空間 $\mathbf{H}P^m$ からグラスマン多様体への $\mathrm{Sp}(m+1)$ 同変調和写像の分類, 剛性定理を述べる.

$\mathbf{H}P^m$ を $\mathrm{Sp}(m+1)/\mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(m)$ と表し, ベクトル束 $\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}P^m$ を $\mathbf{H} = \mathrm{Sp}(m+1) \times_{\mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(m)} \mathbf{C}^2$ と定義する. ただし, $\mathbf{C}^2$ は $\mathrm{Sp}(1)$ の標準表現である. また, $\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}P^m$ の k 次対称積束を $S^k \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}P^m$ と表す.

ϖ_i をリー代数 $\mathfrak{sp}(m+1)$ の基本ウェイトとし, $F_{m+1}(\varpi)$ を支配的整ウェイト ϖ を最高ウェイトとする $\mathrm{Sp}(m+1)$ の既約ユニタリ表現とする. 特に $F_{m+1}(k\varpi_1 + l\varpi_2)$ を $F(k, l)$ と略記する.

補題 4.1. $S^k \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}P^m$ の切断の空間 $\Gamma(S^k \mathbf{H})$ の, 標準接続から与えられるラプラス作用素の固有空間による分解は

$$\Gamma(S^k \mathbf{H}) = \bigoplus_{l=0}^{\infty} F(k, l)$$

となる. ここで $F(k, l)$ は固有値 $2\{mk + l(k + l + 2m + 1)\}$ に対する固有空間である. 各固有空間は既約表現空間で, どの異なる 2 つも互いに同値でない.

$\Gamma(S^k \mathbf{H})$ の L^2 内積を $F(k, l)$ に制限して $\mathrm{Sp}(m+1)$ 不変内積を与える. $f_i : \mathbf{H}P^m \rightarrow Gr_{p_i}(F(k_i, l_i))$ を $(S^{k_i} \mathbf{H}, F(k_i, l_i))$ ($i = 1, 2, \dots, r$) による標準写像とする. $W = \bigoplus_{i=1}^r F(k_i, l_i)$ として標準写像の直和

$$f_0 = f_1 \times \dots \times f_r : G/K \rightarrow \prod_{i=1}^r Gr_{p_i}(F(k_i, l_i)) \subset Gr_p(W)$$

を $\bigoplus_{i=1}^r (S^{k_i} \mathbf{H}, F(k_i, l_i))$ による標準写像という.

定理 4.2. $V \rightarrow \mathbf{H}P^m$ を $\mathrm{rank} V < 2m$ の複素ベクトル束とする. V が等質ベクトル束ならば,

$$V = \bigoplus_{i=1}^r S^{k_i} \mathbf{H}$$

であり, 不変接続は標準接続に限る.

定理 4.3. $f : \mathbf{H}P^m \rightarrow Gr_p(\mathbf{C}^{p+q})$ ($q < 2m$) を充満な $\mathrm{Sp}(m+1)$ 同変調和写像とする. このとき, f は $\bigoplus_{i=1}^r (S^{k_i} \mathbf{H}, F(k_i, l_i))$ による標準写像となる.

f による普遍商束の引き戻しは等質ベクトル束であり, 誘導接続は不変接続である. したがって定理 4.2 より, $f^*Q = \bigoplus_{i=1}^r S^{k_i} \mathbf{H}$ であり, 誘導接続は標準接続である. このことと補題 4.1, 定理 1.5 より定理が示される.

定理 4.4. $f : \mathbf{H}P^m \rightarrow Gr_p(\mathbf{C}^{p+k+1})$ を $(S^k \mathbf{H}, F(k, l))$ による標準写像とする.

k が奇数であるとき, p は偶数であり, f の像は $Gr_p(\mathbf{C}^{p+k+1})$ の全測地的部分多様体である四元数グラスマン多様体 $Gr_{\frac{p}{2}}(\mathbf{H}^{\frac{p+k+1}{2}})$ に含まれる.

k が偶数であるとき, f の像は $Gr_p(\mathbf{C}^{p+k+1})$ の全測地的部分多様体である実グラスマン多様体 $Gr_p(\mathbf{R}^{p+k+1})$ に含まれる.

そこで, $Gr_p(\mathbf{R}^{p+q})$ や $Gr_p(\mathbf{H}^{p+q})$ への同変調和写像を考える.

k が偶数であるとき, $S^k\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}P^m$ は実構造を持つ. 実構造不変な $S^k\mathbf{H}$ の実部分束を $S^k\mathbf{H}_{\mathbf{R}} \rightarrow \mathbf{H}P^m$ と表す. $\Gamma(S^k\mathbf{H})$ にも実構造が誘導され, $F(k, l)$ の実構造不変な実表現空間を $F(k, l)_{\mathbf{R}}$ とする.

以下の定理では, k_i は偶数を表し, k'_j は奇数を表すものとする.

定理 4.5. $f : \mathbf{H}P^m \rightarrow Gr_p(\mathbf{R}^{p+q})$ ($q < 4m$) を充満な $\mathrm{Sp}(m+1)$ 同変調和写像とする. このとき, f は

$$\oplus_{i=1}^r (S^{k_i}\mathbf{H}_{\mathbf{R}}, F(k_i, l_i)_{\mathbf{R}}) \oplus \oplus_{j=1}^{r'} (S^{k'_j}\mathbf{H}, F(k'_j, l'_j))$$

による標準写像となる. ただし, $S^{k'_j}\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}P^m$ は実ベクトル束とみなされている.

定理 4.6. $f : \mathbf{H}P^m \rightarrow Gr_p(\mathbf{H}^{p+q})$ ($q < m$) を充満な $\mathrm{Sp}(m+1)$ 同変調和写像とする. このとき, f は

$$\oplus_{i=1}^r (S^{k_i}\mathbf{H}, F(k_i, l_i))^{\oplus 2} \oplus \oplus_{j=1}^{r'} (S^{k'_j}\mathbf{H}, F(k'_j, l'_j))$$

による標準写像となる. ただし, $S^{k_i}\mathbf{H} \oplus S^{k_i}\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}P^m$ には $\mathrm{Sp}(m+1)$ 不変四元数構造を導入し, $F(k_i, l_i) \oplus F(k_i, l_i)$ を四元数ベクトル空間とみなしている.

REFERENCES

- [1] M.P.do Carmo, N.R.Wallach, Minimal immersions of spheres into spheres, Ann. of Math.(2) **93** (1971), 43–62.
- [2] J.Eells, A.Ratto, Harmonic Maps and Minimal Immersions with Symmetries, Ann. of Math. Stud. **130**, Princeton University Press, Princeton, 1993.
- [3] I.Koga, Y.Nagatomo, M.Takahashi, Rigidity of Equivariant Harmonic Maps from the Sphere into Grassmannians, Differential Geom. Appl. **104** (2026), <https://doi.org/10.1016/j.difgeo.2026.102403>.
- [4] I.Koga, Y.Nagatomo, M.Takahashi, Equivariant harmonic maps of the quaternionic projective spaces into Grassmannians, to appear in Illinois J. Math.
- [5] Y.Nagatomo, Harmonic maps into Grassmann manifolds. J. Math. Soc. Japan **77** (2025), no. 3, 629–707.
- [6] Y.Nagatomo, I.Koga, M.Takahashi, Identity theorems for equivariant harmonic maps between spheres, Manuscripta Math. **177** (2026), no. 1, <https://doi.org/10.1007/s00229-025-01685-0>.
- [7] Y.Ohnita, Homogeneous Harmonic Maps into Complex Projective Spaces, Tokyo J. Math. **13** (1990), no.1, 87–116.
- [8] T.Takahashi, Minimal immersions of Riemannian manifolds. J. Math. Soc. Japan **18** (1966), 380–385.
- [9] G.Toth, G.D’ambra, Parameter spaces for harmonic maps of constant energy density into spheres, Geom. Dedicata. **17** (1984), no.1, 61–67.

Principal twistor models and asymptotic hyperkähler metrics

幸谷 亮汰 (東京科学大学 D3)

概要

本講演ではまず、漸近挙動を持つ代数的超ケーラー計量とツイスター空間の背景を概観し、主ツイスターモデル (PTM) と呼ばれる複素多様体を導入する。続いて、PTM の普遍性に関する主定理と、その系であるモジュライ空間への応用を紹介する。主定理において示される普遍性の内容は以下の通りである。錐的シンプレクティック多様体 X がクレパント解消 Y を持つとする。このとき、 X の非特異集合上の超ケーラー錐計量 g_0 に漸近する Y 上の任意の代数的超ケーラー計量 g に対して、それと対応するツイスター空間は PTM を切り出すことによって一意に復元される。講演の後半では、普遍ポアソン変形の理論に基づき PTM を構成し、その普遍性の証明について解説する。本講演は arXiv:2603.03923[1] に基づく。

1 漸近的超ケーラー計量とツイスター空間の背景

漸近的超ケーラー計量は数学や物理の様々な分野 (モジュライ空間、表現論、代数幾何学など) を横断して自然に現れる対象である。まず、本稿で考察の対象とする多様体の設定を紹介する：

設定 1.1. (X, ω_X) を錐的シンプレクティック多様体 (conical symplectic variety) とする。すなわち、 X は良い $\mathbb{C}^*$ -作用 λ_X と正則シンプレクティック形式 ω_X を持つアフィン多様体である。($\mathbb{C}^*$ -作用 λ_X は X の座標環を正に添え字づけ、 ω_X に正の重みで作用する。) また、 X は (射影的) クレパント解消 $f: Y \rightarrow X$ を持つと仮定する。(すなわち、 f は $K_Y = f^*K_X \cong \mathcal{O}_Y$ を満たす特異点解消である。)

1.1 漸近的超ケーラー計量 (Asymptotic hyperkähler metric)

次に、本稿で考察の対象とする漸近的超ケーラー計量の定義を紹介する。

定義 1.2. X の非特異集合 X_{reg} 上の (代数的な) 超ケーラー錐計量 g_0 を固定する。(ここで、錐計量とは $r^*g_0 = r^2g_0$ を満たす計量のことである。) このとき、 Y 上の (代数的な) 超ケーラー計量 g が無限遠において g_0 に漸近するとは、任意の $x \in X_{\text{reg}} \subset Y$ に対して以下が成り立つときにいう：

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|g - g_0\|_{g_0(r \cdot x)} = 0.$$

(注：超ケーラー計量が代数的であることの定義は後述の注意 1.4 で紹介する。)

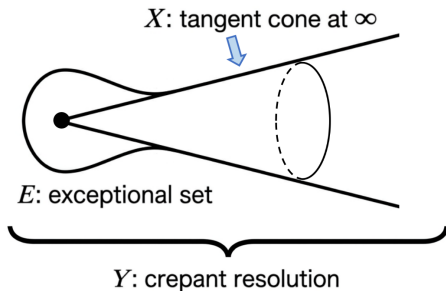


図 1: 漸近的超ケーラー計量の概念図：非特異集合 X_{reg} を自然に Y の部分集合とみなし、超ケーラー計量 g, g_0 を X_{reg} 上で比較する。超ケーラー多様体 (Y, g) の“無限遠での接錐”は (X, g_0) となる。

具体例： (代数的な) 漸近的超ケーラー計量の例を挙げる。

- **ALE 重力インスタントン**： 無限遠において、クライン特異点を持つ商空間 $X = \mathbb{C}^2/\Gamma$, ($\Gamma < SU(2)$) 上の自然な平坦計量に漸近する計量である。
- **QALE 超ケーラー計量***： ALE の高次元版の計量であり、 $X = \mathbb{C}^{2n}/G$, ($G < Sp(n)$) である。(* 計量が代数的であることを仮定する。)
- **中島箴多様体、トーリック超ケーラー多様体****： 超ケーラー商により構成される計量である。(** モーメント写像に関するある仮定が必要である。)

非例： 以下の例は、本稿の意味での漸近挙動を持たない例である。

- **ALF 重力インスタントン**： 計量が代数的でない例である。
- **ALG, ALH 重力インスタントン**： 接錐がアフィン多様体とならない例である。

1.2 ツイスター空間 (Twistor Spaces)

(代数的な) 超ケーラー計量を代数幾何的に捉える枠組みがツイスター空間である。

定義 1.3 (ツイスター空間). Z を $(2n+1)$ 次元複素多様体とする。以下の (T1)~(T4) を満たす組 $(Z, \tau, \omega, \{\ell_x\})$ を**ツイスター空間**と呼ぶ。

- (T1) 正則ファイブレーション $\pi: Z \rightarrow \mathbb{P}^1$ 構造を持つ。(すなわち、 π は全射正則沈め込みである。)
- (T2) 実構造 $\tau: Z \rightarrow \bar{Z}$ (反正則対合)。これは底空間 $\mathbb{P}^1$ 上に *antipodal map* $\sigma_{ap}: u \mapsto -1/\bar{u}$ を誘導する。
- (T3) 相対正則シンプレクティック 2 形式 $\omega \in \Gamma(Z, \wedge^2 T_\pi^* \otimes \pi^* \mathcal{O}(2))$ 。これは $\tau^* \omega = \bar{\omega}$ を満たす。
- (T4) 実 $4n$ 次元多様体 M によってパラメトライズされる**ツイスター直線**の族 $\{\ell_x\}_{x \in M}$ を持つ。
すなわち各 ℓ_x は実切断 ($\tau \circ \ell_x = \ell_x \circ \sigma_{ap}$) であり、その法束は $N_{\ell_x/Z} \cong \mathcal{O}(1)^{\oplus 2n}$ を満たす。

一般に、与えられた空間に対して条件 (T4) のツイスター直線の存在を直接チェックすることは困難である。このため、本研究では (T4) を忘却し、(T1)~(T3) のみを満たす組 (Z, τ, ω) を**ツイスターモデル**と呼び、考察の対象とする。

ツイスター対応と本研究の動機

よく知られた Hitchin–Karlhede–Lindström–Roček (1987) [2] のツイスター対応定理により、超ケーラー構造 (M, g, I, J, K) とツイスター空間 $(Z, \tau, \omega, \{\ell_x\}_{x \in M})$ は 1 対 1 に対応する。(本稿では、この対応の組を省略して、計量 g とツイスター空間 Z が対応すると表記する。)

注意 1.4. 超ケーラー計量が代数的であるとは、対応するツイスター空間がツイスターモデルとして代数的であることと定義する。すなわち、 Z の各データが代数的に記述されることをいう。

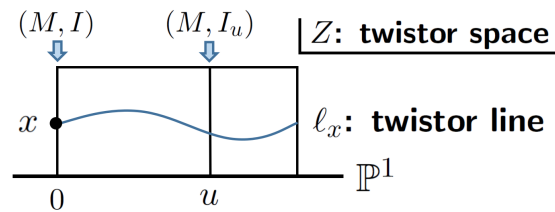


図 2: ツイスター空間の概念図： 超ケーラー多様体 M はリーマン球面 $\mathbb{P}^1$ で添え字づけられる自然な複素構造の族 $\{I_u\}_{u \in \mathbb{P}^1}$ を持つ。各複素多様体 (M, I_u) をファイバーに持つ正則ファイブレーションがツイスター空間である。ツイスター直線 ℓ_x とは、点 $x \in M$ の“変形の軌跡”である。

本研究の動機は (代数的な) 漸近的超ケーラー計量と対応するツイスター空間の、「ツイスターモデル」としての構造を完全に決定することである。

2 主ツイスターモデル (PTM) と主定理

前述の動機に基づき、主ツイスターモデルという新しい概念を導入する。

定義 2.1 (主ツイスターモデル). P を $(2n + d + 1)$ 次元複素多様体 ($n \geq 1, d \geq 0$) とする。以下の (P1)~(P3) を満たす組 $(\varphi : P \rightarrow \mathcal{C}(2), \omega_P, \tau_P)$ を**主ツイスターモデル (PTM)** と呼ぶ。

(P1) 正則ファイブレーション構造 $\varphi : P \rightarrow \mathcal{C}(2)$ を持つ。ここで、 $\mathcal{C}$ は d 次元複素ベクトル空間であり、底空間は $\mathbb{P}^1$ 上のベクトル束 $\mathcal{C}(2) := \mathcal{C} \otimes \mathcal{O}(2)$ である。

(P2) 実構造 $\tau_P : P \rightarrow \bar{P}$ を持つ。これは底空間上に実構造 $\sigma_2 : \mathcal{C}(2) \rightarrow \overline{\mathcal{C}(2)}$ を誘導する。

(P3) 相対正則シンプレクティック 2 形式 $\omega_P \in \Gamma(P, \wedge^2 T_\varphi^* \otimes \pi_P^* \mathcal{O}(2))$ が存在して、 $\tau_P^* \omega_P = \overline{\omega_P}$ を満たす。(ここで、 π_P は自然な射影 $P \rightarrow \mathbb{P}^1$ である。)

注: $d = 0$ の場合、この定義は通常のツイスターモデルの定義に一致する。

PTM の最も基本的な性質は、実切断による引き戻し操作である。

命題 2.2. $PTM(\varphi : P \rightarrow \mathcal{C}(2), \omega_P, \tau_P)$ の底空間上の任意の実切断 $s \in H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{C}(2))^{\sigma_2}$ (すなわち $\sigma_2 \circ s = s \circ \sigma_{ap}$) に対し、引き戻し $\pi_s := s^* \varphi : Z_s \rightarrow \mathbb{P}^1$ を構成することができる。このとき、誘導される形式 $\omega_s := \omega_P|_{Z_s}$ および実構造 $\tau_s := \tau_P|_{Z_s}$ と合わせて、組 (Z_s, τ_s, ω_s) は**ツイスターモデル**となる。(cf. 図 3)

主定理

以上の準備の下で、本研究の主結果を述べる。 (X, ω_X) を錐的シンプレクティック多様体、 $Y \rightarrow X$ をクレパント特異点解消、 g_0 を X_{reg} 上の超ケーラー錐計量とする。

定理 2.3. (1) **(PTMの構成)**: 超ケーラー錐計量 g_0 は、 Y の普遍ポアソン変形族を経由して、一意に自然な $PTM(P \rightarrow \mathcal{C}(2), \omega_P, \tau_P)$ を決定する。

(2) **(PTMの普遍性)**: 計量 g_0 に無限遠で漸近する任意の (代数的) 超ケーラー計量 g に対して、それと対応するツイスター空間 Z は、**ツイスターモデルとして $Z \cong Z_s$ を満たす**。ここで Z_s は、ある一意的な実切断 $s \in H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{C}(2))$ によって PTM を引き戻して得られるモデルである。

この定理は、主ツイスターモデル (PTM) が、漸近的超ケーラー計量と対応するツイスター空間の、ツイスター直線の族以外の構造を完全に決定することを意味する。

さらに、この主定理の系として、超ケーラー構造のモジュライ空間に関する結果が得られる。

系 2.4. 漸近的超ケーラー計量を持つ超ケーラー構造のモジュライ空間

$$\mathcal{M} := \{(Y, g, I, J, K) \mid g \rightarrow g_0 \text{ asymptotic at } \infty \text{ on } Y\} / (\text{isom})$$

を考えると、主定理 (2) の実切断との対応により、包含写像 $\mathcal{M} \hookrightarrow \mathbb{R}^3 \otimes H^2(Y; \mathbb{R}) \simeq H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{C}(2))^{\sigma_2}$ が得られる。特に、 X が孤立特異点を持つ場合は、この写像が開写像になることが示される。

主定理の証明の方針

定理 (1) の構成については、大きく 2 つのステップに分かれる。まず次節 §3 にて、「good triple」という概念を導入し、それが普遍ポアソン変形族を経由して PTM を定めることを解説する。次に、節 §4 にて錐計量 g_0 が good triple を定めることを説明する。以上を合わせて、証明が完了する。また、定理 (2) の普遍性の証明については、§4 で概略を述べる。

3 PTM の構成 (good triple から PTM が定まること)

定義 3.1 (good triple). (X, ω_X) を錐的シンプレクティック多様体とする。 X 上の $\mathbb{C}^*$ -作用 λ_X 、正則シンプレクティック 2 形式 ω_X 、および四元数構造 j_X (すなわち $j_X^2 = \lambda_X(-1)$ を満たす反正則写像) の組が、以下の整合性を満たすとき、この組を *good triple* と呼ぶ。

$$(\text{整合性}): \quad \lambda_X^* \omega_X = \lambda^2 \omega_X, \quad j_X^* \omega_X = \overline{\omega_X}, \quad j_X \circ \lambda_X = \bar{\lambda}_X \circ j_X.$$

$X = \mathbb{C}^2$ に標準座標 (x, y) を取った場合の標準的な組 $(\lambda_{\text{scal}}, dx \wedge dy, j(x, y) = (\bar{y}, -\bar{x}))$ や、商空間 $X = \mathbb{C}^{2n}/G$ ($G < Sp(n)$) 上に標準的な組を落として得られる triple が good triple の典型例である。

Step 1: 普遍ポアソン変形族 (Universal Poisson Deformation) と good triple の拡張

相対正則シンプレクティック 2 形式を備えた平坦な正則族 $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{B}$ をポアソン変形族と呼び、すべてのポアソン変形族がそこから引き戻して得られるという普遍性を持つ変形族を**普遍ポアソン変形族**という。並河 (2011) [3] により、錐的シンプレクティック多様体 X とそのクレパント解消 Y に対して、それぞれの普遍ポアソン変形 $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{B}, \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{C}$ が存在し、以下の可換図式を満たす。

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{Y} & \xrightarrow{\nu} & \mathcal{X}' & \longrightarrow & \mathcal{X} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{C} & \xlongequal{\quad} & \mathcal{C} & \xrightarrow{q} & \mathcal{B} \end{array}$$

ここで底空間 $\mathcal{C}$ は周期写像を通して $H^2(Y; \mathbb{C})$ と同型になり、 $\mathcal{X}' := q^* \mathcal{X}$ は有限ガロア被覆 q による引き戻し、 ν は $\mathcal{Y}$ のアフィン化写像である。

普遍性と形式的ポアソン変形に関する議論を用いることで、 X 上の good triple $(\lambda_X, \omega_X, j_X)$ は、普遍ポアソン変形 $\mathcal{Y}$ 上の “good triple” (λ, ω, j) に一意に拡張できることが示される ($\mathbb{C}^*$ -作用の拡張自体は 並河 (2008) [4] による)。このとき、 $\mathcal{Y}$ 上の $\mathbb{C}^*$ -作用 λ と四元数構造 j は、底空間 $\mathcal{C}$ に対してそれぞれウェイト 2 のスカラー倍と複素共役を誘導する。

Step 2: $\mathbb{C}^*$ -gluing construction とツイスター錐

構成の最終段階として、 $\mathbb{C}^*$ -作用を用いた貼り合わせ ($\mathbb{C}^*$ -gluing) を行う。 $\mathbb{C}^*$ -作用 λ を持つ複素多様体 M に対し、 $M \times \mathbb{C}$ の 2 つのコピーを用意し、写像 $\psi : (x, u) \mapsto (u^{-1} \cdot x, u^{-1})$ を用いて貼り合わせる。これにより正則ファイバー束 $M(1) \rightarrow \mathbb{P}^1$ が得られる。

さらに、 M 上の反正則写像 f が同変条件 $f(\lambda \cdot x) = \bar{\lambda} \cdot f(x)$ を満たすならば、この貼り合わせを通して $M(1)$ 上の反正則写像 $\hat{f}(x, u) = (-\bar{u}^{-1} \cdot f(x), -\bar{u}^{-1})$ へと拡張される。このとき、 f が四元数構造であることと $\hat{f}$ が実構造であることは同値となる。

以上の手順をまとめると、 X 上の good triple は $\mathcal{Y}$ 上の triple (λ, ω, j) へと拡張され、これに $\mathbb{C}^*$ -gluing を適用することで、目的とする PTM $(\mathcal{Y}(1) \rightarrow \mathcal{C}(2), \omega_P, \tau_P)$ が構成される (実構造は $\tau_P := \hat{j}$ となる)。なお、元の X 上の triple に対して直接 $\mathbb{C}^*$ -gluing を行って得られるツイスターモデル $(X(1), \hat{\omega}_X, \hat{j}_X)$ を**ツイスター錐**と呼ぶ。(cf. 図 4)

4 PTM の普遍性の証明

Step 1: 超ケーラー錐計量のツイスター空間の構造

主定理 (1) の証明のため、錐計量 g_0 に対応するツイスター空間 $(Z \rightarrow \mathbb{P}^1, \omega, \tau, \{\ell_x\})$ の構造を決定する。すなわち、 g_0 から X 上の good triple が定まり、 Z はツイスター錐 $X(1)$ とツイスターモデルとして同型になることを示す。(注：このとき、§3 の内容と合わせて、主定理 (1) が従う。)

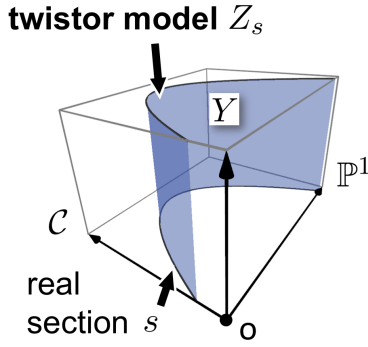


図 3: PTM 中のツイスターモデル

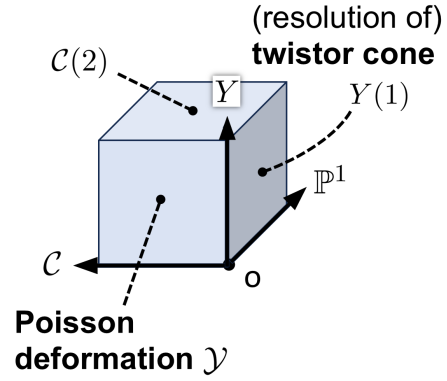


図 4: PTM の 3 つの面

証明の第一段階として、 Z の局所自明性を確認する。底空間の被覆 $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C}^+ \cup \mathbb{C}^-$ に伴い、ツイスター空間を $Z = Z^+ \cup Z^-$ と分解する。 g_0 が錐計量であることから、 Z にはファイバーを保つ $\mathbb{R}^+$ -作用が誘導される。普遍ポアソン変形 $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{B}$ の普遍性から、ある写像 $s^\pm : \mathbb{C}^\pm \rightarrow \mathcal{B}$ が定まり、 $\mathbb{R}^+$ -同変な同型 $Z^\pm \simeq (s^\pm)^* \mathcal{X}$ が取れる。したがって $s^\pm \equiv 0$ でなければならず、ポアソン変形として $Z^\pm \simeq X \times \mathbb{C}^\pm$ と自明化される。

続いて、この自明化を用いて X 上の good triple を構成する。実構造 τ を中心ファイバーに制限することで、反正則写像 $j_X : X \rightarrow \bar{X}$ が得られる。一方、 X 上の組 $(\lambda_X, \omega_X, j_X)$ に $\mathbb{C}^*$ -gluing を適用して得られるファイバー束 $X(1)$ と反正則写像 $\hat{j}_X$ を考える。 $Z, X(1)$ 上の実構造 $\tau, \hat{j}_X$ を $X \times \mathbb{C}^\pm$ 間のポアソン写像とみなし、「形式的ポアソン変形」上で比較すると、それらが共役であることが示される。したがって $\hat{j}_X$ が実構造であることから j_X が四元数構造であることが従う。貼り合わせ写像についても同様の共役性が示され、最終的に $(\lambda_X, \omega_X, j_X)$ が good triple となること、およびツイスターモデルとしての同型 $Z \simeq X(1)$ が証明される。

Step 2: 主定理 (2) の証明

次に、無限遠で g_0 に漸近する Y 上の超ケーラー計量 g に対して、 $\mathcal{C}(2)$ の実切断 s が一意に定まり、ツイスターモデルとしての同型 $Z \simeq Z_s := s^* \mathcal{Y}(1)$ が得られることを示す。

Step 1 と同様に $Z = Z^+ \cup Z^-$ と分解する。このとき $\mathcal{Y}$ の普遍性により、底空間 $\mathcal{C}(2)$ の一意な実切断 s が存在し、ポアソン変形としての同型 $Z^\pm \simeq Z_s^\pm$ が得られることが容易に示される。

大域的な同型を示すために、 Z および Z_s の各ファイバーをアフィン化した特異モデル Z', Z'_s を考える。このとき、 $Z'^\pm \simeq Z'_s{}^\pm$ はアフィン多様体 $\mathcal{X}' \times \mathbb{C}^\pm$ に自然に埋め込まれることに注意する。(ここで、 $\mathcal{X}'$ は普遍ポアソン変形族 $\mathcal{Y}$ の affinization である。)

座標 $(x, u) \in \mathcal{X}' \times \mathbb{C}^*$ を用いてツイスター錐との比較を行う。無限遠における漸近条件 $g \rightarrow g_0$ は、 Z' の貼り合わせ写像 ψ' と実構造 τ' に関する次の条件に言い換えられる： $\mathcal{X}'$ 上の自然な $\mathbb{C}^*$ -作用と四元数構造 j' を用いて、

$$\begin{aligned} \psi'(x, u) &= \left(\frac{1}{u} \cdot x + f(x, u), \frac{1}{u} \right), \\ \tau'(x, u) &= \left(-\frac{1}{\bar{u}} \cdot j'(x) + \overline{g(x, u)}, -\frac{1}{\bar{u}} \right). \end{aligned}$$

ここで、 f, g は $|x| \rightarrow \infty$ のとき $f, g \rightarrow 0$ という条件を満たす $\mathcal{X} \times \mathbb{C}$ 上の正則写像である。すなわち f, g は有界正則写像であるから、 $f = g \equiv 0$ となる。これは写像 ψ', τ' が Z'_s の貼り合わせ写像と実構造に一致することを意味し、特異ツイスターモデルとしての同型 $Z' \simeq Z'_s$ が成り立つ。

最後に、特異点解消 $Z \rightarrow Z'$ の例外集合が余次元 2 以上であることに注意し、ハルトークスの拡張定理を適用することで、ツイスターモデルとしての同型 $Z \simeq Z_s$ が得られる。 **Q.E.D.**

参考文献

- [1] Ryota Kotani. Principal twistor models and asymptotic hyperkähler metrics. *arXiv preprint arXiv:2603.03923*, 2026.
- [2] N. J. Hitchin, A. Karlhede, U. Lindström, and M. Roček. Hyperkähler metrics and supersymmetry. *Comm. Math. Phys.*, Vol. 108, pp. 535–589, 1987.
- [3] Yoshinori Namikawa. Poisson deformations of affine varieties. *Duke Math. J.*, Vol. 156, pp. 51–85, 2011.
- [4] Yoshinori Namikawa. Flops and Poisson deformations of symplectic varieties. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, Vol. 44, No. 2, pp. 259–314, 2008.

Rigidity of the Borell-Brascamp-Lieb inequality

Rongkai ZHANG (the University of Osaka)

In this talk we discuss some aspects regarding the rigidity of the Borell-Brascamp-Lieb inequality on weighted Riemannian manifolds, based on the recent work [1]. As an extension of the rigidity result of the inequality on Riemannian manifolds in [2], we show results on the rigidity of curvature and measure of the inequality on weighted Riemannian manifolds (M, g, m) satisfying $\text{Ric}_{m,N} \geq K$. We show that equality of the Borell-Brascamp-Lieb inequality can be attained only if the sectional curvatures are constantly $\frac{K}{N-1}$ and the measure admits a certain behaviour on the region between the supports of the functions:

Main Theorem (Theorem 2). [1] *On a weighted Riemannian manifold $(M, g, m = e^{-\psi} \text{vol}_g)$, satisfying $\text{Ric}_{m,N} \geq Kg$ where $n \leq N < \infty$ and $K \in \mathbb{R}$, equality of the Borell-Brascamp-Lieb inequality implies that the N -Ricci curvature along the geodesic of transport $\gamma(t) := \mathcal{F}_t(x)$ equals K and the sectional curvatures along the geodesic γ are identically $\frac{K}{N-1}$. The measure behaves as an $(N-n)$ -th power of a linear combination of trigonometric functions along the geodesic $\gamma(t)$ when $K > 0$; as an $(N-n)$ -degree polynomial of t along $\gamma(t)$ when $K = 0$; and as an $(N-n)$ -th power of a linear combination of hyperbolic functions along $\gamma(t)$ when $K < 0$.*

We will explain the key idea of the proof, which is the analysis of the interpolation inequality and the Riccati equation on weighted Riemannian manifolds. We will also discuss some aspects regarding the Brunn-Minkowski inequality, the inequality that is closely related to the Borell-Brascamp-Lieb inequality. We also present a few further open problems related.

1 The Curvature-Dimension condition

Throughout the talk, we will be considering a smooth weighted Riemannian manifold (M, g, m) of dimension n , where $m = e^{-\psi} \text{vol}_g$, satisfying the condition $\text{Ric}_{m,N}(\cdot) \geq Kg(\cdot, \cdot)$, $N \in [n, \infty)$ and $K \in \mathbb{R}$, where the N -Ricci curvature $\text{Ric}_{m,N}$ is defined to be:

$$\text{Ric}_{m,N}(v) := \begin{cases} \text{Ric}_m(v) - \frac{(\partial_v \psi)^2}{N-n} & \text{for } N \in (n, \infty), \\ \text{Ric}_m(v) & \text{for } N = \infty, \\ \text{Ric}(v) & \text{for } N = n, \psi = \text{const.} \end{cases}$$

where $\text{Ric}_m(v) = \text{Ric}(v) + \text{Hess}_\psi(v, v)$.

By the theorem of Brenier-McCann, given two measures on (M, g, m) , $\mu_0 = \rho_0 m = \rho_0 e^{-\psi} \text{vol}_g$ and $\mu_1 = \rho_1 m = \rho_1 e^{-\psi} \text{vol}_g$ in $\mathcal{P}^2(M)$ absolutely continuous with respect to m , there is a unique optimal transference plan from μ_0 to μ_1 , given by $\mathcal{F}_t$, $\mu_t = (\mathcal{F}_t)_\# \mu_0$, the push-forward of μ_0 by $\mathcal{F}_t(x) := \exp_x(t \nabla f(x))$, and $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ is a $\frac{d^2}{2}$ -convex function.

The *weighted Jacobian* $J_t^\psi(x) := e^{\psi(x) - \psi(\mathcal{F}_t(x))} \|(D\mathcal{F}_t(x))\|$ along the geodesic $\gamma(t) := \mathcal{F}_t(x)$. By a similar computation as in the proof of Theorem 1.7 of [4], the following concavity condition on the weighted Jacobian can be deduced:

$$J_t^\psi(x)^{\frac{1}{N}} \geq (1-t)\beta_{K,N}^{1-t}(d(x, \mathcal{F}_1(x)))^{\frac{1}{N}} + t\beta_{K,N}^t(d(x, \mathcal{F}_1(x)))^{\frac{1}{N}} J_1^\psi(x)^{\frac{1}{N}} \quad (1)$$

for μ_0 -a.e. x such that $\mathcal{F}_t$ is differentiable at x and all $t \in [0, 1]$, with the function $\beta_{K,N}^t$ being defined as:

$$\beta_{K,N}^t(r) = \left(\frac{s_{K,N}(tr)}{ts_{K,N}(r)} \right)^{N-1}$$

where

$$s_{K,N}(r) := \begin{cases} \sqrt{\frac{N-1}{K}} \sin \left(r \sqrt{\frac{K}{N-1}} \right) & \text{if } K > 0, \\ r & \text{if } K = 0, \\ \sqrt{-\frac{N-1}{K}} \sinh \left(r \sqrt{\frac{-K}{N-1}} \right) & \text{if } K < 0. \end{cases}$$

2 The Borell-Brascamp-Lieb inequality

We will be focusing on the Borell-Brascamp-Lieb inequality in the talk. The Borell-Brascamp-Lieb inequality was proved on Riemannian manifolds by Cordero-Erausquin, McCann and Schmuckenschläger in [3], and on metric measure spaces by Bacher in [5]. On a weighted Riemannian manifold, it takes the same form as in [5]:

Theorem 1. [1] *Let $f_0, f_1, h \geq 0$ be functions on a weighted Riemannian manifold (M, g, m) satisfying $\text{Ric}_{m,N} \geq Kg$. Assume that for Borel subsets $A, B \subset M$, $\int_A f_0 dm = \int_B f_1 dm = 1$ and*

$$h(z)^{-\frac{1}{N}} \leq (1-t)\beta_{K,N}^{1-t}(d(x,y))^{\frac{1}{N}} f_0(x)^{-\frac{1}{N}} + t\beta_{K,N}^t(d(x,y))^{\frac{1}{N}} f_1(x)^{-\frac{1}{N}}$$

for all $(x, y) \in A \times B, z \in Z_t(x, y)$, where

$$Z_t(x, y) := \{z \in M \mid d(x, z) = td(x, y), d(z, y) = (1-t)d(x, y)\}$$

is the set of t -intermediate points between x and y . Then $\int_M h dm \geq 1$.

This theorem is a rather straightforward consequence of the iterpolation inequality (1). By the same proof of the main result of [5], we consider the optimal transportation problem from the measure $\rho_0 := f_0|_A$ to $\rho_1 := f_1|_A$ induced by a map $\mathcal{F}_t$ that satisfies the Monge-Ampere equation

$$J_t^\psi(x) \cdot \rho_t \circ \mathcal{F}_t(x) = \rho_0(x) = f_0(x) \text{ for } m\text{-a.e. } x \in A,$$

where ρ_t is the density of μ_t . It can be shown that $h \circ \mathcal{F}_t \geq \rho_t \circ \mathcal{F}_t$, and the result follows from the comparison of the integrations of h and ρ_t on M .

3 Equality in the Borell-Brascamp-Lieb inequality

Suppose that for some $t_0 \in (0, 1)$, the Borell-Brascamp-Lieb inequality on a weighted Riemannian manifold as in Theorem 1 attains equality. We will have that on A , $h \circ \mathcal{F}_{t_0} = \rho_{t_0} \circ \mathcal{F}_{t_0}$ almost everywhere and the interpolation inequality attains equality at t_0 :

$$J_{t_0}^\psi(x)^{\frac{1}{N}} = (1-t_0)\beta_{K,N}^{1-t_0}(d(x, \mathcal{F}_1(x)))^{\frac{1}{N}} + t_0\beta_{K,N}^{t_0}(d(x, \mathcal{F}_1(x)))^{\frac{1}{N}} J_1^\psi(x)^{\frac{1}{N}}. \quad (2)$$

Towards the rigidity result, we will show first a lemma:

Lemma 1. [1] *If the weighted Jacobian J_t^ψ satisfying (1) attains equality at some $t_0 \in (0, 1)$, then equality of the inequality (1) holds for all $t \in [0, 1]$.*

With the lemma at hand, we will show main result:

Theorem 2. [1] *Rigidity of the Borell-Brascamp-Lieb inequality on weighted Riemannian manifold (M, g, m) satisfying $\text{Ric}_{m,N} \geq Kg$ implies, for a.e. $x \in \text{supp} f_0$, letting $\gamma(t) := \mathcal{F}_t(x)$, the following hold:*

1. *For all $t \in (0, 1)$, the N -Ricci curvature $\text{Ric}_{m,N}(\gamma'(t))$ equals $Kg(\gamma', \gamma')$, and the sectional curvatures along the geodesic γ are identically $\frac{K}{N-1}$.*
2. *The measure behaves as an $(N - n)$ -th power of a linear combination of trigonometric functions along the geodesic $\gamma(t)$ when $K > 0$; as an $(N - n)$ -degree polynomial of t along $\gamma(t)$ when $K = 0$; and as an $(N - n)$ -th power of a linear combination of hyperbolic functions along $\gamma(t)$ when $K < 0$.*

The result on the sectional curvatures are deduced from the property of the Riccati equation, and the result on the measure follows from the result on sectional curvatures and the expression on the N -Ricci curvature. The exact form of the measure is, as shown in [1]:

$$e^{-\psi \circ \mathcal{F}_t(x)} = \begin{cases} \left[C_0 \sin \left(\sqrt{\frac{K}{N-1}} rt \right) + C_1 \cos \left(\sqrt{\frac{K}{N-1}} rt \right) \right]^{N-n} & \text{when } K > 0, \\ (C_0 t + C_1)^{N-n} & \text{when } K = 0, \\ \left[C_0 \sinh \left(\sqrt{\frac{-K}{N-1}} rt \right) + C_1 \cosh \left(\sqrt{\frac{-K}{N-1}} rt \right) \right]^{N-n} & \text{when } K < 0 \end{cases}$$

where $r := d(\gamma(0), \gamma(1))$, C_0 and C_1 are constants determined by the initial values $e^{-\psi(x)}$ and $\partial_{\gamma'(0)} e^{-\psi(x)}$

$$C_0 = \frac{-\partial_{\gamma'(0)} \psi(x)}{N - n} e^{\frac{-\psi(x)}{N-n}}, \quad C_1 = e^{\frac{-\psi(x)}{N-n}}.$$

We will also discuss the possibility of the existence of singularities. With the expression above, the density function $e^{-\psi \circ \mathcal{F}_t(x)}$ may take the value of 0 (if the range of t can be extended beyond $[0, 1]$). Nonetheless, as discussed in [1], this does not lead to a contradiction: on a smooth weighted Riemannian manifold M , the initial value $e^{-\psi(x)}$ is nonzero and the point at which the density $e^{-\psi}$ vanishes is not on the geodesic $\mathcal{F}_t(x)$ for all $t \in [0, 1]$ for a.e. $x \in \text{supp} f_0$, hence the 'could-be' singularity must be outside the support of f_0, f_1 and h , thus can be resolved by mollification.

4 The Brunn-Minkowski inequality

We will also discuss in the talk the Brunn-Minkowski inequality on Riemannian manifolds with $\text{Ric}_{m,N} \geq Kg$, established in [4] is closely related to the Borell-Brascamp-Lieb inequality. We will consider the Brunn-Minkowski for compact, convex sets with positive and finite measures.

On weighted Riemannian manifolds, the Brunn-Minkowski inequality can be proved from the Borell-Brascamp-Lieb inequality, by setting the functions f_0, f_1, h to be the indicator functions on the respective sets.

We get the same rigidity result for the Brunn-Minkowski inequality as in [2].

Theorem 3. [1] *Rigidity of the Brunn-Minkowski inequality on weighted Riemannian manifolds such that $\text{Ric}_{m,N} \geq 0$ implies that for a.e. $x \in A$, the sectional curvatures*

along the geodesic of transport from A to B starting at x are identically 0, and the weight behaves as a polynomial of degree $N - n$ along the paths of transportation.

In the situation where $K > 0$, if compact convex sets $A, B \subset M$ with finite and positive measure satisfies equality of the Brunn-Minkowski inequality for some $t_0 \in (0, 1)$, then $A = B = Z_t(A, B)$ for all $t \in [0, 1]$ up to a set of null measure.

Equality of the Brunn-Minkowski inequality cannot hold for compact convex sets when $K < 0$.

5 Further questions

To conclude, we will discuss briefly a few further questions that arise from the main result.

1. We will discuss, in addition to the dimension bound N being positive and finite, the situation when N is infinite or negative.
2. We will also discuss the possible directions towards which the rigidity result can be generalised into.

References

- [1] Zhang, R. (2026). Rigidity of the Borell-Brascamp-Lieb Inequality on Weighted Riemannian Manifolds, arXiv e-prints, Art. no. arXiv:2604.00562, 2026. doi:10.48550/arXiv.2604.00562.
- [2] Balogh, Z. M., & Kristály, A. (2018). Equality in Borell-Brascamp-Lieb inequalities on curved spaces. *Advances in Mathematics* (New York. 1965), 339, 453–494. <https://doi.org/10.1016/j.aim.2018.09.041>
- [3] Cordero-Erausquin, D., McCann, R. J., & Schmuckenschläger, M. (2001). A Riemannian interpolation inequality à la Borell, Brascamp and Lieb. *Inventiones Mathematicae*, 146(2), 219–257. <https://doi.org/10.1007/s002220100160>
- [4] Sturm, K.-T. (2006). On the geometry of metric measure spaces. II. *Acta Mathematica*, 196(1), 133–177. <https://doi.org/10.1007/s11511-006-0003-7>
- [5] Bacher, K. (2010). On Borell-Brascamp-Lieb Inequalities on Metric Measure Spaces. *Potential Analysis*, 33(1), 1–15. <https://doi.org/10.1007/s11118-009-9157-1>

HIGGS PAIR のモジュライ空間について

佐々木 淳 (東京科学大学 D2)

ABSTRACT. コンパクト Riemann 面 M と、その上の滑らかな複素ベクトル束 E を固定する. Bradlow[2] によって導入された holomorphic pair の Higgs 束への一般化として Higgs pair が定義でき、実数 τ に対して、Higgs pair の τ -安定性が導入できる. 本講演では、 E と τ に適当な条件を課したうえで、 τ -安定 Higgs pair のモジュライ空間が非特異な複素多様体の構造をもつことを示す. また $\text{rank } E = 2$ の場合に、モジュライ空間への S^1 -作用と Morse-Bott 理論を用いることで、その Betti 数を計算する. 本講演は [9] に基づく.

1. HIGGS PAIR と KOBAYASHI-HITCHIN 対応

M をコンパクト Riemann 面、 E を M 上の滑らかな複素ベクトル束とし、 g_M を M の Kähler 計量とする.

Definition 1.1.

Higgs pair とは、組 (D'', s) であって、以下を満たすもののことをいう.

- (1) (E, D'') は Higgs 束である.
- (2) s は E の滑らかな切断であって、 $D''s = 0$ を満たす.

Higgs 束は正則ベクトル束の一般化である. よって、Higgs pair は Bradlow [2] により導入された holomorphic pair の一般化と考えられる. holomorphic pair に対して実数 τ に依存する安定性が定義できるのと同様に、Higgs pair に対しても同様の安定性が定義できる.

Definition 1.2.

(D'', s) を Higgs pair とし、 τ を実数とする. (D'', s) が τ -安定であるとは、以下の 2 条件を満たすことをいう.

- (1) 任意の (E, D'') の Higgs 部分束 F に対して、 $0 < \text{rank } F$ ならば、 $\mu(F) < \frac{\text{Vol}(M, g_M)}{4\pi}\tau$ を満たす.
- (2) 任意の (E, D'') の Higgs 部分束 F に対して、 $0 < \text{rank } F < \text{rank } E$ かつ $s \in H^0(F)$ ならば、 $\mu(E/F) > \frac{\text{Vol}(M, g_M)}{4\pi}\tau$ を満たす.

Higgs pair は、M. Mehta により 2005 年に導入された [7]. 彼は、 τ -安定な Higgs pair のモジュライ空間の smooth locus 内に含まれる開集合が存在することを示しているが、モジュライ空間が大域的に滑らかであることは示していない. 本講演では、ベクトル束 E と $\tau \in \mathbb{R}$ に条件を課することで、モジュライ空間が非特異な複素多様体の構造を持つことを示す. また、 $\text{rank } E = 2$ の場合に、モジュライ空間の Betti 数を計算する.

また、Higgs pair は、Álvarez-Cónsul と García-Prada [5] によって導入された quiver 束の具体例である. 上の Higgs pair に対する安定性は、quiver 束に対して定義される

本研究は科研費 (課題番号: 25KJ1222) の助成を受けたものである.

安定性を Higgs pair の場合書き下したものである. quiver 束に対して, その安定性と, ゲージ理論的な微分方程式が対応するという Kobayashi-Hitchin 対応が成り立つ. その対応を Higgs pair に対して書き下すと以下ようになる.

Theorem 1.3.

(D'', s) を Higgs pair とし, $\tau \in \mathbb{R}$ を generic にとる. このとき, 以下は同値である.

- (1) (D'', s) は τ -安定である.
- (2) E の Hermite 計量 h で, (D'', s) が以下の方程式の解となるものが一意に存在する.

$$\sqrt{-1}\Lambda(R(\nabla) + [\theta \wedge \theta^*]) + \frac{1}{2}s \circ s^* = \frac{\tau}{2}\text{id}_E.$$

ただし, Λ は (M, g_M) の Kähler 形式 ω_M による縮約である. また, $D'' : \Omega^0(E) \rightarrow \Omega^1(E)$ の $(0, 1)$ -成分, $(1, 0)$ -成分への分解 $D'' = \bar{\partial}^E + \theta$ に関して, ∇ は正則 Hermite ベクトル束 $(E, \bar{\partial}^E, h)$ の Chern 接続である. この方程式のことを τ -vortex 方程式という.

2. モジュライ空間

τ -安定な Higgs pair のなす空間には, E のゲージ群が以下のように右から作用する.

$$(D'', s) \cdot g := (g^{-1} \circ D'' \circ g, g^{-1}s).$$

この作用で割って得られる商空間を $\mathcal{M}$ と書き, τ -安定 Higgs pair のモジュライ空間という.

E の Hermite 計量 h を固定し, τ -安定な Higgs pair (D'', s) に対して, 次の楕円型複体を考える.

$$\Omega^0(\text{End}(E)) \xrightarrow{d_0} \Omega^1(\text{End}(E)) \oplus \Omega^0(E) \xrightarrow{d_1} \Omega^2(\text{End}(E)) \oplus \Omega^1(E) \xrightarrow{d_2} \Omega^2(E). \quad (2.1)$$

ただし射 $d_k : \Omega^k(\text{End}(E)) \oplus \Omega^{k-1}(E) \rightarrow \Omega^{k+1}(\text{End}(E)) \oplus \Omega^k(E)$ は以下で与えられる.

$$d_k \begin{pmatrix} \alpha \\ \eta \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} D''_{\text{End}(E)} & 0 \\ -ev(s) & -D'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \eta \end{pmatrix}.$$

倉西理論により, 点 $[D'', s] \in \mathcal{M}$ は, この複体の 0 次と 2 次のコホモロジー群が消えるときに smooth point となる. 実は, (D'', s) の安定性から, 0 次コホモロジー群が消えることがただちに従う. よって, モジュライ空間が非特異であることを示すためには, 2 次のコホモロジー群が消えることを示せばよい.

Gothen と King [3] により, quiver 束の変形複体のコホモロジー群の計算方法が確立されている. 第 1 節で, Higgs pair は quiver 束の具体例であると述べたので, 彼らの方法を使って 2 次のコホモロジー群を計算すればよいと思われるかもしれないが, 残念ながら彼らの方法を使うことはできない. 実は, Higgs pair は標準的な quiver 束ではなく, quiver 束に関係式 $\theta s = 0$ が課されているものである. この違いは極めて重要である. なぜなら, Higgs pair の変形複体について考えるとき, この関係式を保つように Higgs pair を変形しなければならないからである. そこで, 別の方法で 2 次のコホモロジー群を計算する.

M 上の正則ベクトル束からなる, 以下の複体を考える.

$$\mathrm{End}(E) \xrightarrow{\tilde{d}_0} \mathrm{End}(E) \otimes K_M \oplus E \xrightarrow{\tilde{d}_1} E \otimes K_M.$$

ただし射 $\tilde{d}_0, \tilde{d}_1$ は以下で与えられる.

$$\tilde{d}_0(f) := \begin{pmatrix} D''_{\mathrm{End}(E)} f \\ -f(s) \end{pmatrix}, \quad \tilde{d}_1 \begin{pmatrix} \alpha' \\ \eta \end{pmatrix} := -\alpha'(s) - D''\eta.$$

このとき, 変形複体の 2 次のコホモロジー群は, 上の複体の 2 次のハイパーコホモロジー群 $\mathbb{H}^2$ で与えられる. また, スペクトル系列 $\{E_r^{p,q}\}$ で, $E_r^{p,q} \Rightarrow \mathbb{H}^{p+q}$ となるものが存在するので, これを計算すると, $\mathbb{H}^2 = E_3^{2,0} \oplus E_3^{1,1}$ を得る. 定義に従ってこれらを書き下すと,

$$E_2^{1,1} = \frac{\left\{ (f\omega_M, \alpha'') \in H^1(\mathrm{End}(E)) \oplus H^1(E) \left| \begin{array}{l} \partial^{\mathrm{End}(E)} f = 0, \\ H(f(s)\omega_M + \theta \wedge \alpha'') = 0 \end{array} \right. \right\}}{\left\{ \left(H([\theta \wedge \beta'']), -H(\beta''(s)) \right) \left| \beta'' \in H^1(\mathrm{End}(E)) \right. \right\}}$$

となる. ただし H は調和射影である. E には Hermite 計量 h を固定しているので, この計量に関して, $f\omega_M$ と $H([\theta \wedge \beta'']), \alpha''$ と $-H(\beta''(s))$ の L^2 -内積を計算すると,

$$E_2^{1,1} = \left\{ (f\omega_M, \alpha'') \in H^1(\mathrm{End}(E)) \oplus H^1(E) \left| \begin{array}{l} \partial^{\mathrm{End}(E)} f = 0, [\theta^*, f] = 0, \\ \alpha'' \otimes s^* = 0, \\ H(f(s)\omega_M + \theta \wedge \alpha'') = 0 \end{array} \right. \right\}$$

となる. ここで, もし Higgs 束 (E, D'') が単純であり, また切断 s が零切断でなければ, 条件 $\partial^{\mathrm{End}(E)} f = 0, [\theta^*, f] = 0$ と $D''_{\mathrm{End}(E)} f^* = 0$ が同値であることから, $E_2^{1,1} = 0$ が従う. そこで, ベクトル束 E と $\tau \in \mathbb{R}$ に関して, 次の条件を課す.

Assumption 2.1.

- $\mu(E) < \frac{\mathrm{Vol}(M, g_M)}{4\pi} \tau < \mu_+ := \min \left\{ \mu(F) \left| \begin{array}{l} F \text{ は } E \text{ の滑らかな部分束,} \\ \mu(F) > \mu(E) \end{array} \right. \right\}.$
- $\deg E$ と $\mathrm{rank} E$ は互いに素である.

この仮定の下で, 以下の補題が成り立つ.

Lemma 2.2.

(E, D'') は安定 Higgs 束であり, s は零切断でない.

この補題は, まず τ の仮定から (E, D'') の半安定性が従い, E の仮定から安定性が従う. また s が零切断でないことは, Kobayashi-Hitchin 対応から従う. 安定 Higgs 束は単純なので, 上の議論から, $E_2^{1,1} = 0$ を得る.

$E_3^{2,0} = 0$ であることは, $E_3^{2,0}$ が $H^0(E \otimes K)$ の部分空間として得られることと, 複体の射の定義からただちに従う. これらより, $\mathbb{H}^2 = 0$ となるので, モジュライ空間 $\mathcal{M}$ は非特異な複素多様体となる.

3. モジュライ空間の BETTI 数

Biswas と Schumacher [1] により, quiver 束のモジュライ空間の smooth locus には Kähler 計量が入ることが示されている. このことから, τ -安定 Higgs pair のモジュライ空間 $\mathcal{M}$ にも Kähler 計量が入る. モジュライ空間の Betti 数を計算する際の鍵となるのは, 次で定義される $\mathcal{M}$ への S^1 作用である.

$$[\bar{\partial}^E, \theta, s] \cdot z := [\bar{\partial}^E, z\theta, s].$$

この S^1 作用は正則, 等長, ハミルトンであり, 対応する運動量写像 $\mu: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ は次で与えられる.

$$\mu([\bar{\partial}^E, \theta, s]) = \|\theta\|_{L^2(M)}^2.$$

ただし, θ の L^2 ノルムを計算する際には, Kobayashi-Hitchin 対応から誘導される Hermitian 計量を用いる. τ -vortex 方程式のアプリオリ評価により, μ は固有, すなわち任意の閉区間の引き戻しが $\mathcal{M}$ のコンパクト集合となる.

以下, $\text{rank } E = 2$ とし, 前節の Assumption 2.1 も引き続き仮定する. モジュライ空間の Betti 数は, Morse-Bott 理論を用いて計算する. 計算方法は, Hitchin [4] が安定 Higgs 束のモジュライ空間の Betti 数を求めた際に用いた方法と本質的に同じである.

理論を適用するために, μ の臨界点集合, すなわち S^1 -固定点集合を求める. 点 $[\bar{\partial}^E, \theta, s] \in \mathcal{M}$ が $\theta = 0$ となるとき, この点は明らかに S^1 -固定点である. $\theta = 0$ となる $\mathcal{M}$ の部分集合を N_0 とする. N_0 は, τ -安定 holomorphic pair のモジュライ空間に対応する. (Hitchin の文脈では, N_0 は安定正則構造のモジュライ空間に対応する.) $[\bar{\partial}^E, \theta, s] \in \mathcal{M}$ を, S^1 -固定点であって, $\theta \neq 0$ となる点とする. このとき, 任意の $z = e^{\sqrt{-1}t} \in S^1$ に対して, 以下を満たす E のゲージ変換 $g(t)$ が存在する.

$$\begin{cases} g(t)^{-1} \circ \bar{\partial}^E \circ g(t) = \bar{\partial}^E, & (3.1) \\ g(t)^{-1} \circ \theta \circ g(t) = \exp(\sqrt{-1}t)\theta, & (3.2) \\ g(t)^{-1} s = s. & (3.3) \end{cases}$$

条件 (3.1) より, $(E, \bar{\partial}^E)$ の正則部分束 L で, $E = L \oplus (L^{-1} \otimes \det E)$ と正則に分裂するものが存在する. ($\text{rank } E = 2$ なので, L は直線束である.) 条件 (3.2) より, θ は以下のように与えられる.

$$\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \varphi & 0 \end{pmatrix}.$$

ただし $\varphi \in H^0(\text{Hom}(L, L^{-1} \otimes \det E))$ である. 条件 (3.3) より, s は $L^{-1} \otimes \det E$ の正則切断となる.

$\theta \neq 0$ なので $\varphi \neq 0$ であり, また $s \neq 0$ なので,

$$\deg L \leq \min \left\{ \deg E, g - 1 + \frac{1}{2} \deg E \right\} =: m$$

となる. ただし g はコンパクト Riemann 面 M の種数である. また, $L^{-1} \otimes E$ は $(E, \bar{\partial}^E, \theta)$ の Higgs 部分束であり, $s \in H^0(L^{-1} \otimes \det E)$ なので,

$$\frac{\text{Vol}(M, g_M)}{4\pi} \tau < \deg L$$

となる. 整数 d を $\frac{\text{Vol}(M, g_M)}{4\pi} \tau < d \leq m$ を満たすものとし,

$$N_d := \left\{ \left[E = L \oplus (L^{-1} \otimes \det E), \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \varphi & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix} \right] \middle| \deg L = d \right\}$$

とする. このとき, モジュライ空間への S^1 -作用の固定点集合は, $N_0 \cup \bigcup_d N_d$ となる.

あとは, N_0, N_d の Betti 数と指数が求まれば, モジュライ空間の Betti 数は計算できる. N_0 は τ -安定 holomorphic pair のモジュライ空間であり, その Betti 数は Muñoz, Ortega, Vázquez-Gallo [8] により計算されている. また N_0 の指数は 0 である. N_d の Betti 数は, 以下の命題と MacDonald [6] の結果から計算できる.

Proposition 3.1. N_d は $\text{Sym}^{-2d+k+2g-2} M \times \text{Sym}^{k-d} M$ と双正則である. ($k = \deg E$.)

写像 $f : \text{Sym}^{-2d+k+2g-2} M \times \text{Sym}^{k-d} M \rightarrow \text{Pic}^k(M)$ を

$$f(D, D') := \left[\mathcal{O}_M(D')^2 \otimes \mathcal{O}_M(D)^{-1} \otimes K_M \right]$$

と定めると, N_d と f のグラフが双正則であることが分かることから上の命題が従う. N_d の指数は, ベクトル束 E への S^1 -作用の重みが負であるものからなる, Higgs pair の変形複体 (2.1) の部分複体の 1 次コホモロジー群の実次元に一致する. その複体は

$$\Omega^0(\text{Hom}(L, L^{-1} \otimes \det E)) \xrightarrow{\bar{\partial}} \Omega^{0,1}(\text{Hom}(L, L^{-1} \otimes \det E)).$$

で与えられるので, N_d の指数は $2(2d + g - k - 1)$ となる. これらより, $\text{rank } E = 2$ の場合の τ -安定 Higgs pair のモジュライ空間 $\mathcal{M}$ の Betti 数は以下のように与えられる.

Theorem 3.2. $\mathcal{M}$ の Poincaré 多項式 $P(t)$ は, 以下の有理多項式の $x^{k+2g}y^{k+2g}$ の係数で与えられる.

$$\begin{aligned} & x^{2g+1+[T]} y^{k+2g} \frac{(1+t)^{2g} (1+tx)^g (1+tx)^g}{(1-t^2)(1-x)(1-t^2x)} \left(\frac{t^{2(k-1-[T])}}{1-t^{-2}x} - \frac{t^{2(g+1-k+2[T])}}{1-t^4x} \right) \\ & + \sum_{d=[T]+1}^m t^{2(2d+g-k-1)} x^{2d+2} y^{d-2g} \frac{(1+tx)^{2g} (1+ty)^{2g}}{(1-x)(1-y)(1-t^2x)(1-t^2y)}. \end{aligned}$$

ただし $T = \frac{\text{Vol}(M, g_M)}{4\pi} \tau$ である.

REFERENCES

- [1] I. Biswas and G. Schumacher, *Differential geometry of moduli spaces of quiver bundles*, Journal of Geometry and Physics, vol. 118, 2017, pp. 51–66.
- [2] S. B. Bradlow, *Special metrics and stability for holomorphic bundles with global sections*, Journal of Differential Geometry, vol. 33, 1991, pp. 169–213.
- [3] P. B. Gothen and A. D. King, *Homological algebra of twisted quiver bundles*, Journal of the London Mathematical Society, vol. 71, 2005, pp. 85–99.
- [4] N. J. Hitchin, *The self-duality equations on a Riemann surface*, Proc. London Math. Soc., vol. s3-55, 1987, pp. 59–126.
- [5] L. Álvarez-Cónsul and O. García-Prada, *Hitchin-Kobayashi correspondence, quivers, and vortices*, Communications in Mathematical Physics, vol. 238, 2003, pp. 1–33.
- [6] I.G. MacDonald, *Symmetric products of an algebraic curve*, Topology, vol. 1, 1962, pp. 319–343.

- [7] M. Mehta, *Birational equivalence of Higgs moduli*, International Journal of Mathematics, vol. 16, 2005, pp. 365–386.
- [8] V. Muñoz, D. Ortega, and M. J. Vázquez-Gallo, *Hodge polynomials of the moduli spaces of pairs*, International Journal of Mathematics, vol. 18, 2007, pp. 695–721.
- [9] Jun Sasaki, *The moduli space of higgs pairs*, 2026, arXiv:2604.24400.

〒 152-8551 東京都 目黒区 大岡山 2-12-1 東京科学大学 理学院 数学系

Email address: `sasaki.j.ac@m.titech.ac.jp`, `sasaki.j.fb69@m.isct.ac.jp`

ローレンツハウスドルフ測度と余面積不等式

久保田 景 (大阪大学理学研究科数学専攻 D2)

1 ローレンツ弧長空間とローレンツハウスドルフ測度

曲率が上または下に有界なリーマン多様体の収束の理論および極限空間として現れる測度距離空間の幾何学は大きな成果を上げてきた. 近年, 時間的向き付けをもつローレンツ多様体 (以下時空) の幾何学の枠組みで同様の理論が展開されている. ローレンツ弧長空間 (以下 LpLS) は時空の距離空間論的な一般化であり, 収束する時空の列の極限として現れうる空間である [6]. 本講演では近年の LpLS の幾何学の概要と講演者によって導入された新たな局所構造の仮定と体積比較不等式について述べる.

定義 1.1 (ローレンツ弧長空間). (X, d) を距離空間とする. X 上の二項関係 $\leq, \ll$, 関数 $\tau: X \times X \rightarrow [0, \infty]$ は次の条件を満たすとする.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a1) } \leq \text{ は推移的かつ反射的} \\ \text{(a2) } \ll \text{ は推移的} \\ \text{(a3) } \ll \text{ は } \leq \text{ に含まれる} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(b1) } \tau \text{ は } d \text{ について下半連続} \\ \text{(b2) } x \not\leq y \Rightarrow \tau(x, y) = 0 \\ \text{(b3) } x < y \Leftrightarrow \tau(x, y) > 0 \\ \text{(b4) } x \leq y \leq z \Rightarrow \tau(x, z) \geq \tau(x, y) + \tau(y, z) \end{array} \right.$$

このとき $(X, d, \leq, \ll, \tau)$ をローレンツ弧長空間 (LpLS) とよぶ. また $\leq, \ll$ を各々因果関係 (causal relation), 時間関係 (chronological relation), τ を時間間隔 (time separation) とよぶ.

時空の幾何学で重要な概念である大域的雙曲性などの因果構造が LpLS 上で定義されており, 一般化された特異点定理の導出をはじめとするローレンツ幾何学の一般化が取り組まれている. また距離空間の場合と同様に, 測地三角形の比較および最適輸送理論を用いて断面曲率およびリッチ曲率が有界な LpLS が定義されており [2], Alexandrov 空間, CAT 空間, また (R)CD 空間のローレンツ幾何学の枠組みでの再構築が取り組まれている.

曲率が有界な LpLS における重要な先行研究として, 断面曲率が有界な LpLS の分裂定理の導出やリッチ曲率が有界な LpLS 上での Bishop-Gromov 不等式の導出が挙げられる. またリーマン幾何学におけるグロモフハウスドルフ収束に相当する時空と LpLS の収束概念の構築及び, ローレンツ幾何学の枠組みでのソボレフ解析の研究が進んでいる.

距離空間上で距離構造からハウスドルフ測度が定まる. これは距離空間に対して次元の概念を定めるほか, ハウスドルフ測度に着目することで曲率の有界性の条件から強力な構造定

理が導出される. ハウスドルフ測度の LpLS における対応物としてローレンツハウスドルフ測度が定義され, LpLS の幾何構造との関係が研究されている [8].

定義 1.2. (X, d) を LpLS とし $x \in X$ とする. このとき x の時間的未来および因果的未来を各々 $I^+(x) := \{y \in X \mid x \ll y\}$, $J^+(x) := \{y \in X \mid x \leq y\}$ と定義する. 同様に x の時間的過去 $I^-(x)$ および因果的過去 $J^-(x)$ を各々因果関係, 時間関係を反転させることで定義する. また $J(p, q) = J^+(p) \cap J^-(q)$ (causal diamond), $I(p, q) = I^+(p) \cap I^-(q)$ (chronological diamond) と定める.

定義 1.3 (ローレンツハウスドルフ測度). $(X, d, \leq, \ll, \tau)$ を LpLS, A を X の部分集合とする. このとき N 次元のローレンツハウスドルフ測度を

$$\mathcal{V}_d^N(A) := \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \rho_N(J(a_i, b_i)) \mid a_i < b_i, \text{diam}_d(J(a_i, b_i)) < \delta, A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} J(a_i, b_i) \right\} \right]$$

と定める. ただし $\inf \emptyset = \infty$ とする. ここで, $\mathcal{J} := \{J(p, q) \mid p < q\} \cup \{\emptyset\}$ とし, ρ_N を $\mathcal{J}$ 上の関数として, $\rho_N(J(p, q)) = \omega \tau^N(p, q)$ ($\tau(p, q) > 0$), ∞ ($\tau(p, q) = \infty$) および $\rho^N(\emptyset) = 0$ とする.

ローレンツハウスドルフ測度はボレル測度であり, 距離空間上のハウスドルフ測度と同様の性質を多くもつ. 例えば LpLS およびその開部分集合に対して次元を与え, また LpLS 上の曲線のうち特に因果的曲線とよばれるものについて時間間隔によって測られる弧長と像の 1 次元のローレンツハウスドルフ測度が一致する. また滑らかな N 次元の時空において, 体積測度とローレンツ計量およびリーマン距離から定まる N 次元のローレンツハウスドルフ測度が一致する.

2 ローレンツ余面積不等式

ハウスドルフ測度のリプシッツ写像を用いた体積比較不等式として余面積不等式 [3] が挙げられる. この不等式は部分集合のハウスドルフ測度に関する体積をリプシッツ写像の等位集合の積分値によって評価するものであり, 幾何学的測度論や距離空間の幾何学において基本的なものである. 例えば距離空間における有界変動関数の振る舞いの解明において重要な役割を担った. ローレンツハウスドルフ測度に対しても同様の余面積不等式が導出された [5].

ハウスドルフ測度に関する余面積不等式の導出にはリプシッツ写像を用いた体積比較, ハウスドルフ測度に関して集合の被覆を開集合への制限, 5 倍被覆補題の三つが本質的に重要である. ローレンツハウスドルフ測度はハウスドルフ測度に比べ体積の計算に必要な情報が多いため, 写像を用いた体積比較を行う場合, 写像により多くの条件を課す必要がある.

定義 2.1 (Uniformly d -controlling 写像 [4], [5]). $(X, d_X, \leq_X, \ll_X, \tau_X)$ と $(Y, d_Y, \leq_Y, \ll_Y, \tau_Y)$ を LpLS とする. このとき写像 $U : X \rightarrow Y$ が因果関係を保存することを $p, q \in X$ であって

$p \leq_X q$ を満たす任意の 2 点に対して $U(p) \leq_Y U(q)$ が成立することと定める. また因果関係を保存する写像 $U : X \rightarrow Y$ が uniformly d -controlling であることを, ある関数 $\eta : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ であって, $\eta(s) \rightarrow 0$ ($s \rightarrow 0$) および十分小さな $s > 0$ に対して $\text{diam}_{d_X}(J(p, q)) < s \Rightarrow \text{diam}_{d_Y}(J(U(p), U(q))) < \eta(s)$ を満たすものが存在することと定める.

また $U : X \rightarrow Y$ が時間的リプシッツ写像であることを, ある定数 $\lambda > 0$ が存在し任意の $p, q \in X$ であって $p \leq_X q$ を満たすものに対して $\tau_Y(U(p), U(q)) \leq \lambda \tau_X(p, q)$ が成立することと定める. また U の時間的リプシッツ定数を次のように定める.

$$\text{TLip}U := \inf\{\lambda > 0 \mid \tau_Y(U(p), U(q)) \leq \lambda \tau_X(p, q) \text{ for any } p, q \in X \text{ with } p \leq_X q\}$$

ハウスドルフ測度についてのリプシッツ写像を用いた体積比較不等式と同様に時間的リプシッツかつ uniformly d -controlling な写像による体積比較が得られている.

定理 2.2 (Volume comparison by timelike Lipschitz maps [4]). $(X, d_X, \leq_X, \ll_X, \tau_X)$ と $(Y, d_Y, \leq_Y, \ll_Y, \tau_Y)$ を LpLS, $A \subseteq X$ とする. また次を仮定する.

- (1) A_ϵ 上で U が時間的リプシッツ写像である. ここで $A_\epsilon := \{x \in X \mid d_X(x, A) \leq \epsilon\}$ である.
- (2) U が uniformly d -controlling である.

このとき, $\mathcal{V}_{d_Y}^N(U(A)) \leq (\text{TLip}U)^N \mathcal{V}_{d_X}^N(A)$ が成立する.

注釈 2.3 (Uniformly d -controlling map の例). LpLS の間の写像 $U : X \rightarrow Y$ が uniformly d -controlling であるための十分条件として次が挙げられる.

- (1) U が全射かつ一様連続であり, $p, q \in X$ であって $U(p) \leq U(q)$ を満たすものについて $p \leq q$ が成立する.
- (2) U が一様連続であり, Y 上で $\text{diam}_Y(J(p, q)) \leq C \cdot d_Y(p, q)$ が成立する. このようなものとして LpLS で定まり, 空間の因果構造によって多くの振る舞いが制御されるヌル距離 [7] が挙げられる.
- (3) U が一様連続であり, Y が generalized cone structure [1] をもつ.

一般の LpLS において, Causal diamond の 5 倍拡大に相当する操作は行えず, 従って 5 倍被覆補題は成立しない. このため Causal diamond に関する 5 倍被覆補題を導出するために次に述べる局所的な幾何構造を仮定する.

定義 2.4 (local causal enlargement property). $(X, d, \leq, \ll, \tau)$ を LpLS とする. $x \in X$ に対し開近傍 U_x が次の条件を満たすとき U_x を causal enlargement neighborhood であるとする:

定数 $C_1^x, C_2^x \geq 1$ が存在し, 任意の $J(p, q) \subseteq U_x$ に対してある $J(\tilde{p}, \tilde{q})$ であって

$$\begin{cases} (1) J(\tilde{p}, \tilde{q}) \supseteq \bigcup \{J \in \mathcal{J} \mid J \cap J(p, q) \neq \emptyset, \text{diam}_d(J) \leq 2\text{diam}_d(J(p, q))\}, \\ (2) \text{diam}_d(J(\tilde{p}, \tilde{q})) \leq C_1^x \text{diam}_d(J(p, q)), \\ (3) \tau(\tilde{p}, \tilde{q}) \leq C_2^x \tau(p, q). \end{cases}$$

を満たすものが存在する. またこのような $J(\tilde{p}, \tilde{q})$ を $J(p, q)$ の causal enlargement とよぶ.

任意の $x \in X$ に対して causal enlargement neighborhood が存在するとき, X が local causal enlargement property を満たすと定義する.

一般の LpLS において, 部分集合のローレンツハウスドルフ測度を計算する際に被覆を開集合に制限することはできない. 次に述べる局所的な幾何構造はこのような被覆の開集合への制限を許すものである.

定義 2.5 (causal estimation property). $(X, d, \leq, \ll, \tau)$ を LpLS とする. $x \in X$ に対して開近傍 V_x が次の条件を満たすとき V_x を causal estimation neighborhood であるとする:

- (1) 任意の空でない $I(p, q) \subseteq U_x$ が $\text{diam}_d(I(p, q)) = \text{diam}_d(J(p, q))$ を満たす.
- (2) $J(p, q) \subseteq U_x$ であるとき, 任意の $\epsilon_1 > 1$ および $\epsilon_2 > 0$ に対してある chronological diamond, $I(\tilde{p}, \tilde{q})$ であって

$$\begin{cases} J(p, q) \subseteq I(\tilde{p}, \tilde{q}), \\ \text{diam}_d(I(\tilde{p}, \tilde{q})) \leq \epsilon_1 \cdot \text{diam}_d(J(p, q)), \\ \tau(\tilde{p}, \tilde{q}) \leq \tau(p, q) + \epsilon_2. \end{cases}$$

を満たすものが存在する.

任意の $x \in X$ に対して causal estimation neighborhood が存在するとき, X が causal enlargement property を満たすと定義する.

これらを用いてローレンツ余面積不等式を得るための条件として次に示すものが得られる.

条件 (A) $(X, d_X, \leq_X, \ll_X, \tau_X)$ と $(Y, d_Y, \leq_Y, \ll_Y, \tau_Y)$ を LpLS とし, $U : X \rightarrow Y$ とする. このとき条件 (A) を次のように定める:

- (1) U が uniformly d -controlling および timelike Lipschitz を満たし, また連続写像である.
- (2) Y が local causal enlargement property を満たす.
- (3) Y の任意の causal diamond が閉集合である.
- (4) d_X および d_Y が proper である.
- (5) $\mathcal{V}_{d_X}^s$ が内部正則測度である.
- (6) $\mathcal{V}_{d_Y}^t$ が外部正則測度かつ σ 有限である.
- (7) $p, q \in Y$ であって $p \leq q$ かつ $p \not\ll q$ を満たす 2 点に対して $\mathcal{V}_{d_Y}^s(J(p, q)) = 0$ が成立する.
- (8) X が causal estimation property を満たす.

定理 2.6 (Lorentzian coarea inequality [5]). $(X, d_X, \leq_X, \ll_X, \tau_X)$ と $(Y, d_Y, \leq_Y, \ll_Y, \tau_Y)$ を L_pLS とし, $0 \leq t \leq s < \infty$, $U : X \rightarrow Y$ とする. (A) を仮定したとき $E \subseteq X$ に対して

$$\int_Y \mathcal{V}_{d_X}^{s-t}(U^{-1}(y) \cap E) d\mathcal{V}_{d_Y}^t(y) \leq (\text{TLip}U)^t \frac{\omega_{s-t}\omega_t}{\omega_s} \mathcal{V}_{d_X}^s(E),$$

が成立し, 従って任意の $\mathcal{V}_{d_X}^s$ -可測関数 $g : X \rightarrow [0, \infty]$ に対して

$$\int_Y \left(\int_{U^{-1}(y)} g d\mathcal{V}_{d_X}^{s-t} \right) d\mathcal{V}_{d_Y}^t(y) \leq (\text{TLip}U)^t \frac{\omega_{s-t}\omega_t}{\omega_s} \int_X g d\mathcal{V}_{d_X}^s$$

が成立する.

注釈 2.7. 特に X および Y を各々 N, M 次元の strongly causal 時空とし, $s = N, t = M$ としたとき条件 (A) のうち空間についての仮定, (2) から (8) が満たされることがわかる.

参考文献

- [1] S. B. Alexander, M. Graf, M. Kunzinger, and C. Sämann. *Generalized cones as Lorentzian length spaces: Causality, curvature, and singularity theorems*. Comm. Anal. Geom. **31** (2023), no. 6, 1469–1528; MR4785565.
- [2] F. Cavalletti and A. Mondino. *Optimal transport in Lorentzian synthetic spaces, synthetic timelike Ricci curvature lower bounds and applications*. Camb. J. Math. **12** (2024), no. 2, 417–534; MR4779676.
- [3] B. Esmayli and P. Hajłasz. *The coarea inequality*. Ann. Fenn. Math. **46** (2021), no. 2, 965–991; MR4307012.
- [4] H. Kubota. *Volume comparison by timelike Lipschitz maps*. Lett. Math. Phys. **116** (2026), no. 1, Paper No. 6, 24 pp.; MR5006726.
- [5] H. Kubota. *Lorentzian coarea inequality*. arXiv:2605.09101
- [6] M. Kunzinger and C. Sämann. *Lorentzian length spaces*. Ann. Global Anal. Geom. **54** (2018), no. 3, 399–447; MR3867652.
- [7] M. Kunzinger and R. Steinbauer. *Null Distance and Convergence of Lorentzian Length Spaces*. Ann. Henri Poincaré **23** (2022), no. 12, 4319–4342; MR4512238.
- [8] R. J. McCann and C. Sämann. *A Lorentzian analog for Hausdorff dimension and measure*. Pure Appl. Anal. **4** (2022), no. 2, 367–400; MR4496090.

Fano 許容多様体の満測定数と満測ソリトン

村山 庄太郎 (東京理科大学)*

1 導入

満測ソリトンとは、満測氏が [6] で導入した Fano 多様体上の標準 Kähler 計量の一つであり、Kähler–Einstein 計量の一般化である。\$X\$ を \$n\$ 次元 Fano 多様体とし、\$G\$ を \$\text{Aut}^0(X)\$ の極大コンパクト部分群とする。また、\$\omega\$ を \$X\$ 上の \$G\$-不変 Kähler 形式で \$2\pi c_1(X)\$ を代表するものとする。このとき \$\text{Ric}(\omega)\$ を \$\omega\$ の Ricci 形式とすると、\$dd^c\$-補題により、\$h_\omega \in C^\infty(X, \mathbf{R})^G\$ で

$$\text{Ric}(\omega) - \omega = \frac{1}{2} dd^c h_\omega, \quad \int_X (1 - e^{h_\omega}) \frac{\omega^n}{n!} = 0$$

を満たすものがただ一つ存在する。この \$h_\omega\$ を \$\omega\$ の Ricci ポテンシャルと呼ぶ。\$\omega\$ が満測ソリトンであるとは、\$\text{grad}_\omega(1 - e^{h_\omega})\$ が \$X\$ 上の実正則ベクトル場であることをいう。任意の Kähler–Einstein 計量は満測ソリトンである。また、満測ソリトンが Kähler–Einstein 計量であることと \$X\$ の二木不変量が消滅することは同値である ([6, Section 1])。

満測ソリトンの存在に対しては満測定数と呼ばれる障害が知られている。\$\omega\$ に対する Killing ポテンシャルの空間を \$P_\omega\$ とし、\$C^\infty(X, \mathbf{R})^G\$ における \$P_\omega\$ への \$\omega\$ に関する \$L^2\$-射影を \$\Pi_\omega^G\$ で表す。このとき

$$M_X := \max_X \Pi_\omega^G(1 - e^{h_\omega})$$

は \$\omega \in 2\pi c_1(X)^G\$ の選び方によらず一意に定まる ([6, Section 2])。この \$M_X\$ を \$X\$ の満測定数と呼び、\$X\$ が満測ソリトンを許容するには満測定数が 1 未満である必要がある。

本講演では、許容多様体 ([1, Section 1]) と呼ばれるクラスにおける Fano 多様体に対する満測定数の算出と満測ソリトンの存在問題について述べる。主な結果は以下の 3 つである。

1. 満測定数が 1 未満であれば満測ソリトンが存在することを示す。
2. Fano 許容多様体の満測定数の明示公式を示す。
3. 複素射影空間上の Fano 許容多様体で満測ソリトンを持つものを決定する。

1. については、トーリック Fano 多様体の場合に同様の結果が知られている ([11]。[9] も参照されたい)。

2 Fano 許容多様体

ここでは [1],[2] の記述に沿って Fano 許容多様体に関連する概念の定義を説明する。

* e-mail: 1126708@ed.tus.ac.jp

定義 2.1. 許容多様体とは射影束 $\mathbf{P}_Y(E_0 \oplus E_\infty) \rightarrow Y$ で次の条件を満たすものである.

- Y の普遍被覆空間は, 単連結な実 $2d_a$ 次元コンパクト Kähler 多様体 (Y_a, g_a, ω_a) の直積 $\tilde{Y} := \prod_{a \in \mathcal{A}} Y_a (\mathcal{A} \subset \mathbf{Z}_{>0}, \#\mathcal{A} < \infty)$ であり, 各 g_a と ω_a は $\tilde{Y}$ 上のテンソル場とみて Y 上のテンソル場の引き戻しである.
- E_0 および E_∞ はそれぞれ Y 上の階数 $d_0 + 1$ および $d_\infty + 1$ の射影的平坦な正則 Hermite ベクトル束であり, $\varepsilon_a \in \{-1, 1\} (a \in \mathcal{A}), \omega_Y := \sum_{a \in \mathcal{A}} \varepsilon_a \omega_a$ に対して

$$\frac{c_1(E_\infty)}{d_\infty + 1} - \frac{c_1(E_0)}{d_0 + 1} = \left[\frac{\omega_Y}{2\pi} \right]$$

が成り立つ.

$X = \mathbf{P}_Y(E_0 \oplus E_\infty)$ を許容多様体, $e_0 := \mathbf{P}_Y(E_0 \oplus 0), e_\infty := \mathbf{P}_Y(0 \oplus E_\infty)$ とし, $\hat{X}$ を $e_0 \cup e_\infty$ に沿った X のブローアップとする. また, $\hat{e}_0, \hat{e}_\infty$ を各々 e_0, e_∞ の例外因子とし, $\hat{\mathcal{A}} = \{a \in \mathcal{A} \cup \{0, \infty\} \mid d_a > 0\}$ とする.

定義 2.2. X の Kähler 類 Ω が許容 Kähler 類であるとは, $c \in \mathbf{R}_{>0}$ と $0 < \varepsilon_a x_a < 1 (a \in \mathcal{A})$ を満たす $x_a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ および $x_0 = 1, x_\infty = -1$ に対して Ω の $\hat{X}$ への引き戻しが

$$c \left(\sum_{a \in \hat{\mathcal{A}}} \frac{[\varepsilon_a \omega_a]}{x_a} + \hat{\Xi} \right)$$

と表されるときをいう. 但し $\hat{\Xi}$ は $2\pi[\hat{e}_0 + \hat{e}_\infty]$ の Poincaré 双対である.

Ω を許容多様体 $X = \mathbf{P}_Y(E_0 \oplus E_\infty)$ の許容 Kähler 類とする. このとき E_0 上のスカラー倍は X 上の S^1 -作用を誘導し, E_0 と E_∞ の Hermite 計量はファイバー毎の運動量写像 $z: X \rightarrow [-1, 1]$ を引き起こす. そこで X 上の S^1 -作用の無限小生成子を T と表し, θ を接続形式で $d\theta = \sum_{a \in \hat{\mathcal{A}}} \varepsilon_a \omega_a, \theta(T) = 1$ であるとする.

定義 2.3. X の Kähler 形式 $\omega \in \Omega$ が許容 Kähler 形式であるとは, $X \setminus (e_0 \cup e_\infty)$ 上で

$$g = c \left(\sum_{a \in \hat{\mathcal{A}}} \frac{1 + x_a z}{x_a} \varepsilon_a g_a + \frac{dz^2}{\Theta(z)} + \Theta(z) \theta^2 \right), \quad \omega = c \left(\sum_{a \in \hat{\mathcal{A}}} \frac{1 + x_a z}{x_a} \varepsilon_a \omega_a + dz \wedge \theta \right)$$

と表されるときをいう. 但し Θ は閉区間 $[-1, 1]$ 上の C^∞ 級関数で以下を満たすものである.

$$\Theta(x) > 0 \ (x \in (-1, 1)), \quad \Theta(\pm 1) = 0, \quad \Theta'(\pm 1) = \mp 2.$$

定義 2.4. $X = \mathbf{P}_Y(E_0 \oplus E_\infty)$ を n 次元許容多様体とし, Ω を X の許容 Kähler 類とする. このとき

$$p_\Omega(x) := \prod_{a \in \hat{\mathcal{A}}} (\lambda_a + \varepsilon_a x)^{d_a} = (1+x)^{d_0} (1-x)^{d_\infty} \prod_{a \in \mathcal{A}} (\lambda_a + \varepsilon_a x)^{d_a} \quad \left(\lambda_a := \frac{\varepsilon_a}{x_a} \right)$$

を特性多項式という.

今, 各 $a \in \mathcal{A}$ に対し g_a が Ricci 正の Kähler–Einstein 計量, すなわち $\text{Ric}(\omega_a) = \varepsilon_a s_a \omega_a$ ($s_a \in \mathbf{R}$) であるとする. このとき, X は Y 上の直線束 $\mathcal{L}$ により $X = \mathbf{P}_{\mathbf{P}^n}(\mathcal{O}^{\oplus(d_0+1)} \oplus (\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}^{\oplus(d_\infty+1)}))$ と表される. ここで $\mathcal{L}$ は $c_1(\mathcal{L}_a) = [\varepsilon_a \omega_a / 2\pi]$ となる Y_a 上の直線束 $\mathcal{L}_a$ により $\mathcal{L} = \otimes_{a \in \mathcal{A}} \mathcal{L}_a$ と表されるものである. このとき, X が Fano 多様体であることと, 各 $a \in \mathcal{A}$ に対して

$$\begin{cases} s_a > d_0 + 1 & (\varepsilon_a = 1 \text{ のとき}), \\ s_a < -(d_\infty + 1) & (\varepsilon_a = -1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

が成り立つことは同値である ([2, Theorem 3.1]). この条件を満たす X を **Fano 許容多様体**と呼ぶ.

3 主定理

ここでは [8] に基づき主な結果を述べる. 第 1 の結果は, Fano 許容多様体においては満測定数によって満測ソリトンの存在が完全に判定できることを示すものである.

定理 3.1 ([8, Theorem 1.1]). Fano 許容多様体 X に対して, 次の 2 つの条件は同値である.

1. X は満測ソリトンを持つ.
2. $M_X < 1$.

定理 3.1 により Fano 許容多様体における満測ソリトンの存在問題を満測定数のみで判定することが可能となる. そこで, 次に Fano 許容多様体の満測定数を計算する. $\Omega := 2\pi c_1(X)$ とする. このとき各 $a \in \mathcal{A}$ に対し

$$x_a = \frac{d_0 + d_\infty + 2}{2s_a + d_\infty - d_0}, \quad p_\Omega(x) = (1+x)^{d_0}(1-x)^{d_\infty} \prod_{a \in \mathcal{A}} \left(\frac{\varepsilon_a}{x_a} + \varepsilon_a x \right)^{d_a}$$

である. 各 $i \in \{0, 1, 2\}$ に対し

$$b_i := \int_{-1}^1 x^i p_\Omega(x) dx$$

とすると, $d_0 = d_\infty = 0$ の場合には b_0, b_1, b_2 を用いた M_X の明示公式が与えられている ([6, Theorem 6.5]). 第 2 の結果は, これを次のように一般の Fano 許容多様体に拡張したものである.

定理 3.2 ([8, Theorem 1.2]). $w := \frac{d_0 - d_\infty}{d_0 + d_\infty + 2}$ とする. このとき

$$M_X = \frac{b_0|b_1 - wb_0| - b_1(b_1 - wb_0)}{b_0b_2 - b_1^2}$$

が成り立つ.

第 3 の結果として, 複素射影空間 $\mathbf{P}^n$ 上の Fano 許容多様体を考え, その上での満
 渾ソリトンの存在問題について論じる. $\mathbf{P}^n$ 上の Fano 許容多様体 X は $k \in \mathbf{Z}(k \geq$
 1 かつ $n+1 > k(d_0+1))$ を用いて $X = \mathbf{P}_{\mathbf{P}^n}(\mathcal{O}^{\oplus(d_0+1)} \oplus \mathcal{O}(k)^{\oplus(d_\infty+1)})$ と表される. こ
 のとき定理 3.1 および定理 3.2 を用いて次が示される.

定理 3.3 ([8, Theorem 1.3]). X が満渾ソリトンを持つのは $(k, d_\infty) = (1, 0)$ または
 $(n, k, d_0, d_\infty) = (1, 1, 0, 1)$ の場合であり, かつその場合に限る. それ以外の場合には
 $M_X > 1$ が成り立つ.

4 証明の概略

最初に定理 3.1 の同値性を説明する. まず満渾ソリトンが存在すると仮定する. この
 とき [6, Theorem 3.1] より満渾定数は

$$M_X = \max_X \Pi_\omega^G(1 - e^{h_\omega}) = \max_X (1 - e^{h_\omega}) < 1$$

である.

逆に $M_X < 1$ であると仮定して, 満渾ソリトンの存在を満渾ソリトンを一般化した v -
 ソリトン ([3] を参照) の枠組みを用いて証明する. このとき, Calabi の構成法により常
 微分方程式の境界値問題に帰着することができる. 具体的には $v \in C^\infty([-1, 1], \mathbf{R}_{>0})$ を
 $v(z) = 1 - \Pi_\omega^G(1 - e^{h_\omega})$ で定めると

$$\begin{aligned} \frac{(vF)'(z)}{(vp_\Omega)(z)} &= -(d_0 + d_\infty + 2)(z - w), \\ F(\pm 1) &= 0 \end{aligned}$$

と書き下すことができ, この常微分方程式は解を持つ. すると $\Theta := F/p_\Omega$ は Ω に属する
 許容 Kähler 形式 ω を定め, これが満渾ソリトンである.

次に, 定理 3.2 の満渾定数の明示公式を導く. まず d 次元 Fano 許容多様体 $X :=$
 $\mathbf{P}_{\mathbf{P}^n}(\mathcal{O}^{\oplus(d_0+1)} \oplus (\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}^{\oplus(d_\infty+1)})), \Omega := 2\pi c_1(X)$ に対し次が成り立つ.

命題 4.1 ([1, Proposition 6], [7, Theorem 9.1]). $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ で X の許容 Kähler 形式 $\omega \in \Omega$
 に対し

$$\Pi_\omega^G(1 - e^{h_\omega}) = \alpha z + \beta$$

となるものが存在する.

このとき定数関数と z が X の Killing ポテンシャルであることから

$$\int_X (1 - e^{h_\omega}) \frac{\omega^d}{d!} = 0, \quad \int_X (z - w) e^{h_\omega} \frac{\omega^d}{d!} = 0$$

を用いると $\alpha b_1 + \beta b_0 = 0, \alpha b_2 + \beta b_1 = b_1 - w b_0$ となるので明示公式

$$M_X = \max_X(\alpha z + \beta) = |\alpha| + \beta = \frac{b_0|b_1 - w b_0| - b_1(b_1 - w b_0)}{b_0 b_2 - b_1^2}$$

を得る.

最後に, 定理 3.3 の具体的な Fano 許容多様体に対する満測ソリトンの存在問題の判定法を与える. $\mathbf{P}^n$ の Fubini–Study 計量は Ricci 正となる Kähler–Einstein 計量であり, $\mathbf{P}^n$ 上の許容多様体は

$$X := \mathbf{P}_{\mathbf{P}^n}(\mathcal{O}^{\oplus(d_0+1)} \oplus \mathcal{O}(k)^{\oplus(d_\infty+1)}) \quad (k \in \mathbf{Z}_{\geq 1})$$

と表される. このとき, [2, Theorem 3.1] により次の命題が成り立つ.

命題 4.2. X が Fano 多様体であるのは $k(d_0 + 1) < n + 1$ の場合であり, かつその場合に限る.

$\mathcal{A}$ は 1 点集合であり,

$$\lambda := \frac{\varepsilon_1}{x_1} = \frac{2(n+1)/k + d_\infty - d_0}{d_0 + d_\infty + 2}$$

とすると, 特性多項式は

$$p_{2\pi c_1(X)}(x) = (\lambda + x)^n (1 + x)^{d_0} (1 - x)^{d_\infty}$$

となる. そこで定理 3.2 に従って満測定数を計算すると, まず $b_1 - w b_0 > 0$ であり,

$$M_X = \frac{b_0|b_1 - w b_0| - b_1(b_1 - w b_0)}{b_0 b_2 - b_1^2} = 1 + \frac{b_0(b_1 - w b_0 + w b_1 - b_2)}{b_0 b_2 - b_1^2}$$

に対し $M_X < 1$ であることと

$$b_1 - w b_0 + w b_1 - b_2 = \int_{-1}^1 (\lambda + x)(1 + x)^{d_0} (1 - x)^{d_\infty+1} (x - w) dx < 0$$

が同値であることから, n, k, d_0, d_∞ の満たすべき条件が導かれ, 定理 3.3 が示される.

5 安定性との関連

定理 3.3 は安定性の観点から述べることも可能である. よく知られた Yau–Tian–Donaldson 予想の類似として, Fano 多様体における満測ソリトンの存在は一様相対 Ding 準安定性と呼ばれる安定性の一種と同値であることが知られている ([11],[9],[10],[5],[4]). また, [10, Theorem 1] により相対 Ding 半安定な Fano 多様体の満測定数は 1 以下であることも知られている. 以上の事実を定理 3.3 と組み合わせると以下を得る.

系 5.1. X が一様相対 Ding 準安定であるのは $(k, d_\infty) = (1, 0)$ または $(n, k, d_0, d_\infty) = (1, 1, 0, 1)$ の場合であり, かつその場合に限る. また, それ以外の X は相対 Ding 不安定である.

参考文献

- [1] V. Apostolov, D. M. J. Calderbank, P. Gauduchon, and C. W. Tønnesen-Friedman, *Hamiltonian 2-forms in Kähler geometry. III. Extremal metrics and stability*, Invent. Math. **173** (2008), no. 3, 547–601.
- [2] V. Apostolov, D. M. J. Calderbank, P. Gauduchon, and C. W. Tønnesen-Friedman, *Hamiltonian 2-forms in Kähler geometry. IV. Weakly Bochner-flat Kähler manifolds*, Comm. Anal. Geom. **16** (2008), no. 1, 91–126.
- [3] R. J. Berman and D. W. Nyström, *Complex optimal transport and the pluripotential theory of Kähler–Ricci solitons*, arXiv:1401.8264 (2014).
- [4] J. Han and C. Li, *On the Yau-Tian-Donaldson conjecture for generalized Kähler-Ricci soliton equations*, Comm. Pure Appl. Math. **76** (2023), no. 9, 1793–1867.
- [5] T. Hisamoto, *Mabuchi’s soliton metric and relative D-stability*, Amer. J. Math. **145** (2023), no. 3, 765–806.
- [6] T. Mabuchi, *Kähler-Einstein metrics for manifolds with nonvanishing Futaki character*, Tohoku Math. J. (2) **53** (2001), no. 2, 171–182.
- [7] T. Mabuchi, *Test configurations, stabilities and canonical Kähler metrics—complex geometry by the energy method*, SpringerBriefs in Mathematics, Springer, Singapore, 2021.
- [8] S. Murayama and Y. Nitta, *Mabuchi solitons and Mabuchi constants on Fano admissible manifolds*, arXiv:2624.23261 (2026).
- [9] S. Nakamura, *Generalized Kähler Einstein metrics and uniform stability for toric Fano manifolds*, Tohoku Math. J. (2) **71** (2019), no. 4, 525–532.
- [10] Y. Yao, *Relative Ding stability and an obstruction to the existence of Mabuchi solitons*, J. Geom. Anal. **32** (2022), no. 4, Paper No. 105, 51 pp.
- [11] Y. Yao, *Mabuchi solitons and relative Ding stability of toric Fano varieties*, Int. Math. Res. Not. IMRN, (2022), no. 24, 19790–19853.

様々な曲面のクラスへの Bloch–Ros principle の応用

笠尾俊輔 * (KASAO Shunsuke)

金沢大学大学院 自然科学研究科 数物科学専攻

1 序文

Picard の小定理や Carathéodory–Montel の定理に見られるように、有理型関数の値分布論と正規族理論の間には双対性が存在する (Picard の小定理, Carathéodory–Montel の定理の主張は本稿 3 章を参照). Bloch [Bloch, p.84] はこれを「ある性質 P をもつ $\mathbb{C}$ 上の有理型関数が定数関数に限られるとき、その性質 P をみたす領域上の有理型関数族は正規族となる」と予想した. このような原理は **Bloch (heuristic) principle** と呼ばれる. しかし, Bloch principle にはいくつかの反例 ([Zal98, p.224]) が知られている. そうした中, Zalcman [Zal75] は, どのような性質に対して Bloch principle が成り立つのか, 厳密な定式化を与えた.

この定式化に基づき, Ros [Ros] は極小曲面論においても類似の定式化を与えた. これまで極小曲面論においては, Heinz が curvature estimate を用いて Bernstein の定理 (平面 $\mathbb{R}^2$ を定義域とする $\mathbb{R}^3$ 内の極小グラフは平面に限る) を証明し, 藤本 [Fuji] も同様に curvature estimate から Gauss 写像の除外値数が 5 点以上である $\mathbb{R}^3$ 内の完備極小曲面は平面に限る (つまり, 平面でない完備極小曲面の Gauss 写像の除外値数の最大個数は 4 である) ことを証明した. Ros は, Gauss 写像のどのような性質がこれら一連の結果の鍵となる curvature estimate を導くのかを判定する主張を導き, 藤本の定理の別証明を与えた. 本講演では, 値分布論, 正規族理論, 極小曲面論の間にあるこのような三位一体の現象を **Bloch–Ros principle** と呼ぶ.

一方で, 藤本型の定理は極小曲面に限った話ではない. 川上 [Kaw] は $\mathbb{L}^3$ 内の極大面や $\mathbb{R}^3$ 内の非固有アファイン波面といった Weierstrass 型の表現公式で構成される様々な曲面のクラスに対して, 藤本型の主張を導いた. 具体的には, 正則 1 形式 $f dz$ と有理型関数 g を用いて完備な共形計量 $ds^2 = (1 + |g|^2)^m |f|^2 |dz|^2$ (m は正の整数) が定義される開 Riemann 面 Σ に対して, g の除外値数の最大個数が $m+2$ になることを示した. このような 3 つ組 $(\Sigma, f dz, g)$ を **Weierstrass m -triple** と呼ぶことにする.

本講演の目的は, [KK] に基づき, Ros による判定法を Weierstrass m -triple へと一般化し, 極小曲面をはじめとする様々な曲面のクラスにおいて, どのような性質が m -curvature estimate をみたすのかを判定する統一的な枠組みを提示することである. 特に, 有界性, 除外値に関する性質に加え, 最新の成果 [Kas] として, 完全分岐値に関する性質も m -curvature estimate をみたすこと, すなわち, Gauss 写像に関する完全分岐値の既存の結果等も, この一般化された理論体系に組み込まれることを報告する.

* ご質問やご意見などがございましたら, 次のアドレスまでお気軽にご連絡ください. kasao15039@gmail.com

本研究は, JST 科学技術イノベーション創出に向けた大学フェローシップ創業事業 JPMJFS2116 及び JST 次世代研究者挑戦的プログラム JPMJSP2135 の支援を受けたものです.

2 Bloch–Ros principle

2.1 Bloch principle

ここでは、複素解析における正則写像の値分布論と正規族理論の間にある双対性の理論をまとめる。 Σ を連結な Riemann 面, $\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ を全複素平面とする。このとき,

$$\mathcal{M}(\Sigma) := \{g : \Sigma \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}} : \text{正則写像}\}$$

と定める。 $\mathcal{M}(\Sigma)$ の位相として、 Σ 内のコンパクト部分集合上の一様収束位相を用いる：

$$\begin{aligned} & \mathcal{M}(\Sigma) \text{ において, } \{g_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ が } g \text{ に収束する} \\ \iff & \widehat{\mathbb{C}} \text{ の球面弦距離}^{*1} \text{ に関して, } \Sigma \text{ 上 } \{g_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ は } g \text{ に局所一様収束する.} \end{aligned}$$

さらに、正則写像のある性質 P に対して、

$$\mathcal{P}(\Sigma) := \{g \in \mathcal{M}(\Sigma) : g \text{ は } \Sigma \text{ 上で性質 } P \text{ を満たす}\}.$$

定義 2.1 [Ros, p.3] 正則写像の性質 P に対して、次の条件を考える：

- (P1) 任意の 2 つの Riemann 面 Σ, Σ' , 分岐点のない任意の正則写像 $\phi : \Sigma \longrightarrow \Sigma'$ に対して, $g \in \mathcal{P}(\Sigma')$ ならば, $g \circ \phi \in \mathcal{P}(\Sigma)$.
- (P2) Σ を Riemann 面, $g \in \mathcal{M}(\Sigma)$ とする。 Σ 内の任意の相対コンパクト領域 Ω に対し $g|_{\Omega} \in \mathcal{P}(\Omega)$ ならば, $g \in \mathcal{P}(\Sigma)$.
- (P3) 任意の Riemann 面 Σ に対して, $\mathcal{P}(\Sigma)$ は $\mathcal{M}(\Sigma)$ の閉部分集合である。
- (P4) 任意の Riemann 面 Σ に対して, $\mathcal{P}(\Sigma)$ は相対コンパクト^{*2} である。

性質 P が条件 (P1),(P2),(P3) をみたすとき, P を **closed property** という。また、性質 P が条件 (P1),(P2),(P3),(P4) をみたすとき, P を **compact property** という。

単位円板を $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ と記す。 P が compact のとき、次の主張が成り立つ：

命題 2.2 [Ros, Lemma3] P を compact property とする。このとき、次が成り立つ：

- (A) $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ は定値写像しか含まない。
- (B) $g \in \mathcal{P}(\mathbb{D} \setminus \{0\})$ ならば, $z = 0$ は g の真性特異点ではない, つまり g は $\mathbb{D}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への正則写像である。

Ω を $\mathbb{C}$ 内の領域とする。立体射影 $\pi_N : \widehat{\mathbb{C}} \longrightarrow S^2$ に対して, $\pi_N \circ g$ の Ω 上の Euclid gradient の長さを $|\nabla g|_e$ と記す。ここで、非定値正則写像 g に対しては,

$$|\nabla g|_e = \frac{2\sqrt{2}|g'|}{1+|g|^2},$$

定値写像 g に対しては $|\nabla g|_e \equiv 0$ となる。次の主張は Zalcman の補題と呼ばれる結果で, property が compact かどうかを判定する際に使われる。

^{*1} 全複素平面 $\widehat{\mathbb{C}}$ は立体射影 $\pi_N : \widehat{\mathbb{C}} \longrightarrow S^2$ を通して S^2 と同一視される。よって, $z_1, z_2 \in \widehat{\mathbb{C}}$ の距離を $\pi_N(z_1), \pi_N(z_2) \in S^2$ の Euclid 距離の半分と定め, これを**球面弦距離**と呼ぶことにする。これは S^2 上の Fubini–Study 計量から定まる距離と同値となる。

^{*2} 複素解析では、このような関数族を Σ 上の**正規族**と呼ぶ。

定理 2.3 [Ros, Theorem 1],[KK, Theorem 2.12] P を closed property とする. このとき, 次の (1) または (2) が成立する:

- (1) P は compact property である.
- (2) $g \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$ が在って, $|\nabla g|_e(0) = 1$ かつ $\mathbb{C}$ 上で $|\nabla g|_e \leq 1$ をみたす.

2.2 曲面の Gauss map の値分布論への応用

ここでは, 2.1 節で準備した Bloch principle の理論を, $\mathbb{R}^3$ 内の極小曲面, $\mathbb{L}^3$ 内の極大面, $\mathbb{R}^3$ 内の非固有アファイン波面などを含む様々な曲面のクラスへ応用するための定式化を行う.

定義 2.4 Σ を共形計量

$$ds^2 = (1 + |g|^2)^m |f|^2 |dz|^2$$

(但し, $f dz$ を Σ 上の正則 1 形式, g は Σ 上の有理型関数, $m \in \mathbb{Z}_{>0}$) が付随した開 Riemann 面とする. このとき, $(\Sigma, f dz, g)$ を **Weierstrass m -triple** と呼ぶ.

注意 2.5 極小曲面の正則条件の議論と同様にして, 次が示される:

$$0 < (1 + |g|^2)^m |f|^2 < +\infty \iff (f dz)_0 = m(g)_\infty,$$

ただし, $(f dz)_0$ は $f dz$ の零点の因子, $(g)_\infty$ は g の極の因子を表す. また, Weierstrass m -triple $(\Sigma, f dz, g)$ の Gauss 曲率 K_{ds^2} は

$$K_{ds^2} = -\frac{2m|g'|^2}{(1 + |g|^2)^{m+2}|f|^2}. \quad (1)$$

定義 2.6 P を compact property, $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ とする. このとき, P が **m -curvature estimate** をみたすとは, ある $C = C(P, m) > 0$ が在って, $g \in \mathcal{P}(\Sigma)$ をみたす任意の Weierstrass m -triple $(\Sigma, f dz, g)$ に対して, 以下の不等式が成り立つことである:

$$|K_{ds^2}|^{\frac{1}{2}} \leq \frac{C}{d} \quad \text{on } \Sigma.$$

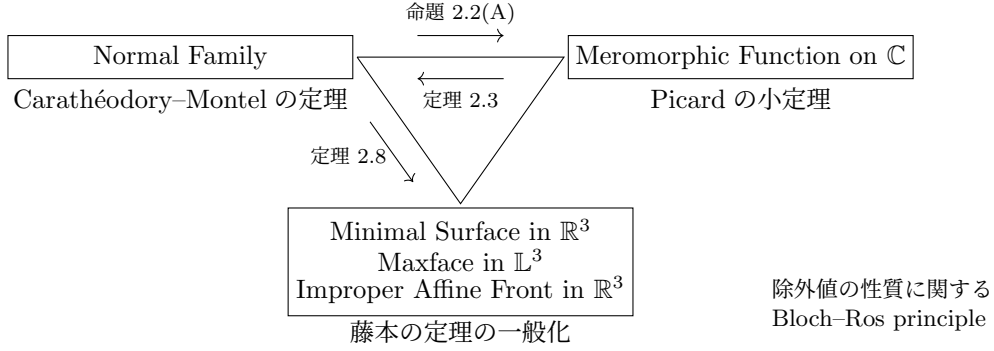
ここで, K_{ds^2} は計量 $ds^2 = (1 + |g|^2)^m |f|^2 |dz|^2$ に関する Gauss 曲率, d は Σ の境界への測地的距離である.

注意 2.7 P が m -curvature estimate をみたし, $ds^2 = (1 + |g|^2)^m |f|^2 |dz|^2$ が Σ 上の完備計量るとき, $K_{ds^2} \equiv 0$ が成り立つ. さらに, (1) と合わせると, g が Σ 上の定値写像になることがわかる.

次の主張は, compact property が m -curvature estimate をみたすかどうかを判定する結果である.

定理 2.8 [KK, Theorem 3.4] P を compact property, $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ とする. このとき, 次の (i) または (ii) が成り立つ:

- (i) P は m -curvature estimate をみたす.
- (ii) 以下の (A), (B), (C) をみたす Weierstrass m -triple $(\mathbb{D}, f dz, g)$ が存在する:
 - (A) g は非定値正則写像で, $g \in \mathcal{P}(\mathbb{D})$ をみたす.
 - (B) $ds^2 = (1 + |g|^2)^m |f|^2 |dz|^2$ は $\mathbb{D}$ 上の完備計量.
 - (C) $|K_{ds^2}(0)| = \frac{1}{4}$ および $\mathbb{D}$ 上 $|K_{ds^2}| \leq 1$ をみたす.



3 Bloch–Ros principle が成り立つ property の例

定理 2.3 と定理 2.8 により以下の property は m -curvature estimate をみたす compact property であることが示される：

例 3.1 [KK, Proposition 2.13] $L > 0$ とする．任意の Riemann 面 Σ 及び正則写像 $f : \Sigma \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ に対して，性質 P_L を

$$|f| < L \quad \text{on } \Sigma \quad \text{or} \quad f \equiv (\text{constant}) \quad \text{on } \Sigma$$

と定めると， P_L は m -curvature estimate をみたす compact property である．■

例 3.2 [KK, Theorem 2.14] $X \subset \widehat{\mathbb{C}}$ とする．任意の Riemann 面 Σ 及び正則写像 $f : \Sigma \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ に対して，性質 P_X を

$$f(\Sigma) \subset \widehat{\mathbb{C}} \setminus X \quad \text{or} \quad f \equiv (\text{constant}) \quad \text{on } \Sigma$$

と定める．このとき，

除外値集合 X の元の個数が $\#X > 2$ のとき， P_X は compact property になり，
さらに $\#X > m + 2$ のとき， P_X は m -curvature estimate をみたす．■

例 3.3 [Kas, Theorem 3.3] $q \in \mathbb{Z}_{>0}$ ， $\alpha(q) := \{\alpha_1, \dots, \alpha_q\}$ を異なる q 個の $\widehat{\mathbb{C}}$ の点， $\mu_1, \dots, \mu_q \in \mathbb{Z}_{\geq 2} \cup \{\infty\}$ とする．任意の Riemann 面 Σ 及び正則写像 $f : \Sigma \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ に対して，性質 $P_{\alpha(q)}$ を

$$\text{各 } \alpha_j \text{ は位数 } \mu_j \text{ 以上の } g \text{ の完全分岐値} \quad \text{or} \quad g \equiv (\text{constant}) \quad \text{on } \Sigma$$

と定める．このとき，

weight の総和が $\gamma := \sum_{j=1}^q \left(1 - \frac{1}{\mu_j}\right) > 2$ のとき， $P_{\alpha(q)}$ は compact property になり，
 $\gamma = \sum_{j=1}^q \left(1 - \frac{1}{\mu_j}\right) > m + 2$ のとき， $P_{\alpha(q)}$ は m -curvature estimate をみたす．■

例えば，compact property P_X ($\#X > 2$) に対して，命題 2.2(A), (B), 定理 2.3 を順に用いると，

- 3 点を除外値にもつ $\mathbb{C}$ 上全体で定義される有理型関数は定数関数に限る (Picard の小定理)．
- 正則写像 $g : \mathbb{D} \setminus \{0\} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ が 3 点を除外値にもつならば， $z = 0$ は真性特異点ではない (Picard の大定理)．
- $a, b, c \in \widehat{\mathbb{C}}$ を除外値にもつ関数族は正規族 (Carathéodory–Montel の定理)．

4 様々な曲面のクラスへの応用

4.1 $\mathbb{R}^3$ 内の極小曲面への応用

Weierstrass の表現公式から, $\mathbb{R}^3$ 内の正則極小曲面は $m = 2$ のクラスの Weierstrass m -triple とわかる. 注意 2.7 と P_X ($\#X > 2 + 2$) が 2-curvature estimate をみたすことから, 藤本の定理が得られる:

定理 4.1 $\mathbb{R}^3$ 内の平面でない完備な正則極小曲面の Gauss 写像の除外値数の上限は $4 (= 2 + 2)$ である. さらに, この結果は最良である.

4.2 $\mathbb{R}^3$ 内の非固有アファイン波面への応用

Martínez は [Mar] において, 非固有アファイン球面となめらかな $\mathbb{C}^2$ への特殊 Lagrangian はめ込みの間の対応を見つけ, さらに非固有アファイン球面に特異点を許した非固有アファイン写像の概念を導入した. ここで, 非固有アファイン写像は波面と呼ばれる特異点を許したクラスの曲面になることがわかるため, [KN] では非固有アファイン波面と呼んでいる. 非固有アファイン波面にも, 表現公式があり, 特に $m = 1$ のクラスの Weierstrass m -triple であることが知られている. P_X ($\#X > 1 + 2$) が 1-curvature estimate をみたすことから, 次の主張が得られる:

定理 4.2 3次元アファイン空間 $\mathbb{R}^3$ 内の弱完備な非固有アファイン波面の Lagrangian Gauss 写像が非定値ならば, その除外値数の上限は $3 (= 1 + 2)$. さらに, この結果は最良である.

参考文献

- [Bloch] A. Bloch : La conception actuelle de la théorie des fonctions entières et méromorphes, Enseignement Math. **25** (1926), 83-103.
- [Fuji] H. Fujimoto : On the number of exceptional values of the Gauss maps of minimal surfaces, J. Math. Soc. Japan **40** (1988), No.2, 235-247.
- [KK] S. Kasao, Y. Kawakami : Bloch-Ros principle and its application to surface theory, Bull. Malays. Math. Sci Soc. **48** (2025), no.4, Paper No. 127, 36 pp.
- [KN] Y. Kawakami & D. Nakajo : Value distribution of the Gauss map of improper affine spheres, J. Math. Soc. Japan **64** (2012), No.3, 799—821.
- [Kas] S. Kasao : Application of the Bloch–Ros principle to ramification theorem, arXiv:2605.29567 (2026).
- [Kaw] Y. Kawakami : On the maximal number of exceptional values of Gauss maps for various classes of surfaces, Math. Z. **274** (2013), No.3-4, 1249-1260.
- [Mar] A. Martínez : Improper affine maps, Math. Z. **249** (2005), No.4, 755—766.
- [Ros] A. Ros : The Gauss map of minimal surfaces, Differential Geometry, Valencia 2001, Proceedings of the conference in honour of Antonio M. Naveira, edited by O. Gil-Medrano and V. Miquel, World Scientific, (2002) 235-252.
- [Zal75] L. Zalcman : A heuristic principle in complex function theory, Amer. Math. Monthly **82** (1975), No.8, 813-817.
- [Zal98] L. Zalcman : Normal families: new perspectives, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **35** (1998), No.3, 215-230.

値分布論における組み合わせ論的手法

勝田宗平 (名古屋大学大学院多元数理科学研究科)*

1 序

本講演では値分布論 (Weyl–Ahlfors 理論) において、組み合わせ論的な概念が出現することを紹介し、その仕組み、背景にある原理について、現在講演者が考えていることをお話ししたい。Nevanlinna 理論とは正則曲線の値分布を調べる研究分野である。この分野の原点は複素関数論における次の Picard の定理である。

Theorem 1.1 (Picard の (小) 定理, 1878). 非定数有理型関数 $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{P}^1$ の除外値は高々 2 点である。すなわち f は $\mathbb{P}^1$ の高々 2 点を除き全射となる。

Picard の定理は Nevanlinna 理論における**第二主要定理 (SMT)** から導かれる。その証明 (Gauss–Bonnet の定理を用いる) から、除外値の 2 という数字は幾何学的には Riemann 球面 $\mathbb{P}^1$ の Euler 標数と解釈できる。

Nevanlinna 理論を展開する手法は様々知られているが、本講演では **Weyl–Ahlfors 理論** と呼ばれる古典理論に注目する。これは Weyl 父子が見出し [20]、後に L. Ahlfors が [1] で完成させた深淵な理論である。Ahlfors 自身、この論文が “tour de force” であると述べている。本講演における組み合わせ論的構造を観察するにはこのアプローチを用いることが本質的である。また、この手法の興味深い点は、Vojta [18] により見出された、Diophantus 近似論との類似性にある。特に Picard の定理には次の有名な Roth の定理が「対応」する。

Theorem 1.2 (Roth の定理, 1955). $\alpha \in \mathbb{R}$ を次数 2 以上の代数的数とする。 $\epsilon > 0$ に対し、不等式

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^{2+\epsilon}}$$

を満たす $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}_{>0}$, $\gcd(p, q) = 1$ は有限個である。

組み合わせ論的な構造が、Diophantus 近似論の文脈ではどう出現するかについても後述する (第 6 節)。

2 Weyl–Ahlfors 理論とは

本節では簡単に Weyl–Ahlfors 理論を説明する。これは複素射影空間 $\mathbb{P}^n$ 内の正則曲線の値分布論である。このような状況を初めて扱ったのは恐らく E. Borel であり後に A. Bloch, H. Cartan らが発展させた。

$$\mathbf{x} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^n, \quad z \mapsto \mathbf{x}(z) = (x_0(z) : x_1(z) : \cdots : x_n(z))$$

が**正則曲線**であるとは、各 $x_i(z)$ が $\mathbb{C}$ 上の正則関数であることをいう。Nevanlinna 理論では $\mathbf{x}$ を開円板 $\mathbb{D}(r)$ に制限し、像 $\mathbf{x}(\mathbb{D}(r))$ の $r \rightarrow \infty$ による極限の挙動を調べることで、 $\mathbf{x}$ の値分布を研究する。各 $x_i(z)$ から共通零点を除き値域を $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ に lift した $\mathbf{x}$ の一つの表現 $\mathbf{x}_{\text{red}} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ を $\mathbf{x}$ の**既約表現**という。既約表現は零点を持たない整関数倍の違いを除き一意的に定まる。以下 $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ への写像を考えるときは常に既約表現 $\mathbf{x}_{\text{red}}$ を考えることにし、同じ記号 $\mathbf{x}$ を用いる。更に、 $\mathbf{x}$ は**線形非退化**である、すなわち $\mathbf{x}$ の像が $\mathbb{P}^n$ のどの超平面にも含まれないことを仮定する。Weyl–Ahlfors 理論の核となるアイデアは、以下で定義される、

* 本研究は特別研究員奨励費 (課題番号:24KJ1283) の助成を受けたものである。

Email: shuhei.katsuta.e6@math.nagoya-u.ac.jp

$\mathbf{x}$ に付随する複数の正則曲線の族 $\{\mathbf{X}^{(p)}\}_{p=0}^{n+1}$ を考えることにする。正則曲線

$$\mathbf{X}^{(p)} := [\mathbf{x} \wedge \mathbf{x}' \wedge \cdots \wedge \mathbf{x}^{(p-1)}] : \mathbb{C} \rightarrow \text{Gr}(p, n+1) \hookrightarrow \mathbb{P}\left(\bigwedge^p \mathbb{C}^{n+1}\right) \simeq \mathbb{P}^{\binom{n+1}{p}-1}$$

を p 次の**導来曲線**という。形式的に $\mathbf{X}^{(0)} := 1$ と定める。この定義について、もう少し詳しく説明しよう。各 $z \in \mathbb{C}$ に対し、 $[\mathbf{x}(z) \wedge \mathbf{x}'(z) \wedge \cdots \wedge \mathbf{x}^{(p-1)}(z)]$ は $p-1$ 階までの微分で定まるベクトル $\mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z), \dots, \mathbf{x}^{(p-1)}(z)$ で張られる部分空間と同一視できる。これは $\mathbb{C}^{n+1}$ 内の p 次元部分空間全体の空間である複素 Grassmann 多様体 $\text{Gr}(p, n+1)$ の点を定める。よく知られているように、複素 Grassmann 多様体は Plücker 埋め込みを介して射影空間に埋め込むことができる。いまの場合、 $\mathbf{x}^{(k)} (0 \leq k \leq p-1)$ を並べてできる $n \times p$ 行列の全ての $p \times p$ 小行列式を成分とした点が射影空間 $\mathbb{P}^{\binom{n+1}{p}-1}$ の点を定め、これが埋め込みを与える。この合成によって定まる正則曲線が $\mathbf{X}^{(p)}$ であり、これは既約表現の取り方によらず well-defined に定まる。Weyl–Ahlfors 理論の基本思想は、高次の接触情報を用いることで $\mathbf{x}$ に関するより詳細な情報を引き出す試み、といえる。

Nevanlinna 理論では (いずれのアプローチにおいても) 基本となる 3 つの関数が登場する。 $0 \neq \mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{C}^{n+1})^*$ を固定し $\mathbf{w} = (w_0, w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ に対し、 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{w} := a_0 w_0 + a_1 w_1 + \cdots + a_n w_n$ と定義する。この記法の下、 $\mathbf{x}$ の**接近関数**、**個数関数**、**位数関数**をそれぞれ次のように定義する：

$$\begin{aligned} m(r, \mathbf{a}) &:= \int_0^{2\pi} \log \frac{|\mathbf{a}| |\mathbf{x}(re^{\sqrt{-1}\theta})|}{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}(re^{\sqrt{-1}\theta})|} \frac{d\theta}{2\pi}, \\ N(r, \mathbf{a}) &:= \int_{r_0}^r \sum_{|z| < t} v(z, \mathbf{a}) \frac{dt}{t}, \\ T(r) &:= N(r, \mathbf{a}) + m(r, \mathbf{a}) - m(r_0, \mathbf{a}). \end{aligned}$$

ここで $r_0 > 0$ は十分小さい正数、 $v(z, \mathbf{a})$ は正則関数 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}$ の z における零点の位数である。接近関数、個数関数はそれぞれ、超平面 $\{\mathbf{a} \cdot \mathbf{w} = 0\}$ への $\mathbf{x}$ の平均接近度、平均交点数を測っている。 $\mathbf{X}^{(p)}$ についても上記の関数が同様に定義できる。それらを $m_p(r, \mathbf{A}^{(p)})$, $N_p(r, \mathbf{A}^{(p)})$ ($\mathbf{A}^{(p)} \in (\bigwedge^p \mathbb{C}^{n+1})^*$), $T_p(r)$ と書こう。位数関数の重要性は次の**第一主要定理 (FMT)**にある。

Theorem 2.1 (第一主要定理 (FMT) [20, 1]). $T_p(r)$ は $0 \neq \mathbf{A}^{(p)} \in (\bigwedge^p \mathbb{C}^{n+1})^*$ の取り方によらない。

FMT は「接近」状態を一種の交点とみなせば非コンパクトな $\mathbb{C}$ 上でも交点理論が展開できる、と解釈できる。次の幾何学的解釈も重要である (これを位数関数の定義にすることも多い)。

Theorem 2.2 (清水–Ahlfors 表現 [15, 1]).

$$T_p(r) = \int_{r_0}^r \frac{dt}{t} \int_{\mathbb{D}(t)} (\mathbf{X}^{(p)})^* \omega_{FS} = \frac{1}{\pi} \int_{r_0}^r \frac{dt}{t} \int_{\mathbb{D}(t)} \frac{|\mathbf{X}^{(p-1)}(se^{\sqrt{-1}\theta})|^2 |\mathbf{X}^{(p+1)}(se^{\sqrt{-1}\theta})|^2}{|\mathbf{X}^{(p)}(se^{\sqrt{-1}\theta})|^4} ds d\theta.$$

ここで $\omega_{FS} := \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} \log |w|^2$ ($w \in \mathbb{P}^{\binom{n+1}{p}-1}$) は $\mathbb{P}^{\binom{n+1}{p}-1}$ における Fubini–Study 計量である。

すなわち、位数関数は像 $\mathbf{X}^{(p)}(\mathbb{D}(r))$ の Fubini–Study 計量に関する面積の平均である。面積の列 $\{T_p(r)\}_{p=0}^{n+1}$ を組み合わせ論的な視点から調べる、というのが本研究の立場である。ここで関数 $\Omega_p(r)$ を次のように定義する：

$$\Omega_p(r) := \int_0^{2\pi} \log \frac{|\mathbf{X}^{(p-1)}(re^{\sqrt{-1}\theta})| |\mathbf{X}^{(p+1)}(re^{\sqrt{-1}\theta})|}{|\mathbf{X}^{(p)}(re^{\sqrt{-1}\theta})|^2} \frac{d\theta}{2\pi}.$$

次に述べる Ω_p と T_p らの関係は、代数曲線に対する古典的な Plücker 公式 ([7] 参照) のアナロジーを与える。

Theorem 2.3 (Plücker 公式 [20, 1]).

$$T_{p-1}(r) - 2T_p(r) + T_{p+1}(r) \leq \Omega_p(r) - \Omega_p(r_0).$$

また, Ω_p は次の意味で「負」に寄与することが重要である.

Theorem 2.4 (Ω_p は small term [20, 1]). 定数 $\kappa > 1$ と $C \in \mathbb{R}$ に対し次が成立.

$$\Omega_p(r) \leq \frac{\kappa}{2} \log T_p(r) - \log r + C //.$$

ここで記号 $//$ は $\mathbb{R}$ の Lebesgue 測度有限の部分集合を除き不等号が成立することを意味する.

上記 2 つの定理から, T_p の二階差分は ($O(\log T(r))$ を modulo にして) 負であることがわかり, これは $\{T_p\}_{p=0}^{n+1}$ が “concave” である, と解釈できる.

第一主要定理を特異積分を用いて平均化することで, 理論の解析 part の鍵を握る**対数微分の補題 (LLD)**([1] §5 を参照) が得られる. Plücker 公式と LLD の組み合わせにより次の SMT を得る.

Theorem 2.5 (第二主要定理 (SMT)(の特殊な場合) [1]). $\{\mathbf{A}_j^{(p)}\}_{j=1}^d$ を一般の位置にある分解可能な p ベクトルの有限集合とする. このとき次が成立する:

$$\binom{n}{p-1} N_{n+1}(r) + \sum_{j=1}^d m_p(r, \mathbf{A}_j^{(p)}) \leq \binom{n+1}{p} \overline{T}_p(r) + O(\log T(r)) //.$$

ここで N_{n+1} は Wronskian $\mathbf{X}^{(n+1)}$ の零点を (個数関数の定義と同様に) 数え上げたものである. また $\overline{T}_p(r)$ は T_p に $\mathbf{X}^{(p)}$ の各成分の共通零点に関する数え上げ関数を足したものである.

特に, $p = 1, n = 1$ とすると

$$N_2(r) + \sum_{j=1}^d m(r, \mathbf{a}_j) \leq 2T(r) + O(\log T) //$$

を得, **defect** $\delta(\mathbf{a}) := \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{m(r, \mathbf{a})}{T(r)}$ を導入すると, $\sum_{j=1}^d \delta(\mathbf{a}_j) \leq 2$ と書ける (**defect relation**). もし点 $(a_0 : a_1) \in \mathbb{P}^1$ が $\mathbf{x} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^1, z \mapsto (x_0(z) : x_1(z))$ の除外値であれば (つまり $\frac{a_0}{a_1}$ が有理型関数 $f = \frac{x_0}{x_1}$ の除外値であれば) FMT より $\delta((a_1 : -a_0)) = 1$ となるので, この不等式から除外値は高々 2 つしか取り得ないことが従い, Picard の定理が証明される. 以上が Weyl–Ahlfors 理論の全体像である.

3 Weyl の peculiar relation

Weyl 父子の教科書 [21] には, “peculiar relation” と題されたわずか 3 頁のみの謎めいた記述がある. この不思議な関係式が組み合わせ構造への入り口となるため, まずは必要な記法を準備しよう.

いま正則曲線 $\mathbf{X}^{(p)} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^{\binom{n+1}{p}-1}$ は線形非退化であると仮定する. このとき, $\mathbf{X}^{(p)}$ の高階微分をとりその wedge 積をとることで, $\mathbf{X}^{(p)}$ に対しても導来曲線が定義される. よって $\mathbf{X}^{(p)}$ の位数関数や Ω も定義することができるが, それぞれ $T_i\{\mathbf{X}^{(p)}\}(r), \Omega_i\{\mathbf{X}^{(p)}\}(r)$ と書くことにする. 定義から明らかに $T_p = T_1\{\mathbf{X}^{(p)}\}$ である. Weyl 父子は「導来曲線の導来曲線」を元の導来曲線のデータで記述する試みの中で次を得た.

Theorem 3.1 (Peculiar relation [21]).

$$T_{p-1} + T_{p+1} = T_2\{\mathbf{X}^{(p)}\}, \quad \max(\Omega_{p-1}, \Omega_{p+1}) \leq \Omega_2\{\mathbf{X}^{(p)}\}.$$

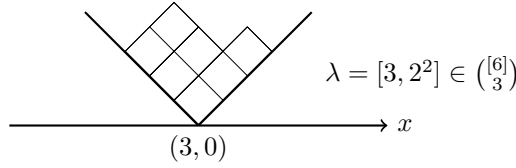
Weyl はこの関係式について “a strange relation of which we are not aware whether it is known even for rational and algebraic curves.” ([21], p. 162 より引用) と述べている. また, これらの明示的關係式は $T_i\{\mathbf{X}^{(p)}\}$ ($i \geq 3$) に対しては成立しないことが注意されている. そこで $i \geq 3$ の場合に $T_i\{\mathbf{X}^{(p)}\}$ が $\{T_k\}_{k=0}^{n+1}$ のデータを用いてどのように評価できるか, という問いが自然に考えられる. 講演者は, この問題に取り組む中で peculiar relation の背景には Young 図形の組み合わせ論があり, その視点が本質的であることに気が付いた. また, 後述するように peculiar relation は SMT の逆向きの不等式を考えていることに相当すると解釈できる. 以下 peculiar relation の一般化を述べるために, 本講演で用いる Young 図形に関連するいくつかの用語, 記法を定義しよう.

4 Young 図形と標準盤

非負整数 n の p 個の非負整数への分割 $n = \lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_{p-1}$ ($\lambda_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_{p-1}$) を $\lambda = [\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}]$ と書こう ($\lambda_i = \lambda_{i+1} = \cdots = \lambda_{i+k-1}$ の部分はまとめて λ_i^k と書く). n 個の箱を準備し, 第 i 行に箱を λ_{i-1} 個 (左端を揃え) 並べてできる図形を **Young 図形** といい, 同じ記号 λ で表す. 空な Young 図形は $\emptyset$ で表し, λ の箱の数を $|\lambda|$ と書く. Young 図形は表現論をはじめ様々な分野に現れる組み合わせ論的对象である. ここで集合 $\left(\begin{smallmatrix} [n+1] \\ p \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} [n+1] \\ p \end{smallmatrix}\right)_{(s)}$ を次のように定義する.

$$\left(\begin{smallmatrix} [n+1] \\ p \end{smallmatrix}\right) := \{p \times (n-p+1)\text{-長方形に含まれる Young 図形}\}, \quad \left(\begin{smallmatrix} [n+1] \\ p \end{smallmatrix}\right)_{(s)} := \left\{ \lambda \in \left(\begin{smallmatrix} [n+1] \\ p \end{smallmatrix}\right) \mid |\lambda| = s \right\}.$$

Young 図形 $\lambda \in \left(\begin{smallmatrix} [n+1] \\ p \end{smallmatrix}\right)$ を $\mathbb{R}^2$ 上に下図のように斜めに描いたものは露式の Young 図形と呼ばれる.



ここで各箱の一辺の長さは $\sqrt{2}$ となるようにスケーリングされている. 通常は Young 図形の下端が原点に来るように配置されるが, ここでは $(p, 0)$ に下端を配置する. Young 図形 $\lambda \in \left(\begin{smallmatrix} [n+1] \\ p \end{smallmatrix}\right)$ に対し, 数え上げ関数 $n_\lambda : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を

$$n_\lambda(k) := \mathbb{R}^2 \text{ 上で直線 } x = k \text{ と交わる } \lambda \text{ の正方形の数}$$

と定義する. 更に n_λ を用いて

$$T_\lambda := \sum_{k=1}^n n_\lambda(k)(T_{k-1} - 2T_k + T_{k+1}) + T_p$$

と定義する. この関数が以下の議論で重要な役割を果たす. 二階差分は「負」に寄与するため, T_λ は正にも負にもなりうることに注意する. 上記のように露式で配置した Young 図形の (上側の) 境界を profile という. profile の谷と山に対応する x 座標を交互に並べた $(x_1 < y_1 < \cdots < y_{r-1} < x_r)$ を洞 [8] の用語に従い山谷座標とよぼう. ここで x_i は谷, y_i は山に対応する. 上記の例の場合 $(0 < 2 < 4 < 5 < 6)$ と書ける. 次の補題は T_λ を計算する際に便利である ($T_0 = T_{n+1} = 0$ に注意せよ). この見方は岡田聡一先生に教えていただいた.

Lemma 4.1 (T_λ の別表現 [13]).

$$T_\lambda = \sum_{i=1}^r T_{x_i} - \sum_{i=1}^{r-1} T_{y_i}.$$

ここで $(x_1 < y_1 < \cdots < y_{r-1} < x_r)$ は λ の山谷座標である.

量 T_λ が $\left(\begin{smallmatrix} [n+1] \\ p \end{smallmatrix}\right)$ の上で平均的に分布していることを示すのが次の釣り合い和公式である.

Proposition 4.2 (釣り合い和公式 [9]).

$$\sum_{\lambda \in \left(\begin{smallmatrix} [n+1] \\ p \end{smallmatrix}\right)} T_\lambda = 0.$$

ここで「釣り合い」とは「負」に寄与する量である二階差分 $T_{k-1} - 2T_k + T_{k+1}$ (の族) と, 正に寄与する量 T_p が $\left(\begin{smallmatrix} [n+1] \\ p \end{smallmatrix}\right)$ 全体では打ち消しあうことを意味している. 第 7 節では $\{T_\lambda\}_{\lambda \in \left(\begin{smallmatrix} [n+1] \\ p \end{smallmatrix}\right)}$ の分布をより詳細に調べる.

次に標準盤の概念を導入する. Young 図形 λ ($|\lambda| = n$) の各箱に 1 から n までの自然数を, 右方向, 下方向それぞれに狭義単調増加となるように書き込んだものを λ を台にもつ**標準盤**という. f_λ で λ を台に持つ標準盤の個数を表す. f_λ の計算法として次がよく知られている.

Theorem 4.3 (hook 長公式 [4]).

$$f_\lambda = \frac{|\lambda|!}{\prod_{(i,j) \in \lambda} h(i,j)}.$$

ここで $h(i,j)$ は (i,j) で添字付けられた箱の右, 下にある λ の箱の総数である ((i,j) の箱も 1 度だけ数える).

f_λ には別の組み合わせ的解釈もある. $p \times (n-p+1)$ -長方形 $[(n-p+1)^p]$ に含まれる Young 図形全体の集合は包含関係を半順序として束をなす. これを **Young 束** とよび $\mathbb{Y}_{[(n-p+1)^p]}$ とかく. $\mathbb{Y}_{[(n-p+1)^p]}$ を Hasse 図として表示したとき, $\lambda \in \binom{[n+1]}{p}$ に対し $\emptyset$ から λ への全ての道 (飽和鎖とよぶ) c の総数は f_λ に一致する. これは Hasse 図において, λ の箱に書き込まれた数字順に辿った飽和鎖が λ と対応することからわかる.

5 一般化 Weyl の peculiar relation

前節の記法を用いて Weyl の peculiar relation は次のように一般化される.

Theorem 5.1 (一般化 Weyl の peculiar relation [9]). $1 \leq i \leq p(n-p+1)$ に対して次が成立する:

$$\sum_{s=0}^{i-1} \max_{\lambda \in \binom{[n+1]}{p}_{(s)}} T_\lambda \leq T_i\{\mathbf{X}^{(p)}\} + O(1) //, \quad \max_{\lambda \in \binom{[n+1]}{p}_{(i)}} \left(\sum_{k=1}^n n_\lambda(k) \Omega_k \right) \leq \sum_{k=1}^i \Omega_k\{\mathbf{X}^{(p)}\}.$$

ここで, 第一式は次の意味で sharp である: $\epsilon > 0$ に対し, 右辺を $(1-\epsilon)T_i\{\mathbf{X}^{(p)}\}$ と置き換えると不等式を破るような線形非退化正則曲線 $\mathbf{x}$ が存在する.

まず, この定理が Theorem 3.1 の一般化と考えられる理由を位数関数の場合に確認しよう. $i = 1, 2$ のとき, 第一式はそれぞれ

$$T_p \leq T_1\{\mathbf{X}^{(p)}\} + O(1) //, \quad T_{p-1} + T_{p+1} = (T_{p-1} - 2T_p + T_{p+1}) + 2T_p \leq T_2\{\mathbf{X}^{(p)}\} + O(1) //$$

となる. (不等式にはなっているが) 確かに左辺に元々の peculiar relation に登場した量が出てきている. 第 8 節で説明するようにこれは sharp な結果であるから, 左辺に登場する Young 図形ごとの箱の数え上げは本質的である. ただ, $i \geq 3$ のとき上の不等式を等式に改善するのは現時点では難しいように思われる.

この定理の第一不等式の証明は, 第二不等式と stationary index と呼ばれる正則曲線の接触次数に関する計算を組み合わせることによってなされる. そこで, ここでは $\Omega_k\{\mathbf{X}^{(p)}\}$ に関する第二不等式の証明の概略を説明する. また以下の議論では $\binom{[n+1]}{p}$ を集合 $\{(i_0, i_1, \dots, i_{p-1}) \in \mathbb{Z}^p \mid 0 \leq i_0 < i_1 < \dots < i_{p-1} \leq n\}$ と同一視する ($(\sigma = (i_0, i_1, \dots, i_{p-1}) \mapsto \lambda(\sigma) := [i_{p-1}-p+1, i_{p-2}-p+2, \dots, i_1-1, i_0])$ が全単射を与える).

Theorem 5.1 の証明の流れ. $\mathbf{X}^{(p)}$ を正則曲線 $\mathbf{X}^{(p)}$ の i 階微分とする. Young 図形は $\mathbf{X}^{(p)}$ を次のように分解する過程で現れる:

$$\mathbf{X}^{(p)} = \sum_{\sigma \in \bigcup_{k \geq p-1} \binom{[k+1]}{p}_{(i)}} f_{\lambda(\sigma)} \mathbf{X}_\sigma^{(p)}.$$

ここで $\mathbf{X}_\sigma^{(p)} := \mathbf{x}^{(i_0)} \wedge \mathbf{x}^{(i_1)} \wedge \dots \wedge \mathbf{x}^{(i_{p-1})}$, $\sigma = (i_0, i_1, \dots, i_{p-1})$ である. 証明は Leibniz rule による. Young 図形に対応する Maya 図形で, 微分操作に対応し, 球を 1 つ右に動かす様子を想像するとわかりやすいだろう.

考える対象は「導来曲線の導来曲線」だから,

$$\mathbf{X}^{(p)} \wedge \mathbf{X}^{(1)} \wedge \dots \wedge \mathbf{X}^{(i)}_{(p)}$$

を評価する必要がある。そのために、Frenet 座標を用い、各点 $z \in \mathbb{C}$ において、 $\mathbf{x}, \mathbf{x}', \dots, \mathbf{x}^{(n)}$ を

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(z) &= (x_0, 0, \dots, 0) \\ \mathbf{x}'(z) &= (*, x_1^{(1)}, 0, \dots, 0) \\ &\vdots \\ \mathbf{x}^{(n)}(z) &= (*, *, \dots, *, x_n^{(n)})\end{aligned}$$

と表示する。 $\mathbf{X}_\sigma^{(i)(p)} = ((X_\sigma^{(p)})_\tau)_{\tau \in \binom{[n+1]}{p}}^{(i)}$ を $\mathbb{C}^{\binom{n+1}{p}}$ 上の $\mathbf{X}_\sigma^{(i)(p)}$ の座標表示とすると、上記の分解を用いて次が示せる:

$$|\mathbf{X}^{(p)} \wedge \mathbf{X}^{(1)(p)} \wedge \dots \wedge \mathbf{X}^{(i)(p)}|^2 \geq |\mathbf{X}^{(p)} \wedge \mathbf{X}^{(1)(p)} \wedge \dots \wedge \mathbf{X}^{(i-1)(p)}|^2 \sum_{\sigma \in \binom{[n+1]}{p}_{(i)}} f_{\lambda(\sigma)}^2 |(X_\sigma^{(p)})_\sigma|^2.$$

ここで

$$\tilde{S}^p := \frac{|\mathbf{X}^{(p-1)}|^2 |\mathbf{X}^{(p+1)}|^2}{|\mathbf{X}^{(p)}|^4}, \quad \tilde{S}^k\{\mathbf{X}^{(p)}\} := \frac{|\mathbf{X}^{(p)} \wedge \mathbf{X}^{(1)(p)} \wedge \dots \wedge \mathbf{X}^{(k-2)(p)}|^2 |\mathbf{X}^{(p)} \wedge \mathbf{X}^{(1)(p)} \wedge \dots \wedge \mathbf{X}^{(k)(p)}|^2}{|\mathbf{X}^{(p)} \wedge \mathbf{X}^{(1)(p)} \wedge \dots \wedge \mathbf{X}^{(k-1)(p)}|^4}$$

とおく。このとき $\Omega_p = \int_0^{2\pi} \log \tilde{S}^p \frac{d\theta}{4\pi}$, $\Omega_k\{\mathbf{X}^{(p)}\} = \int_0^{2\pi} \log \tilde{S}^k\{\mathbf{X}^{(p)}\} \frac{d\theta}{4\pi}$ である。上記不等式を繰り返し用い

$$\prod_{k=1}^i \tilde{S}^k\{\mathbf{X}^{(p)}\} \geq \sum_{\sigma \in \binom{[n+1]}{p}_{(i)}} f_{\lambda(\sigma)}^2 \frac{|(X_\sigma^{(p)})_\sigma|^2}{|\mathbf{X}^{(p)}|^2}$$

を得る。右辺を計算しよう。まず $|\mathbf{X}^{(p)}| = |x_0 x_1^{(1)} \dots x_{p-1}^{(p-1)}|$ である。ここから、要となる表示式

$$\frac{|\mathbf{X}^{(p-1)}| |\mathbf{X}^{(p+1)}|}{|\mathbf{X}^{(p)}|^2} = \frac{|x_p^{(p)}|}{|x_{p-1}^{(p-1)}|} \quad (\star)$$

が得られる。いま $k \leq i_k \leq n$ に対し、分解

$$\frac{|x_{i_k}^{(i_k)}|^2}{|x_k^{(k)}|^2} = \frac{|x_{k+1}^{(k+1)}|^2}{|x_k^{(k)}|^2} \frac{|x_{k+2}^{(k+2)}|^2}{|x_{k+1}^{(k+1)}|^2} \dots \frac{|x_{i_k}^{(i_k)}|^2}{|x_{i_k-1}^{(i_k-1)}|^2} = \tilde{S}^{k+1} \tilde{S}^{k+2} \dots \tilde{S}^{i_k}$$

がある。よって、 $\sigma = (i_0, i_1, \dots, i_{p-1}) \in \binom{[n+1]}{p}$ に対し、 $|(X_\sigma^{(p)})_\sigma| = |x_{i_0}^{(i_0)} x_{i_1}^{(i_1)} \dots x_{i_{p-1}}^{(i_{p-1})}|$ に注意すると、

$$\frac{|(X_\sigma^{(p)})_\sigma|^2}{|\mathbf{X}^{(p)}|^2} = \frac{|x_{i_0}^{(i_0)} x_{i_1}^{(i_1)} \dots x_{i_{p-1}}^{(i_{p-1})}|^2}{|x_0 x_1^{(1)} \dots x_{p-1}^{(p-1)}|^2} = \prod_{k=0}^{p-1} \tilde{S}^{k+1} \tilde{S}^{k+2} \dots \tilde{S}^{i_k}$$

となる。実は、ここで右辺は $\prod_{k=1}^n (\tilde{S}^k)^{n_{\lambda(\sigma)}(k)}$ と等しいことが示される。上記の結果をまとめて次を得る:

$$\prod_{k=1}^i \tilde{S}^k\{\mathbf{X}^{(p)}\} \geq \sum_{\sigma \in \binom{[n+1]}{p}_{(i)}} f_{\lambda(\sigma)}^2 \prod_{k=1}^n \tilde{S}^{n_{\lambda(\sigma)}(k)}.$$

両辺の log を取り積分すれば定理が得られる。 $\square$

6 一階差分と二階差分をつなぐ仕組み

数列が与えられたとき、その (log-)concavity は組み合わせ論的に興味のある問題である (Alexandrov–Fenchel 不等式, matroid の特性多項式の係数など)。ここで、少し脇道に逸れ、数列の concavity という観点から、上記の計算がうまく機能した仕組みについて考える。(一般化)Weyl の peculiar relation の証明では式変形 (★) が鍵であり、両辺の log を取ることで、左辺は二階差分、右辺は一階差分となった。ここで、Diophantus 近似論 (Minkowski の数の幾何) 側ではこの構造がどのように表れるか観察しよう ([19] を参考にした)。

Definition 6.1 (逐次最小). $K \subset \mathbb{R}^{n+1}$ を原点对称で原点を内点として含む凸体とする. K を相似拡大 (あるいは縮小) して初めて 0 以外の格子点 ($\mathbb{Z}^{n+1}$ の点) を含む倍率 λ_1 を **第 1 逐次最小** という. すなわち,

$$\lambda_1 := \inf\{\lambda > 0 \mid \lambda K \cap (\mathbb{Z}^{n+1} \setminus \{0\}) \neq \emptyset\}.$$

同様に λK が初めて i 個の線形独立な格子点を含む倍率 λ_i を **第 i 逐次最小** という.

$\mathbb{R}^{n+1}$ 上の $\mathbb{R}$ 上線形独立な実代数的数を係数に持つ $n+1$ 個の線形形式 $L_i(\mathbf{x}) = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{x} = \sum_{j=0}^n a_{ij}x_j$ を考える. 正則曲線の場合と同様に wedge 積を取ることで $\mathbf{X}^p \in \bigwedge^p \mathbb{R}^{n+1}$ の線形形式

$$L_\sigma(\mathbf{X}^p) := (\mathbf{a}_{i_0} \wedge \mathbf{a}_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{a}_{i_{p-1}}) \cdot \mathbf{X}^p, \quad \sigma = (i_0, i_1, \dots, i_{p-1}) \in \binom{[n+1]}{p}$$

が定義される. $\sum_{i=0}^n c_i = 0$ なる実数 $c_i \in \mathbb{R}$ と $Q > 0$ に対し, 不等式の系

$$|L_\sigma(\mathbf{X}^p)| \leq Q^{c_{i_0} + c_{i_1} + \cdots + c_{i_{p-1}}}, \quad \sigma = (i_0, i_1, \dots, i_{p-1}) \in \binom{[n+1]}{p}$$

は各 p において $\bigwedge^p \mathbb{R}^{n+1} \simeq \mathbb{R}^{\binom{n+1}{p}}$ における平行多面体 $\Pi_p(Q)$ を定める. このとき, $\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_p \gg \mu_1^{(p)}$ が知られている. ここで $\lambda_i = \lambda_i(Q)$ は $\Pi_1(Q)$ の第 i 逐次最小, $\mu_1^{(i)} = \mu_1^{(i)}(Q)$ は $\Pi_i(Q)$ の第 1 逐次最小であり, 記号 $f \gg g$ は定数 $C_1, C_2 > 0$ が存在し $C_1|g| \leq |f| \leq C_2|g|$ なることを意味する. よって, 次の式を得る:

$$\frac{\mu_1^{(p-1)} \mu_1^{(p+1)}}{(\mu_1^{(p)})^2} \gg \frac{\lambda_{p+1}}{\lambda_p} \quad (\text{ここで } \gg \text{ は } Q \text{ に依存しない}).$$

Roth の定理の高次元への一般化である **Schmidt の強部分空間定理** [14] は次のように読み替えられる:

Theorem 6.2. どの $\mathbb{R}^{n+1}$ 内の p 次元部分空間 ($p < n+1$) も, $Q > 0$ 十分大で, $\Pi_1(Q)$ の λ_i に対応する格子点 $\mathbf{g}_i = \mathbf{g}_i(Q)$ で張られる部分空間 $\text{Span}_{\mathbb{R}}(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_p)$ と一致しないと仮定する. このとき数列 $\{\mu_1^{(p)}\}_{p=1}^n$ は ($O(\log Q)$ を modulo にして) $\log$ -concave である: $\log \mu_1^{(p-1)} - 2 \log \mu_1^{(p)} + \log \mu_1^{(p+1)} \leq O(\log Q)$.

これは Plücker 公式 (Theorem 2.3, Theorem 2.4) の数論における対応物だと考えられる. Vojta [18] (の 6 章) による LLD の数論類似によれば, 逐次最小に対応する格子点は正則曲線の微分 (=新しい方向を作り出す操作) に対応していると考えられる. 上に述べた強部分空間定理の書き換えはこの解釈と整合的であり, Nevanlinna 理論との類似の仕組みを解明する上で重要となる見方だと思われる.

7 Theorem 5.1 の非自明性

Theorem 5.1 の左辺がもし負であれば, これは自明な不等式になってしまう. しかし, 組み合わせ論的な手法により実際に非自明な不等式であることがわかる. これは解析的な考察だけではわからないことである.

Theorem 7.1 (Theorem 5.1 の非自明性 [9]). $0 < \epsilon < 1$ とする. このとき各 $1 \leq i \leq p(n-p+1)$ に対し次が成立する:

$$(1 - \epsilon) \min(T_p, T_{n-p+1}) < \sum_{s=0}^{i-1} \max_{\lambda \in \binom{[n+1]}{p}_{(s)}} T_\lambda //.$$

これは次の **重み付き釣り合い和公式**からの帰結である.

Theorem 7.2 (重み付き釣り合い和公式 [9]).

$$\sum_{s=0}^{p(n-p+1)} \sum_{\lambda \in \binom{[n+1]}{p}_{(s)}} f_\lambda f_{\hat{\lambda}} T_\lambda = \sum_{\lambda \in \binom{[n+1]}{p}} f_\lambda f_{\hat{\lambda}} T_\lambda = 0.$$

ここで $\hat{\lambda}$ は $p \times (n-p+1)$ -長方形内の λ の補 Young 図形である.

証明には Young 束上の数え上げと hook 長公式 (Theorem 4.3) を用いる. 詳細は講演中に説明したい.

Remark 7.3. 第 4 節の Proposition 4.2 と本節の Theorem 7.2 は組み合わせ論的な議論で証明されるため T_i を単なる文字 x_i に置き換えても成立する (ただし $x_0 = x_{n+1} = 0$ とする).

この定理を認めて Theorem 7.1 を証明しよう.

Theorem 7.1 の証明. $\{T_k\}_{k=0}^{n+1}$ の二階差分が「負」である (Theorem 2.3, Theorem 2.4) ことから $i = p(n - p + 1)$ の場合が本質的である (詳細は [9] 参照). 以下 $i = p(n - p + 1)$ の場合を考える. $f_\lambda f_{\hat{\lambda}}$ は Young 束 $\mathbb{Y}_{[(n-p+1)^p]}$ 上の $\emptyset$ から $[(n - p + 1)^p]$ への λ を通る飽和鎖の本数と等しいため, Theorem 7.2 の和を入れ替えて

$$\sum_{c \in \{\emptyset \rightarrow [(n-p+1)^p]\}} \sum_{s=0}^{p(n-p+1)} T_{c(s)} = 0$$

を得る. ここで第一の和は $\mathbb{Y}_{[(n-p+1)^p]}$ の Hasse 図において, $\emptyset$ から $[(n - p + 1)^p]$ への全ての飽和鎖 c をわたり, $c(s)$ は c 上 s 番目の頂点にある Young 図形を表す. 特に, その上で $T_{c(s)}$ たちの和が非負となるような飽和鎖 $c = c_0$ が少なくとも 1 本存在し,

$$0 \leq \sum_{s=0}^{p(n-p+1)} T_{c_0(s)} \leq \sum_{s=0}^{p(n-p+1)} \max_{\lambda \in \binom{[n+1]}{p}_{(s)}} T_\lambda$$

となる. しかし, $\binom{[n+1]}{p}_{(p(n-p+1))} = \{[(n - p + 1)^p]\}$ であり Lemma 4.1 により $T_{[(n-p+1)^p]} = -T_{n-p+1}$ となるため,

$$T_{n-p+1} \leq \sum_{s=0}^{p(n-p+1)-1} \max_{\lambda \in \binom{[n+1]}{p}_{(s)}} T_\lambda$$

となり証明が完了する. □

8 Peculiar relation の幾何学的不等式への応用

この節では, 一般化 Weyl の peculiar relation において, 正則曲線 $\mathbf{x}$ として指数曲線を取ったときに得られる, 凸多角形の周長に関する初等幾何学的な不等式を紹介する. また, $\mathbb{R}^2$ 上の良い点配置を選ぶことにより Theorem 5.1 の sharp な評価を与える例が構成できることを説明する. $w_i = a_i - \sqrt{-1}b_i$ ($0 \leq i \leq n$) を相異なる複素数とする. このとき正則曲線 $\mathbf{e}(z) = (e^{w_0 z} : e^{w_1 z} : \dots : e^{w_n z})$ を **指数曲線** という. これは線形非退化である. $\mathbf{e}$ の p 次導来曲線を $\mathbf{E}^{(p)}$ と書こう. いま, $\mathbb{R}^2$ 上の点集合 $V_p := \left\{ \sum_{k=0}^{p-1} (a_{i_k}, b_{i_k}) \right\}_{(i_0, i_1, \dots, i_{p-1}) \in \binom{[n+1]}{p}}$ の凸包の周長を L_p とかく. このとき, 次が成立する.

Proposition 8.1 (指数曲線の位数関数 [1, 21]).

$$T_p(r) = \frac{L_p}{2\pi} r + O(1).$$

ただし, ここで左辺は指数曲線 $\mathbf{E}^{(p)}$ の位数関数である.

「導来曲線の導来曲線」に対応して, V_p 内の i 個の点の和で定まる点を全て $\mathbb{R}^2$ 上に plot する. その凸包の周長を $L_i^{(p)}$ と置こう. このとき, Weyl の (オリジナルの) peculiar relation から次が従う:

$$L_{p-1} + L_{p+1} = L_2^{(p)}.$$

これは凸体 $A, B \subset \mathbb{R}^2$ に対してよく知られた

$$A \text{ の周長} + B \text{ の周長} = A + B \text{ の周長}.$$

の特別な場合である。ここで右辺の $A + B$ は A と B の Minkowski 和である。同様にして、一般化 Weyl の peculiar relation は次の不等式を与える：

Corollary 8.2 (凸多角形の周長に関する幾何学的不等式 [9]).

$$L_p \leq \sum_{s=0}^{i-1} \max_{\sigma \in \binom{[n+1]}{p}_{(s)}} \left(\sum_{k=1}^n n_\lambda(k)(L_{k-1} - 2L_k + L_{k+1}) + L_p \right) \leq L_i^{(p)}.$$

故に、Theorem 5.1 の sharp な評価を得るには第二不等式が等号となるような点配置を見つければよい。そしてそれは実際に次の特殊な配置で達成される。この正則曲線は元々は藤本 [5] が truncated defect relation の best-possible な例として見出したものである。

Proposition 8.3 (Theorem 5.1 の sharpness [9]). 点配置 $\{(a_i, b_i) = (i, 0) \mid 0 \leq i \leq n\}$ は Corollary 8.2 における第二不等式で等号を達成する。特に、この点配置に対応する指数曲線 (を $\mathbf{E}^{(p)}$ が線形非退化となるようにわずかに摂動させたもの) は Theorem 5.1 の sharp な評価を与える。

9 SMT 再訪

Theorem 5.1 の第一式は次のようにも書ける：

$$\sum_{s=1}^{i-1} \max_{\lambda \in \binom{[n+1]}{p}_{(s)}} \left(\sum_{k=1}^n n_\lambda(k)(T_{k-1} - 2T_k + T_{k+1}) \right) + iT_p \leq T_i\{\mathbf{X}^{(p)}\} + O(1) //.$$

ここで左辺の第一和因子 $\sum_{s=1}^{i-1}(\dots)$ は「負」とみなせるような量であった。一方、第二和因子 iT_p は正に寄与する。そのため iT_p を左辺から除くとこの不等式は自明な関係式となる。一方、Weyl–Ahlfors 理論における古典的によく知られる観察から、任意の $\epsilon > 0$ に対し、

$$T_i\{\mathbf{X}^{(p)}\} \leq (i + \epsilon)T_p //$$

が得られる。そこで一般化 Weyl の peculiar relation は iT_p と $T_i\{\mathbf{X}^{(p)}\}$ の比較定理とみるのが自然であるように思われる。 $\mathbf{X}^{(p)}$ が線形非退化なとき、 $\mathbf{X}^{(p)}$ を (導来曲線を取る対象としての) 正則曲線とみなし、ここに通常の Weyl–Ahlfors 理論を適用することで、上記の不等式を次のように改善することができる。

Theorem 9.1 (iT_p と $T_i\{\mathbf{X}^{(p)}\}$ の比較定理 [9]). 正則曲線 $\mathbf{x} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^n$ の導来曲線 $\mathbf{X}^{(p)}$ は (正則曲線として) 線形非退化と仮定する。 $h := \binom{n+1}{p} - 1$ とおく。整数 $2 \leq i \leq \binom{n+1}{p}$ に対し、一般の位置にある、0 でない分解可能 $(i-1)$ -ベクトルの有限集合 $\{\mathbf{B}_j^{(i-1)}\}_{j=1}^d \subset \bigwedge^{i-1} \mathbb{C}^{\binom{n+1}{p}}$ を考える。このとき任意の $\epsilon > 0$ に対し

$$\bar{T}_i\{\mathbf{X}^{(p)}\}(r) + \sum_{j=1}^d \left(\frac{i-1}{\binom{h}{i-2}} \tilde{m}_1\{\mathbf{X}^{(p)}\}(r, \mathbf{B}_j^{(i-1)}) + \sum_{k=1}^{i-2} \frac{h-i+1}{\binom{h-k+1}{i-1-k}} M_1^{(k)}\{\mathbf{X}^{(p)}\}(r, \mathbf{B}_j^{(i-1)}) \right) < (i + \epsilon)\bar{T}_p(r) //.$$

が成立する。ここで $\tilde{m}_1\{\mathbf{X}^{(p)}\}(r, \mathbf{B}_j^{(i-1)})$ と $M_1^{(k)}\{\mathbf{X}^{(p)}\}(r, \mathbf{B}_j^{(i-1)})$ は $\mathbf{X}^{(p)}$ に関する (ある種の) 接近関数である。特に、 $p = 1$ とすると、 $2 \leq i \leq n+1$ に対し、

$$\bar{T}_i(r) + \sum_{j=1}^d \left(\frac{i-1}{\binom{n}{i-2}} \tilde{m}_1(r, \mathbf{B}_j^{(i-1)}) + \sum_{k=1}^{i-2} \frac{n-i+1}{\binom{n-k+1}{i-1-k}} M_1^{(k)}(r, \mathbf{B}_j^{(i-1)}) \right) < (i + \epsilon)\bar{T}(r) //$$

が成立する。一方、 $i = \binom{n+1}{p}$ とすると、一般の位置にある (必ずしも分解可能でない) 0 でない p -ベクトルの有限集合 $\{\mathbf{A}_j^{(p)}\}_{j=1}^d \subset (\bigwedge^p \mathbb{C}^{n+1})^*$ に対し $(\mathbf{B}_j^{(h)} = \ast \mathbf{A}_j^{(p)} \in \bigwedge^h \mathbb{C}^{\binom{n+1}{p}})$ として適用することで次を得る：

$$N_{\binom{n+1}{p}}\{\mathbf{X}^{(p)}\}(r) + \sum_{j=1}^d m_p(r, \mathbf{A}_j^{(p)}) < \left\{ \binom{n+1}{p} + \epsilon \right\} \bar{T}_p(r) //.$$

特別な場合として得られた最後の式は, Ahlfors による SMT (Theorem 2.5) 型不等式であり, 再び Borel の定理 ($p = 1$), Picard の定理 ($p = 1, n = 1$) が得られる (Griffiths–Lang 予想との関係は [9] (8 章) を参照されたい). 故に, $T_i\{\mathbf{X}^{(p)}\} \leq (i + \epsilon)T_p$ 型の不等式は SMT 型の関係式を見ていることになる. 逆に言えば, (一般化) Weyl の peculiar relation は SMT の逆向きの不等式に対応すると考えられる. この方向はこれまで追究されていなかったように思われる. ここまで見たように, その記述には Young 図形の数え上げが本質的であった. (本稿では触れられなかったが) Weyl–Ahlfors 理論は A 型の (Dynkin 図形に対応する) 理論と考えられ, この方向は幾何学的表現論の観点から追究されるべきであろう. 最後に, SMT 自身も Young 図形に焦点を当てた観点から証明できるかもしれない, という示唆を与える SMT と同値の不等式を与えて本節を終える. 証明は SMT (Theorem 2.5) に釣り合い和公式 (Proposition 4.2) を適用し式変形すればよい.

$$\sum_{s=1}^{p(n-p+1)} \sum_{\lambda \in \binom{[n+1]}{p}_{(s)}} \left(\sum_{k=1}^n n_{\lambda}(k) \Omega_k(r) \right) + \sum_{j=1}^d m_p(r, \mathbf{A}_j^{(p)}) < \epsilon \bar{T}_p(r) //.$$

10 文献紹介

Weyl–Ahlfors 理論の全貌は Ahlfors の論文 [1] にあるが, 難解である. Weyl が一連の流れを受けてまとめた本 [21] は, Weyl らしい含蓄のある記述にあふれた名著である (予備知識なしで読める!). 微分幾何学的な立場からの解説は Wu [22], Cowen–Griffiths [3], Kobayashi [10] 等がある. 日本語で読めるものには, Chern の訳書 [2] の第 9 章と付録 6 に解説がある. また, 多変数 Weyl–Ahlfors 理論は Stoll [16, 17] により開拓された. Weyl–Ahlfors 理論とは異なるアプローチによる多変数 Nevanlinna 理論の教科書としては, 小平 [11] によるレクチャーノートがある. Diophantus 近似論との関係については Vojta [18] が基本的な文献であり, 日本語で解説された教科書に野口 [12] がある. Weyl–Ahlfors 理論の極小曲面論への応用は藤本 [6] を参照せよ.

参考文献

- [1] L. V. Ahlfors, *The theory of meromorphic curves*, Acta Soc. Sci. Fenn. Nova Ser. A **3** (1941), pp. 171–183.
- [2] S. S. Chern (藤木明, 本多宣博訳), 複素多様体講義, シュプリンガー数学クラシックス **17**, 2005.
- [3] M. Cowen and P. Griffiths, *Holomorphic curves and metrics of negative curvature*, J. Anal. Math. **29** (1976), pp. 93–153.
- [4] J. S. Frame, G. de B. Robinson, and R. M. Thrall, *The hook graphs of the symmetric groups*, Canad. J. Math. **6** (1954), pp. 316–324.
- [5] H. Fujimoto, *The defect relations for the derived curves of a holomorphic curve in $P^n(\mathbb{C})$* , Tohoku Math. J. **34** (1982), pp. 141–160.
- [6] H. Fujimoto, *Value Distribution Theory of the Gauss Map of Minimal Surfaces in $\mathbb{R}^m$* , Aspects of Math. **E21**, 1993.
- [7] P. Griffiths and J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley Classics Library, Wiley, 1994.
- [8] 洞彰人, 数学の杜 4 対称群の表現とヤング図形集団の解析学–漸近的表現論への序説, 数学書房, 2017.
- [9] S. Katsuta, *Combinatorial Structure in Nevanlinna Theory*, arXiv:2509.11696, 2025.
- [10] S. Kobayashi, *Hyperbolic Complex Spaces*, Grundlehren Math. Wiss. **318**, Springer, 1998.
- [11] 小平邦彦, *Nevanlinna 理論*, 東大数学教室セミナーノート **34**, 1974.
- [12] 野口潤次郎, 現代数学の潮流 多変数ネヴァンlinna理論とディオファントス近似, 共立出版, 2003.
- [13] S. Okada, private communication, Dec. 2025.
- [14] W. M. Schmidt, *Diophantine Approximation*, Lecture Notes in Math. **785**, Springer, 1980.
- [15] T. Shimizu, *On the theory of meromorphic functions*, Japan. J. Math. **6** (1929), pp. 119–171.
- [16] W. Stoll, *Die beiden Hauptsätze der Werteverteilungstheorie bei Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen (I)*, Acta Math. **90** (1953), pp. 1–115.
- [17] W. Stoll, *Die beiden Hauptsätze der Werteverteilungstheorie bei Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen (II)*, Acta Math. **90** (1954), pp. 55–169.
- [18] P. Vojta, *Diophantine Approximations and Value Distribution Theory*, Lecture Notes in Math. **1239**, Springer, 1987.
- [19] P. Vojta, *On McQuillan’s “tautological inequality” and the Weyl–Ahlfors theory of associated curves*, arXiv:0706.3044, 2007.
- [20] H. Weyl and F. J. Weyl, *Meromorphic curves*, Ann. of Math. **39** (1938), pp. 516–538.
- [21] H. Weyl and F. J. Weyl, *Meromorphic Functions and Analytic Curves*, Ann. of Math. Stud. **12**, Princeton Univ. Press, 1943.
- [22] H.-H. Wu, *The Equidistribution Theory of Holomorphic Curves*, Ann. of Math. Stud. **64**, Princeton Univ. Press, 1970.

ネフかつ巨大類における小林ヒッチン対応

陣内智史 (大阪大学大学院理学研究科)

目次

1 導入	1
2 定義	2
2.1 ネフかつ巨大類でのスロープ多重安定性	2
2.2 適合カレント	3
2.3 適合エルミート・ヤンミルズ計量	4
3 主結果	5
3.1 主結果の主張	5
3.2 証明の概略	6

1 導入

正則ベクトル束は複素幾何学および代数幾何学において重要な対象の一つである。正則ベクトル束に対して定義される重要な性質の一つにスロープ安定性がある。これは代数幾何的な条件であり、正則ベクトル束に強い幾何学的制約を課す。その制約の一つとして次の Bogomolov-Gieseker 不等式が良く知られている:

Theorem 1.1 ([Bog78], [MR81], [Don85], [UY86]). コンパクトケーラー多様体 (X, ω) 上の $\{\omega\}^{n-1}$ -スロープ多重安定な正則ベクトル束 E は Bogomolov-Gieseker 不等式

$$BG(E) \cdot \{\omega\}^{n-2} := (2rc_2(E) - (r-1)c_1(E)^2) \cdot \{\omega\}^{n-2} \geq 0$$

を満たす。また等号が成立することと E が射影的平坦であることは同値である。

K -安定なファノ多様体の一意化定理は Theorem 1.1 の重要な応用のひとつである [GKP22]。この Theorem 1.1 は次の小林ヒッチン対応の直接的な帰結である:

Theorem 1.2 ([Don85], [UY86]). コンパクトケーラー多様体 (X, ω) 上の正則ベクトル束 E が $\{\omega\}^{n-1}$ -スロープ多重安定であることと E が ω -エルミート・ヤンミルズ計量を持つことは同値である。

本稿ではケーラー類での小林ヒッチン対応 (Theorem 1.2) をネフかつ巨大類に拡張 (Theorem 3.1) し、その帰結としてケーラー類での Bogomolov-Gieseker 不等式とその等号成立条件 (Theorem 1.1) をネフかつ巨大類に一般化する (Theorem 3.2)。

Theorem 1.1 をネフかつ巨大類に一般化する動機付けとなる例を紹介して本節を終える.

Example 1.3 ([Jin26]). $\pi : X \rightarrow \mathbb{C}P^3$ を一点 $p \in \mathbb{C}P^3$ でのブローアップとし, X 上のネフかつ巨大類を $\alpha := \pi^*c_1(\mathcal{O}(1))$ で定義する. 正の定数 $\varepsilon > 0$ に対して X 上のケーラー類を $\omega_\varepsilon := \alpha - \varepsilon[D]$ と定める. ここで D は π の例外因子である. X 上の正則ベクトル束 E を $E := \mathcal{O}_X \oplus \mathcal{O}(D)$ と定める. このとき次が成立する.

- (1) $_\varepsilon$ 任意の $\varepsilon > 0$ に対して E は ω_ε^2 -スロープ半安定ではない.
- (2) $_\varepsilon$ 任意の $\varepsilon > 0$ に対して E は ω_ε について Bogomolov-Gieseker 不等式の等号を満たさない: $BG(E) \cdot \omega_\varepsilon = \varepsilon \neq 0$.
- (3) $_\varepsilon$ E は X 上射影的平坦ではない.

一方 $\varepsilon \rightarrow 0$ と極限をとると次が成立する.

- (1) $_0$ E は α^2 -スロープ多重安定である.
- (2) $_0$ E は α について Bogomolov-Gieseker 不等式の等号を満たす: $BG(E) \cdot \alpha = 0$.
- (3) $_0$ E は $X \setminus D$ 上で射影的平坦である.

この例はネフかつ巨大類での Bogomolov-Gieseker 不等式とその等号成立条件が適切に拡張されうること示唆している.

2 定義

ネフかつ巨大類での小林ヒッチン対応を定式化するにはネフかつ巨大類でのスロープ多重安定性, 適合カレント, 適合エルミート・ヤンミルズ計量を新しく定義する必要がある. 本節ではこれらの定義と重要な性質を紹介する.

2.1 ネフかつ巨大類でのスロープ多重安定性

n 次元コンパクトケーラー多様体 X 上のネフ類とはケーラー類のなす開錐 (ケーラー錐) の閉包に属するコホモロジー類 α であり, さらに $\int_X \alpha^n > 0$ となるときネフかつ巨大であるという. ネフかつ巨大類におけるスロープ多重安定性の定義がケーラー類に対する定義とは異なることに注意する:

Definition 2.1 ([Jin26]). (1) X 上の正則ベクトル束 E が α^{n-1} -スロープ (半) 安定であるとは, 任意の非自明な部分接続層 $\mathcal{F} \subset E$ に対して $\mu_\alpha(\mathcal{F}) < (\leq, \text{resp.}) \mu_\alpha(E)$ が成り立つことである. ここで $\mu_\alpha(\mathcal{F}) := c_1(\mathcal{F}) \cdot \alpha^{n-1} / \text{rk} \mathcal{F}$ である.

- (2) X 上の正則ベクトル束 E が α^{n-1} -スロープ多重安定であるとは, X 上の α^{n-1} -スロープ安定な反射的接続層 $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_l$ で $\mu_\alpha(\mathcal{E}_i) = \mu_\alpha(E)$ となるものであり $E|_{X \setminus E_{nK}(\alpha)} \simeq (\mathcal{E}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{E}_l)|_{X \setminus E_{nK}(\alpha)}$ となるものが存在することである.

ここで $E_{nK}(\alpha)$ は α の非ケーラー跡と呼ばれる解析的部分集合であり, ネフかつ巨大類の場合は次のように記述されることが知られている [CT15]:

$$E_{nK}(\alpha) = \bigcup_{V \subset X: \text{解析的部分集合}, \alpha^{\dim V}[V]=0} V$$

この記述により α^{n-1} -スロープ安定性はブローアップに沿った引き戻しに関して不変であることが分かる [Jin26, Lemma 2.11]. したがって $E_{nK}(\alpha)$ は単純正規交差因子であると仮定できる. 以下の例は Definition 2.1(2) の $\mathcal{E}_i$ たちが α の非ケーラー跡上で任意性を持つことを示している.

Example 2.2. α を X 上のネフかつ巨大類とし $D = E_{nK}(\alpha)$ は単純正規交差因子であるとする. s_D を D の定義切断とする. このとき短完全列

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(-D)|_{X \setminus D} \xrightarrow{(s_D, 0)} \mathcal{O}_X \oplus \mathcal{O}_X|_{X \setminus D} \rightarrow \mathcal{O}_X|_{X \setminus D} \rightarrow 0$$

は $X \setminus D$ 上で分裂する. さらに $\mu_\alpha(\mathcal{O}(-D)) = \mu_\alpha(\mathcal{O}_X) = \mu_\alpha(\mathcal{O}_X \oplus \mathcal{O}_X) = 0$ である.

スロープ安定性は次の意味で開条件である:

Lemma 2.3 ([Jin26], [IJZ25] も参照). (X, ω_0) をコンパクトケーラー多様体とし α を X 上のネフかつ巨大類とする. X 上の正則ベクトル束 E が α^{n-1} -スロープ安定ならば $(\alpha + \varepsilon \omega_0)^{n-1}$ -スロープ安定である.

一方で α^{n-1} -スロープ多重安定性は開ではないことに注意する (Example 1.3).

2.2 適合カレント

ケーラー類は滑らかで正定値なケーラー計量で代表される. 一方でネフかつ巨大類を代表する自然な計量は $E_{nK}(\alpha)$ 内で特異点を持ち正定値でもない. 一般的にこのような特異計量で解析をおこなうことは非常に困難である. そこで適合カレントと呼ばれるものを導入する. これはネフかつ巨大類を代表する計量のうちケーラー計量による良い近似を持つものである. ネフかつ巨大類の非ケーラー跡は単純正規交差であると仮定できることに注意する (section 2.1).

Definition 2.4 ([Jin26]). (X, ω_0) をコンパクトケーラー多様体とし, α をネフかつ巨大類とする. s_D は $D = E_{nK}(\alpha)$ の定義切断とする. このとき正值カレント $T \in \alpha$ が適合カレントであるとは次の条件を満たすことである:

- (1) ある $m \geq 0$ に対して $T \geq |s_D|^{2m} \omega_0$ となる.
- (2) 各 $\varepsilon > 0$ に対して滑らかなケーラー計量 $\omega_\varepsilon \in \alpha + \varepsilon \omega_0$ が存在して
 - ω_ε は T に $X \setminus D$ 上 C^∞ -local の意味で収束する.
 - ある $p > 1$ に対して $\int_X \left(\frac{\omega_\varepsilon^n}{\omega_0^n} \right)^p \omega_0^n \leq C$ となる.

この ω_ε を T の適合近似とよぶ.

以下の命題が示すように, 本稿の設定であればいつでも適合カレントの存在を仮定できる:

Proposition 2.5 ([Jin26]). X をコンパクトケーラー多様体とし α を X 上のネフかつ巨大類とする. このとき α を代表する適合カレント T が存在する. 例えば複素モンジュアンペール方程式 $\langle T^n \rangle = e^f \omega_0^n$ ($f \in C^\infty(X)$) の解 $T \in \alpha$ は適合カレントである ([BEGZ10] によりこのような T はいつでも存在する). ここで $\langle T^n \rangle$ は正值カレントの非多重極積 (nonpluripolar product) である.

適合カレントには特異ケーラー・アインシュタイン計量も含まれている:

Example 2.6 ([CCHSTT25]). Y を klt 特異点を持つコンパクトケーラー多様体とし ω_{KE} を Y 上の特異ケーラー・アインシュタイン計量とする. このとき $\pi: X \rightarrow Y$ を Y の特異点解消とすると $\pi^* \omega_{KE}$ は適合カレントである.

2.3 適合エルミート・ヤンミルズ計量

エルミート・ヤンミルズ方程式の解の一意性を得るためには, その解の属する関数空間 (解に要請する regularity) を適切に定めなければならない. 多様体上のケーラー計量が滑らかである場合 ([Don85], [UY86], [BS94] [Chen25]) やオービフォールド特異点を持つ場合 ([Fu22], [CGNPPW23], [KO25]) は曲率の L^2 可積分性のみで十分である. 本稿の設定では適合カレントに関するエルミート・ヤンミルズ方程式を考える. ケーラー計量と比較して適合カレントは非常に特異性が強い. このことによって曲率の L^2 可積分性のみでは不十分となる. そこで適合エルミート・ヤンミルズ計量というものを導入する. これはエルミート・ヤンミルズ計量の特異性に条件を付加したものであり, 小林ヒッチン対応を成立させるのに十分な枠組みを与えている.

Definition 2.7 ([Jin26]). X をコンパクトケーラー多様体とし α をネフかつ巨大類とする. $T \in \alpha$ を適合カレントとする. s_D は $D = E_{nK}(\alpha)$ の定義切断とする. (E, h_0) を X 上の正則エルミートベクトル束とする. このとき E 上の T -適合エルミート・ヤンミルズ計量とは $E|_{X \setminus D}$ 上の滑らかなエルミート計量 $h = h_0 \Psi^2$ であり, 以下の条件を満たすもののことである:

- (1) ある定数 $\lambda \in \mathbb{R}$ が存在して $X \setminus D$ 上で次の T -エルミート・ヤンミルズ方程式を満たす:

$$\sqrt{-1} \Lambda_T F_h = \lambda \text{id}_E.$$

- (2) h の曲率 F_h は次の意味で L^2 可積分である:

$$\int_{X \setminus D} |F_h|_{h,T}^2 T^n < \infty.$$

- (3) ある $k > 0$ が存在して h , すなわち Ψ , は s_D^k の重み付きで有界となる:

$$\sup_{X \setminus D} |s_D^k \Psi|_{h_D \otimes h_0} < \infty.$$

ここで h_D は $\mathcal{O}(D)$ 上の滑らかなエルミート計量である.

- (4) ある $l > 0$ が存在して h , すなわち Ψ , の一回微分 $\partial^{\nabla_{h_0}} \Psi$ は s_D^l の重み付きで L^2 可積分である:

$$\int_{X \setminus D} |s_D^l \partial^{\nabla_{h_0}} \Psi|_{h_D \otimes h_0, T}^2 T^n < \infty.$$

T -適合エルミート・ヤンミルズ計量は次の意味で自然に現れる: E を α^{n-1} -スロープ安定とする. すると E は $(\alpha + \varepsilon \omega_0)^{n-1}$ -スロープ安定となる (Lemma 2.3). 古典的な小林ヒッチン対応 Theorem 1.2 により E は ω_ε -エルミート・ヤンミルズ計量 h_ε をもつ. ここで ω_ε は T の適合近似である (Definition 2.4). T -適合エルミート・ヤンミルズ計量に要請される条件は, h_ε の $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限が満たす regularity にほかならない.

Remark 2.8. ネフかつ巨大類の小林ヒッチン対応 Theorem 3.1 の証明のための便宜上, Definition 2.7 (3), (4) で k と l に任意性を持たせている. 主定理 Theorem 3.1 の帰結として, $k = 1, l = m + 1$ とすれば十分であることがわかる. ここで $m \geq 0$ は適合カレントの条件 Definition 2.4 (1) のものである.

3 主結果

3.1 主結果の主張

以上の準備の下, ネフかつ巨大類での小林ヒッチン対応は次のように述べられる.

Theorem 3.1 ([Jin26]). X をコンパクトケーラー多様体とし α を X 上のネフかつ巨大類とする. $T \in \alpha$ を適合カレントとする. E を X 上の正則ベクトル束とする. このとき次の二条件は同値である:

- (1) E は α^{n-1} -スロープ多重安定である.
- (2) E は T -適合エルミート・ヤンミルズ計量を持つ.

さらに α^{n-1} -スロープ安定ベクトル束の T -適合エルミート・ヤンミルズ計量は定数倍を除いて一意である.

Theorem 3.1 の帰結として次の Bogomolov-Gieseker 不等式とその等号成立条件が得られる:

Theorem 3.2 ([Jin26]). X をコンパクトケーラー多様体とし α を X 上のネフかつ巨大類とする. E を X 上の α^{n-1} -スロープ多重安定正則ベクトル束とする. このとき, E は α に関して Bogomolov-Gieseker 不等式

$$BG(E) \cdot \alpha^{n-2} := (2rc_2(E) - (r-1)c_1(E)^2) \cdot \alpha^{n-2} \geq 0$$

をみたす. さらに等号を満たすとき E は $X \setminus E_{nK}(\alpha)$ 上で射影的平坦となる.

Remark 3.3. E が α^{n-1} -スロープ半安定の時も Theorem 3.2 と類似の等号成立条件が成立する [Jin26]. また X が射影代数多様体と双有理同値な時, (ネフとは限らない) 巨大類 α に関して Bogomolov-Gieseker 不等式が成立する [IJZ25]. このときは交点積 α^k を動的交点積 $\langle \alpha^k \rangle$ に置き換える必要がある. さらに巨大類 α が双有理ザリスキ分解を持つときは Theorem 3.2 と同様の等号成立条件が得られる [Jin26]. その応用として反標準因子が巨大な射影代数多様体の準一意化定理が成立する:

Theorem 3.4 ([Jin26], [IJZ25] も参照). X を反標準因子 $-K_X$ が巨大で滑らかな射影代数多様体とする. $(X, -K_X)$ を一様 K -安定とする. このとき次の宮岡ヤウ不等式が成立する:

$$(2(n+1)c_2(X) - nc_1(X)^2) \cdot \langle c_1(-K_X)^{n-2} \rangle \geq 0.$$

さらに等号が成立するとき, $(X, -K_X)$ の反標準モデル $(Y, -K_Y)$ は複素射影空間 $\mathbb{CP}^n$ の離散群 Γ による商である: $Y \simeq \mathbb{CP}^n/\Gamma$ (この状況であれば [Xu23] によって $(X, -K_X)$ の反標準モデル $(Y, -K_Y)$ は存在する).

3.2 証明の概略

本稿の残りで小林ヒッチン対応 Theorem 3.1 の証明の概略を述べる.

(1) $\Rightarrow$ (2): $D = E_{nK}(\alpha)$ を単純正規交差因子とする. E を α^{n-1} -スロープ安定とする. すると E は $(\alpha + \varepsilon\omega_0)^{n-1}$ -スロープ安定である. 適合カレント $T \in \alpha$ の適合近似列 ω_ε をとると, E は ω_ε -エルミート・ヤンミルズ計量 $h_\varepsilon = h_0\Psi_\varepsilon^2$ で $\det \Psi_\varepsilon = 1$ となるものがただ一つ存在する.

Step 1: まず h_ε の C^0 ノルムを L^1 ノルムによって上から評価する.

Lemma 3.5. ある定数 $C > 0$ が存在して, 任意の ε に対して次が成立する.

$$\sup_X \log |s_D \Psi_\varepsilon|_{h_D \otimes h_0} \leq C \left(1 + \int_X |\log |s_D \Psi_\varepsilon|_{h_D \otimes h_0}| \omega_\varepsilon^n \right).$$

証明の概略. $\det \Psi_\varepsilon = 1$ であるので $\{\log |s_D \Psi_\varepsilon| = -\infty\} = D$ である. よって $a > 0$ を大きくとると $\Omega_a := \{\log |s_D \Psi_\varepsilon| + a > 0\}$ は $X \setminus D$ の空ではない相対コンパクトな開集合である. よって Ω_a 上で ω_ε は T に滑らかに収束し, T は Ω_a 上正定値である. よって $a > 0$ に依存した正の定数 $C_a > 0$ が存在して次が成り立つ:

$$\Delta_{\omega_\varepsilon} \log |s_D \Psi_\varepsilon|^2 \geq -C_a.$$

すると [GPS24, Lemma 2] の平均値型不等式によって Lemma 3.5 が得られる. $\square$

Step 2: つぎに L^1 ノルムの一様有界性を証明する. 証明は背理法による. Lemma 3.5 の右辺の L^1 ノルムを δ_ε^{-1} とおき, $\varepsilon \rightarrow 0$ で $\delta_\varepsilon^{-1} \rightarrow \infty$ となるとしよう. すると各 h_ε が Donaldson 汎関数の臨界点であることを用いると, [Sim88] の議論により, ある $u_\infty \in L_1^2(X \setminus D, T)$ が存在して $\delta_\varepsilon \log \Psi_\varepsilon$ は u_∞ に任意のコンパクト集合 $K \subset X \setminus D$ 上 L_1^2 -local に収束する. この $u_\infty \in L_1^2(X \setminus D, \text{End}(E))$ は $E|_{X \setminus D}$ の弱正則部分束をさだめる:

$$u_\infty \circ u_\infty = u_\infty, (1 - u_\infty) \circ \bar{\partial}^E u_\infty = 0.$$

Uhlenbeck-Yau [UY86] によって u_∞ は部分接続層 $\mathcal{F} \subset E|_{X \setminus D}$ を定める. すると $\mathcal{F}$ は E の接続部分層 $\tilde{\mathcal{F}} \subset E$ への拡張を持ち, E の不安定化部分層を定めることが分かる: $\mu_\alpha(\tilde{\mathcal{F}}) \geq \mu_\alpha(E)$. (これは, この状況への Chern-Weil 公式の拡張 [Jin26, Proposition 3.11] の帰結である.) したがって Lemma 3.5 の右辺は一様有界である:

$$\sup_{X \setminus D} \log |s_D \Psi_\varepsilon| \leq C. \quad (3.1)$$

Step 3: $h_\varepsilon = h_0 \Psi_\varepsilon^2$ は T -適合エルミート・ヤンミルズ計量 $h_\infty = h_0 \Psi_\infty^2$ に収束することを示す. 各 h_ε は ω_ε -エルミート・ヤンミルズ方程式の解であり, ω_ε は T に $X \setminus D$ 上 C^∞ local に収束する. また (3.1) より h_ε は $X \setminus D$ の各コンパクト集合上一様有界である. よってある滑らかな計量 $h_\infty = h_0 \Psi_\infty^2$ が $E|_{X \setminus D}$ 上に存在して Ψ_ε は Ψ_∞ に $C^{1,\gamma}(X \setminus D)$ -local に収束する. 一様評価 (3.1) によって h_∞ が E 上の T -適合カレントであることが分かる.

(2) $\Rightarrow$ (1): h_E を E の T -適合エルミート・ヤンミルズ計量とする. このとき E は α^{n-1} -スロープ多重安定であることの証明の概略を述べる. $F \subset E$ を α^{n-1} -スロープ安定部分層で $\mu_\alpha(F) \geq \mu_\alpha(E)$ となるものとする. 簡単のため F は局所自由としよう. (1) $\Rightarrow$ (2) によって F は T -適合エルミート・ヤンミルズ計量 h_F をもつ. 次を証明すればよい:

Proposition 3.6 ([Jin26]). 包含 $F \hookrightarrow E$ は $\nabla_{h_F^* \otimes h_E} \iota = 0$ をみたし $\mu_\alpha(F) = \mu_\alpha(E)$ となる.

Proposition 3.6 によって E は h_E に関する直交分解 $E|_{X \setminus D} = (F \oplus E/F)|_{X \setminus D}$ をもち $\mu_\alpha(E/F) = \mu_\alpha(E)$ となる. さらに h_E と h_F は E/F に T -適合エルミート・ヤンミルズ計量をひきおこす. よって, 同じことを E/F に繰り返せば E の α^{n-1} -スロープ多重安定性が得られる. さて, $D = E_{nK}(\alpha)$ とし, h_D を $\mathcal{O}(D)$ の T -適合エルミート・ヤンミルズ計量としよう. λ_E, λ_F と E および F の T -エルミート・ヤンミルズ定数とする.

Proposition 3.6 の証明の概要. h_E と h_F は T -エルミート・ヤンミルズで $\iota: F \rightarrow E$ は正則なので $\Delta_T |\iota|_{h_F^* \otimes h_E}^2 = |\nabla_{h_F^* \otimes h_E} \iota|_{h_F^* \otimes h_E}^2 - (\lambda_E - \lambda_F) |\iota|_{h_F^* \otimes h_E}^2$ となる. 両辺を T^n で積分すると左辺が0になることが期待され, それによって $\nabla_{h_F^* \otimes h_E} \iota = 0$ と $\lambda_E = \lambda_F$ が得られると期待できる. これは直ちには正しくない. というのも計量 h_E, h_F, T が D に沿って特異点を持つため両辺が可積分とは言えないからである. (技術的にはやや込み入ってはいるものの) アイデアは単純である. すなわち ι のかわりに, 十分大きい $l > 0$ にたいして, 次の合成射を考えて, 上記のストーリーを正当化するのである.

$$s_D^l \circ \iota: F \hookrightarrow E \xrightarrow{s_D^l} E \otimes \mathcal{O}(lD).$$

適合カレント T や T -適合エルミート・ヤンミルズ計量 h_E, h_F の D に沿った特異性を s_D^l を掛けることで潰れているので, 何とかなりそうである.

Step 1: まず正則ベクトル束 G に対して, その T -エルミート・ヤンミルズ定数 λ_G は次で記述されることを示す:

$$\lambda_G = \frac{\mu_\alpha(G)}{\int_X \alpha^{n-1}}.$$

とくに $\lambda_D = 0$ となる. これは次の Proposition 3.7 の帰結である (計量の一意性はまだ得られない). 実際, G 上の T -適合エルミート・ヤンミルズ計量 h_G が誘導する $\det(G)$ 上の計量 $\det(h_G)$ と, (1) $\Rightarrow$ (2) により存在する $\det(G)$ 上の T -適合エルミート・ヤンミルズ計量 $h_{\det(G)}$ それぞれの T -エルミート・ヤンミルズ定数を Proposition 3.7 を用いて比較すればよい.

Proposition 3.7 ([Jin26]). h_1 と h_2 を G の T -適合エルミート・ヤンミルズ計量とすると, そのチャーン接続は一致する: $\nabla_{h_1} = \nabla_{h_2}$.

Step 1 により $\lambda_E - \lambda_F \leq 0$ となり, さらに $s_D^l \circ \iota$ は次を満たすことがわかる:

$$\Delta_T |s_D^l \iota|_{h_F^* \otimes h_E \otimes h_D^l}^2 = |\nabla_{h_F^* \otimes h_E \otimes h_D^l} s_D^l \iota|_{h_F^* \otimes h_E \otimes h_D^l}^2 - (\lambda_E - \lambda_F) |s_D^l \iota|_{h_F^* \otimes h_E \otimes h_D^l}^2. \quad (3.2)$$

Step 2: $\int_{X \setminus D} \Delta_T |s_D^l \iota|_{h_F^* \otimes h_E \otimes h_D^l}^2 T^n = 0$ を示す. これは, 適合カレントや適合エルミート・ヤンミルズ計量が高々 D に沿った極しか持たないことと, それに s_D^l を掛けていることを考慮すれば証明できる. Step 1 と Step 2 によって (3.2) の両辺を T^n で積分すれば

$$(1) \quad 0 = \nabla_{h_F^* \otimes h_E \otimes h_D^l} s_D^l \iota = s_D^l (\nabla_{h_F^* \otimes h_E} \iota) + (\nabla_{h_D^l} s_D^l) \iota,$$

$$(2) \quad \mu_\alpha(E) = \alpha^n \lambda_E = \alpha^n \lambda_F = \mu_\alpha(F)$$

が得られる. よって次を示せば証明が終わる. すなわち

Step 3: $\nabla_{h_D} s_D = 0$ を示す. $\mathcal{O}(D)$ の T -適合エルミート・ヤンミルズ計量 $h_D = h_0 \Psi_D^2$ に対して次の正則な射を考える:

$$\mathcal{O}_X \xrightarrow{s_D} (\mathcal{O}(D), \bar{\partial}^D) \xrightarrow{\Psi_D} (\mathcal{O}(D), \bar{\partial}^{\nabla_D}),$$

ここで $\nabla_D = \Psi_D \circ \nabla_{h_D} \circ \Psi_D^{-1}$ である. すると上記と類似の議論を $\Psi_D s_D$ に適用して $\nabla_{h_D \otimes h_{\text{triv}}^*} s_D = 0$ が得られる. ここで h_{triv} は $\mathcal{O}_X$ の自明な計量である.

一意性: h_1 と h_2 を α^{n-1} -スロープ安定ベクトル束 E 上の二つの T -適合エルミート・ヤンミルズ計量とする. このとき $h_1 = a h_2$, $a \in \mathbb{R}_{>0}$ となることの証明の概略を述べる. 次の定理が重要となる. これはケーラー類に関するスロープ安定ベクトル束が単純である (つまり自己同型が定数しかない) ことの一般化である:

Proposition 3.8 ([Jin26]). E が α^{n-1} -スロープ安定とする. $D = E_{nK}(\alpha)$ は単純正規交差因子とする. このとき, 正則切断 $g \in H^0(X \setminus D, \text{End}(E))$ が ある $k > 0$ に対して $\sup_{X \setminus D} |s_D^k g|_{h_0} < \infty$ を満たすとき, $g = a \text{id}$, $a \in \mathbb{C}$ となる. ここで h_0 は E の滑らかなエルミート計量である.

$h_1 = h_2 g$ とかく. すると h_i が T -適合なので $\sup_{X \setminus D} |s_D^k g|_{h_0} < \infty$ となる. Proposition 3.8 より $\bar{\partial}^{E \otimes E^*} g = 0$ を示せばよい. Proposition 3.7 より

$$0 = \nabla_{h_1} - \nabla_{h_2} = g^{-1} \bar{\partial}^{\nabla_{h_1 \otimes h_1^*}} g,$$

よって $\bar{\partial}^{\nabla_{h_1 \otimes h_1^*}} g = 0$ である. h_D を $\mathcal{O}(D)$ の T -適合エルミート・ヤンミルズ計量とすると $s_D : \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}(D)$ について $\nabla_{h_D \otimes h_{\text{triv}}^*} s_D = 0$ が得られる ((2) $\Rightarrow$ (1) Step 3). これらを用いると (3.2) と同様にして次を得る.

$$\Delta_T |s_D^l g|_{h_1 \otimes h_1^* \otimes h_D}^2 = |\bar{\partial}^{E \otimes E^* \otimes \mathcal{O}(D)} s_D^l g|_{h_1 \otimes h_1^* \otimes h_D}^2.$$

$l > 0$ を大きくしておけば両辺が T^n について可積分となり左辺の積分が 0 となることが分かる. よって $\bar{\partial}^{E \otimes E^*} g = 0$ が分かる. $\square$

参考文献

- [BS94] S. Bando and Y. T. Siu, Stable sheaves and Einstein-Hermitian metrics, in *Geometry and analysis on complex manifolds*, 39–50, World Sci. Publ., River Edge, NJ, ; MR1463962.
- [Bog78] F. A. Bogomolov, Holomorphic tensors and vector bundles on projective manifolds, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **42** (1978), no. 6, 1227–1287, 1439; MR0522939.
- [BEGZ10] S. Boucksom et al., Monge-Ampère equations in big cohomology classes, *Acta Math.* **205** (2010), no. 2, 199–262; MR2746347.
- [CGNPPW23] J. Cao, P. Graf, P. Naumann, M. Paun, T. Peternell, and X. Wu, Hermite-Einstein metrics in singular settings. (2023) arXiv preprint arXiv:2303.08773.
- [Chen25] X. Chen, Admissible Hermitian-Yang-Mills connections over normal varieties, *Math. Ann.* **392** (2025), no. 1, 487–523; MR4887765.
- [CCHSTT25] Y. Chen, K. S. Chiu, M. Hallgren, G. Székelyhidi, T. D. Tô, and F. Tong, On Kähler-Einstein Currents. (2025) arXiv preprint arXiv:2502.09825.
- [CT15] T. C. Collins and V. Tosatti, Kähler currents and null loci, *Invent. Math.* **202** (2015), no. 3, 1167–1198; MR3425388.
- [DP04] J.-P. Demailly and M. Păun, Numerical characterization of the Kähler cone of a compact Kähler manifold, *Ann. of Math.* (2) **159** (2004), no. 3, 1247–1274; MR2113021.
- [Don85] S. K. Donaldson, Anti self-dual Yang-Mills connections over complex algebraic surfaces and stable vector bundles, *Proc. London Math. Soc.* (3) **50** (1985), no. 1, 1–26; MR0765366.
- [Fu22] M. Faulk, Hermitian-Einstein metrics on stable vector bundles over compact Kähler orbifolds. (2022). arXiv preprint arXiv:2202.08885.
- [GKP22] D. Greb, S. Kebekus and T. Peternell, Projective flatness over klt spaces and uniformisation of varieties with nef anti-canonical divisor, *J. Algebraic Geom.* **31** (2022), no. 3, 467–496; MR4484547.
- [GPS24] B. Guo, D. H. Phong and J. Sturm, Green’s functions and complex Monge-Ampère equations, *J. Differential Geom.* **127** (2024), no. 3, 1083–1119; MR4773174.
- [IJZ25] M. Iwai, S. Jinnouchi, and S. Zhang, The Miyaoka-Yau inequality for singular varieties with big canonical or anticanonical divisors. (2025) arXiv preprint arXiv:2507.08522.
- [Jin26] Jinnouchi, S. The Kobayashi-Hitchin correspondence for nef and big classes. (2026) arXiv preprint arXiv:2603.10312.
- [KO25] X. Fu, and W. Ou, Orbifold Bogomolov-Gieseker inequalities on compact Kähler varieties. (2025) arXiv preprint arXiv:2511.03530.
- [MR81] V. B. Mehta and A. Ramanathan, Semistable sheaves on projective varieties and their restriction to curves, *Math. Ann.* **258** (1981/82), no. 3, 213–224; MR0649194.
- [Sim88] C. T. Simpson, Constructing variations of Hodge structure using Yang-Mills theory and applications to uniformization, *J. Amer. Math. Soc.* **1** (1988), no. 4, 867–918; MR0944577.
- [UY86] K. K. Uhlenbeck and S.-T. Yau, On the existence of Hermitian-Yang-Mills connections in stable vector bundles, *Comm. Pure Appl. Math.* **39** (1986), no. S, S257–S293; MR0861491.
- [Xu23] C. Xu, K-stability for varieties with a big anticanonical class, *Épjournal Géom. Algébrique* [2023–2025], Special volume in honour of Claire Voisin, Art. 7, 9 pp.; MR4671736.

2 変数 1 未知関数の 2 階偏微分方程式に付随する微分式系の表示

広島大学 竹内宏一
takeuchi-k@hiroshima-u.ac.jp

本講演は [4] に基づく。

1 導入

微分式系 (M, D) とは, 滑らかな多様体 M とその接ベクトル束 TM の部分束 D の組である. $m := \dim M$, $r := \text{rank } D$ のとき, 局所的には, 各点で 1 次独立な 1-form $\omega^1, \dots, \omega^{m-r}$ を用いて, 部分束 D を次のように定義することができる: $D = \{\omega^1 = \dots = \omega^{m-r} = 0\}$. また, 2 つの微分式系 (M_1, D_1) , (M_2, D_2) に対して, 微分同相 $\phi: M_1 \rightarrow M_2$ が (M_1, D_1) から (M_2, D_2) への同型写像であるとは, $\phi_*(D_1) = D_2$ が成り立つことである (本講演ではこの同型写像を接触変換と呼ぶ).

$J^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) = \{(x, y, z, p, q, r, s, t)\}$ を 2 変数 1 未知関数の 2-jet 空間とし, $J^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ 上の 1-form $\varpi^0, \varpi^1, \varpi^2$ を次のように定める: $\varpi^0 := dz - p dx - q dy$, $\varpi^1 := dp - r dx - s dy$, $\varpi^2 := dq - s dy - t dy$.

次のような一般的な形の 2 変数 1 未知関数の 2 階偏微分方程式について考える:

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0. \quad (1.1)$$

ただし, F は $J^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ 上の滑らかな関数である. さらに, F は次の regular 条件を満たすとする:

$$\forall q_0 \in M, (F_r(q_0), F_s(q_0), F_t(q_0)) \neq 0 \quad (1.2)$$

ここで, M は次で定義される $J^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ の 7 次元部分多様体である: $M := \{F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0\} \subset J^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. さらに, $\iota: M \rightarrow J^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ を包含写像とし, $D := \{\iota^* \varpi^0 = \iota^* \varpi^1 = \iota^* \varpi^2 = 0\}$ とおく. このとき, (M, D) は微分式系となる. この (M, D) は微分方程式 (1.1) に付随する微分式系と呼ばれる.

定義 1.1. 滑らかな関数 F の判別式 Δ を次のように定める: $\Delta := F_r F_t - \frac{F_s^2}{4}$. このとき, $p_0 \in M$ に対して, $\Delta(p_0) < 0$ のとき, p_0 を F の hyperbolic point, $\Delta(p_0) = 0$ のとき, p_0 を F の parabolic point, $\Delta(p_0) > 0$ のとき, F の elliptic point という.

微分方程式 (1.1) に付随する微分式系 (M, D) の構造方程式の標準形に関して, 次の定理が知られている: ([1], [2], [3])

定理 1.2. $p_0 \in M$ とし, U を p_0 の十分に小さな開近傍とする.

- 任意の $q_0 \in U$ に対して, q_0 は F の hyperbolic point であるとする. このとき, U 上の coframe

$(\theta^0, \theta^1, \theta^2, \omega^1, \omega^2, \Pi^1, \Pi^2)$ が存在して、次が成り立つ: $D = \{\theta^0 = \theta^1 = \theta^2 = 0\}$ であり,

$$\begin{cases} d\theta^0 = -\theta^1 \wedge \omega^1 - \theta^2 \wedge \omega^2 \\ d\theta^1 \equiv \Pi^1 \wedge \omega^1 \pmod{\theta^0, \theta^1, \theta^2} \\ d\theta^2 \equiv \Pi^2 \wedge \omega^2 \pmod{\theta^0, \theta^1, \theta^2}. \end{cases}$$

- 任意の $q_0 \in U$ に対して, q_0 は F の parabolic point であるとする. このとき, U 上の coframe $(\theta^0, \theta^1, \theta^2, \omega^1, \omega^2, \Pi^1, \Pi^2)$ が存在して, 次が成り立つ: $D = \{\theta^0 = \theta^1 = \theta^2 = 0\}$ であり,

$$\begin{cases} d\theta^0 = -\theta^1 \wedge \omega^1 - \theta^2 \wedge \omega^2 \\ d\theta^1 \equiv \Pi^1 \wedge \omega^2 \pmod{\theta^0, \theta^1, \theta^2} \\ d\theta^2 \equiv \Pi^1 \wedge \omega^1 + \Pi^2 \wedge \omega^2 \pmod{\theta^0, \theta^1, \theta^2}. \end{cases}$$

- 任意の $q_0 \in U$ に対して, q_0 は F の elliptic point であるとする. このとき, U 上の coframe $(\theta^0, \theta^1, \theta^2, \omega^1, \omega^2, \Pi^1, \Pi^2)$ が存在して, 次が成り立つ: $D = \{\theta^0 = \theta^1 = \theta^2 = 0\}$ であり,

$$\begin{cases} d\theta^0 = -\theta^1 \wedge \omega^1 - \theta^2 \wedge \omega^2 \\ d\theta^1 \equiv \Pi^1 \wedge \omega^1 + \Pi^2 \wedge \omega^2 \pmod{\theta^0, \theta^1, \theta^2} \\ d\theta^2 \equiv \Pi^2 \wedge \omega^1 - \Pi^1 \wedge \omega^2 \pmod{\theta^0, \theta^1, \theta^2}. \end{cases} \quad (1.3)$$

注意 1.3. hyperbolicity と ellipticity は open condition である. よって, $p_0 \in M$ が hyperbolic point または elliptic point であるときも, p_0 の十分に小さい近傍に対して, 定理 1.2 が成り立つ. 一方, parabolicity は open condition ではないので, そうとは限らない.

本講演では, 定理 1.2 で述べた構造方程式の標準形を実現する局所 coframe $(\theta^0, \theta^1, \theta^2, \omega^1, \omega^2, \Pi^1, \Pi^2)$ を明示する. さらに, $p_0 \in M$ が parabolic point となる場合に関しては, 定理 1.2 の拡張にあたる標準形を紹介する.

2 主結果

U を p_0 の十分に小さな開近傍とし, $D = \{\varpi^0 = \varpi^1 = \varpi^2 = 0\}$ に関して, 次のような変換を考える:

$$\theta^0 := \varpi^0, \quad (\theta^1 \ \theta^2) := (\varpi^1 \ \varpi^2) A, \quad A := \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ g_1 & g_2 \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

ただし, 任意の $q_0 \in U$ に対して, $\det A(q_0) = f_1(q_0)g_2(q_0) - f_2(q_0)g_1(q_0) \neq 0$. このとき,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{g_2}{f_1g_2 - f_2g_1} & -\frac{f_2}{f_1g_2 - f_2g_1} \\ -\frac{g_1}{f_1g_2 - f_2g_1} & \frac{f_1}{f_1g_2 - f_2g_1} \end{pmatrix}$$

より,

$$(\omega^1 \ \omega^2) := \left(\frac{g_2}{f_1g_2 - f_2g_1} dx - \frac{f_2}{f_1g_2 - f_2g_1} dy \quad -\frac{g_1}{f_1g_2 - f_2g_1} dx + \frac{f_1}{f_1g_2 - f_2g_1} dy \right)$$

とおくと, $d\theta^0 = -\theta^1 \wedge \omega^1 - \theta^2 \wedge \omega^2$.

$p_0 \in M$ とする. このとき, regular 条件 (1.2) より, $F_r(p_0) \neq 0$ または $F_s(p_0) \neq 0$ または $F_t(p_0) \neq 0$. ただし, $F_t(p_0) \neq 0$ の場合は, 次で定義される接触変換を用いることで $F_r(p_0) \neq 0$ の場合に帰着できる:

$$(x, y, z, p, q, r, s, t) \mapsto (\bar{x} := y, \bar{y} := x, \bar{z} := z, \bar{p} := q, \bar{q} := p, \bar{r} := t, \bar{s} := s, \bar{t} := r).$$

よって, $F_r(p_0) \neq 0$ の場合と $F_r(p_0) = 0, F_s(p_0) \neq 0$ の場合を考えればよい. さらに, $F_r(p_0) = 0, F_s(p_0) \neq 0$ のとき, $\Delta(p_0) = -\frac{F_s(p_0)^2}{4} < 0$ となるので, p_0 は hyperbolic point である. よって, $F_r(p_0) = 0, F_s(p_0) \neq 0$ の場合を考えるため, より広いクラスである $F_s(p_0) \neq 0$ かつ p_0 が hyperbolic point の場合を考える. ただし, 本稿ではページ数の都合上, 次の 2 つの場合についてのみ述べる (その他の場合は [4] 参照):

- $F_r(p_0) \neq 0$ かつ p_0 が parabolic point の場合 (§2.1)
- $F_s(p_0) < 0$ かつ p_0 が hyperbolic point の場合 (§2.2)

2.1 $F_r(p_0) \neq 0$ かつ p_0 が parabolic point の場合

$F_r(p_0) \neq 0$ とする. このとき, 次の補題が成り立つ:

補題 2.1. f, g を滑らかな関数とし, $\theta := f\varpi^1 + g\varpi^2$ とおく. さらに, $q_0 \in U$ とする. このとき, 次の (1) から (3) は互いに同値である:

- (1) $(d\theta)_{q_0} \wedge (d\theta)_{q_0} \equiv 0 \pmod{\theta_{q_0}^0, \theta_{q_0}^1, \theta_{q_0}^2}$.
- (2) $F_t(q_0)f(q_0)^2 - F_s(q_0)f(q_0)g(q_0) + F_r(q_0)g(q_0)^2 = 0$.
- (3) 2 次方程式 $F_r(q_0)h^2 - F_s(q_0)h + F_t(q_0) = 0$ の解 h が存在して, $g(q_0) = hf(q_0)$.

そこで, p_0 は parabolic point であるとし, $h := \frac{F_s}{2F_r}$ とおく. このとき, $\Delta(p_0) = 0$ より, $h(p_0)$ は 2 次方程式 $F_r(p_0)h^2 - F_s(p_0)h + F_t(p_0) = 0$ の重解となる. そこで, 滑らかな関数 f_1, f_2, g_2 が

$$\forall q_0 \in U, f_1(q_0) \neq 0, h(q_0)f_2(q_0) \neq g_2(q_0)$$

を満たすとし, $\theta^1 := f_1\varpi^1 + hf_1\varpi^2, \theta^2 := f_2\varpi^1 + g_2\varpi^2$ とおくことで, 次の定理が得られる:

定理 2.2.

$$\begin{aligned} \theta^0 &:= \varpi^0, \quad \theta^1 := f_1\varpi^1 + hf_1\varpi^2, \quad \theta^2 := f_2\varpi^1 + g_2\varpi^2, \\ \omega^1 &:= -\frac{g_2}{f_1(hf_2 - g_2)}dx + \frac{f_2}{f_1(hf_2 - g_2)}dy, \quad \omega^2 := \frac{h}{hf_2 - g_2}dx - \frac{1}{hf_2 - g_2}dy, \\ \Pi^1 &:= \frac{f_1^2(hf_2 - g_2)}{F_r} \frac{dF}{dy} \omega^1 + f_1(hf_2 - g_2)ds + f_1 \left(\frac{F_t f_2}{F_r} - hg_2 \right) dt, \\ \Pi^2 &:= \frac{f_1 f_2 (hf_2 - g_2)}{F_r} \frac{dF}{dy} \omega^1 + 2f_2(hf_2 - g_2)ds + \left(\frac{F_t f_2^2}{F_r} - g_2^2 \right) dt \end{aligned}$$

とおく. このとき, $(\theta^0, \theta^1, \theta^2, \omega^1, \omega^2, \Pi^1, \Pi^2)$ は U 上の coframe であり, 次が成り立つ:

$$\begin{cases} d\theta^0 = & -\theta^1 \wedge \omega^1 - \theta^2 \wedge \omega^2 \\ d\theta^1 \equiv & \frac{\Delta \cdot f_1^2}{F_r^2} dt \wedge \omega^1 + \Pi^1 \wedge \omega^2 \pmod{\theta^0, \theta^1, \theta^2} \\ d\theta^2 \equiv & \Pi^1 \wedge \omega^1 + \Pi^2 \wedge \omega^2 \pmod{\theta^0, \theta^1, \theta^2}. \end{cases}$$

特に, $\Delta(q_0) = 0$ を満たす $q_0 \in U$ に対して,

$$\begin{cases} (d\theta^0)_{q_0} = -\theta_{q_0}^1 \wedge \omega_{q_0}^1 - \theta_{q_0}^2 \wedge \omega_{q_0}^2 \\ (d\theta^1)_{q_0} \equiv \Pi_{q_0}^1 \wedge \omega_{q_0}^2 \pmod{\theta_{q_0}^0, \theta_{q_0}^1, \theta_{q_0}^2} \\ (d\theta^2)_{q_0} \equiv \Pi_{q_0}^1 \wedge \omega_{q_0}^1 + \Pi_{q_0}^2 \wedge \omega_{q_0}^2 \pmod{\theta_{q_0}^0, \theta_{q_0}^1, \theta_{q_0}^2}. \end{cases}$$

2.2 $F_s(p_0) < 0$ かつ p_0 が hyperbolic point の場合

$F_s(p_0) < 0$ かつ p_0 が hyperbolic point であるとする. このとき, $F_r(p_0) \neq 0$ の場合と同様に次の補題が成り立つ:

補題 2.3. f, g を滑らかな関数とし, $\theta := f\varpi^1 + g\varpi^2$ とおく. さらに, $q_0 \in U$ とする. このとき, 次の (1) と (2) は同値である:

- (1) $(d\theta)_{q_0} \wedge (d\theta)_{q_0} \equiv 0 \pmod{\theta_{q_0}^0, \theta_{q_0}^1, \theta_{q_0}^2}.$
- (2) $F_t(q_0)f(q_0)^2 - F_s(q_0)f(q_0)g(q_0) + F_r(q_0)g(q_0)^2 = 0.$

さらに, 次の 3 つの補題が成り立つ:

補題 2.4. θ を補題 2.3 と同様に定め, $q_0 \in U$ は $F_r(q_0) \neq 0$ を満たすとする. このとき, 次の (1) と (2) は同値である:

- (1) $F_t(q_0)f(q_0)^2 - F_s(q_0)f(q_0)g(q_0) + F_r(q_0)g(q_0)^2 = 0.$
- (2) 2 次方程式 $F_r(q_0)h^2 - F_s(q_0)h + F_t(q_0) = 0$ の解 h が存在して, $g(q_0) = hf(q_0).$

補題 2.5. θ を補題 2.3 と同様に定め, $q_0 \in U$ は $F_t(q_0) \neq 0$ を満たすとする. このとき, 次の (1) と (2) は同値である:

- (1) $F_t(q_0)f(q_0)^2 - F_s(q_0)f(q_0)g(q_0) + F_r(q_0)g(q_0)^2 = 0.$
- (2) 2 次方程式 $F_t(q_0)h^2 - F_s(q_0)h + F_r(q_0) = 0$ の解 h が存在して, $f(q_0) = hg(q_0).$

補題 2.6. θ を補題 2.3 と同様に定め, $q_0 \in U$ は $F_r(q_0) = F_t(q_0) = 0$ を満たすとする. このとき, 次の (1) と (2) は同値である:

- (1) $F_t(q_0)f(q_0)^2 - F_s(q_0)f(q_0)g(q_0) + F_r(q_0)g(q_0)^2 = 0.$
- (2) $f(q_0) = 0$ または $g(q_0) = 0.$

ここで, p_0 は hyperbolic point であるとし, $h'_+ := F_s + 2\sqrt{-\Delta}$, $h'_- := F_s - 2\sqrt{-\Delta}$ とおく. このとき, $F_r(q_0) \neq 0$ ならば, $\frac{h'_+(q_0)}{2F_r(q_0)}$ と $\frac{h'_-(q_0)}{2F_r(q_0)}$ は 2 次方程式 $F_r(q_0)h^2 - F_s(q_0)h + F_t(q_0) = 0$ の相異なる実数解, $F_t(q_0) \neq 0$ ならば, $\frac{h'_+(q_0)}{2F_t(q_0)}$ と $\frac{h'_-(q_0)}{2F_t(q_0)}$ は 2 次方程式 $F_t(q_0)h^2 - F_s(q_0)h + F_r(q_0) = 0$ の相異なる実数解となる. さらに, $F_r(q_0) \neq 0$, $F_t(q_0) \neq 0$ ならば,

$$\frac{h'_+(q_0)}{2F_r(q_0)} \cdot \frac{h'_-(q_0)}{2F_t(q_0)} = \frac{h'_-(q_0)}{2F_r(q_0)} \cdot \frac{h'_+(q_0)}{2F_t(q_0)} = 1.$$

そこで, $F_s(p_0) < 0$ とし, 滑らかな関数 f_0, g_0 が

$$\forall q_0 \in U, f_0(q_0) \neq 0, g_0(q_0) \neq 0$$

を満たすとする. このとき, $\theta^1 := 2F_r f_0 \varpi^1 + h'_- f_0 \varpi^2$, $\theta^2 := h'_- g_0 \varpi^1 + 2F_t g_0 \varpi^2$ とおくことで, 次の定理が得られる:

定理 2.7.

$$\begin{aligned}\theta^0 &:= \varpi^0, \quad \theta^1 := 2F_r f_0 \varpi^1 + h'_- f_0 \varpi^2, \quad \theta^2 := h'_- g_0 \varpi^1 + 2F_t g_0 \varpi^2, \\ \omega^1 &:= \frac{2F_t}{4h'_- f_0 \sqrt{-\Delta}} dx - \frac{1}{4f_0 \sqrt{-\Delta}} dy, \quad \omega^2 := -\frac{1}{4g_0 \sqrt{-\Delta}} dx + \frac{2F_r}{4h'_- g_0 \sqrt{-\Delta}} dy, \\ \Pi^1 &:= -\frac{4h'_- f_0^2 g_0 \sqrt{-\Delta}}{F_s} \left(2F_r \frac{dF}{dx} - h'_- \frac{dF}{dy} \right) \omega^2 - \frac{8F_r^2 f_0^2 \sqrt{-\Delta}}{F_s} dr + \frac{2(h'_-)^2 f_0^2 \sqrt{-\Delta}}{F_s} dt, \\ \Pi^2 &:= \frac{4h'_- f_0 g_0^2 \sqrt{-\Delta}}{F_s} \left(h'_- \frac{dF}{dx} - 2F_t \frac{dF}{dy} \right) \omega^1 + \frac{2(h'_-)^2 g_0^2 \sqrt{-\Delta}}{F_s} dr - \frac{8F_t^2 g_0^2 \sqrt{-\Delta}}{F_s} dt,\end{aligned}$$

とおく. このとき, $(\theta^0, \theta^1, \theta^2, \omega^1, \omega^2, \Pi^1, \Pi^2)$ は U 上の coframe であり, 次が成り立つ:

$$\begin{cases} d\theta^0 = -\theta^1 \wedge \omega^1 - \theta^2 \wedge \omega^2 \\ d\theta^1 \equiv \Pi^1 \wedge \omega^1 \quad \text{mod } \theta^0, \theta^1, \theta^2 \\ d\theta^2 \equiv \Pi^2 \wedge \omega^2 \quad \text{mod } \theta^0, \theta^1, \theta^2. \end{cases}$$

3 今後の展望

今回の主結果で得られた U 上の coframe $(\theta^0, \theta^1, \theta^2, \omega^1, \omega^2, \Pi^1, \Pi^2)$ の表示より, 微分方程式 (1.1) に付随する微分式系の様々な不変量を考察することができる. 例えば, 微分方程式 (1.1) が hyperbolic 型または parabolic 型であるときの D の Monge 系の構造を調べることができる.

参考文献

- [1] R. L. Bryant, S. S. Chern, R. B. Gardner, H. L. Goldschmidt, and P. A. Griffiths. *Exterior differential systems*, Vol. 18 of *Mathematical Sciences Research Institute Publications*. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [2] Elie Cartan. Les systèmes de Pfaff, à cinq variables et les équations aux dérivées partielles du second ordre. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)*, Vol. 27, pp. 109–192, 1910.
- [3] Thomas A. Ivey and Joseph M. Landsberg. *Cartan for beginners*, Vol. 175 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2016. Differential geometry via moving frames and exterior differential systems.
- [4] Takahiro Noda, Kazuhiro Shibuya, and Koichi Takeuchi. A normalization of the structure equations for implicit second-order PDE. *Bull. Kyushu Inst. Technol. Pure Appl. Math.*, No. 73, pp. 1–29, 2026.

等積アファインはめ込みの絶対全曲率の最小性と凸性の関係について

横浜国立大学 大学院理工学府 数物・電子情報系理工学専攻
山内優太 (Yuta YAMAUCHI) *

概要

本稿では、非退化とは限らないアファインはめ込みに対する絶対全曲率の最小性と凸性の関係について述べる。Koike [4, 5] により、一般余次元の等積アファインはめ込みについての Chern–Lashof 型不等式が得られている。本稿では、絶対全曲率が最小値 2 をとるとき像が必ず $(n+1)$ 次元アファイン部分空間に含まれることを示し、さらに凸超曲面であることと同値になるという結果について紹介する。

1 序論

n, r を正の整数とし、 $f : (M, \nabla, \theta) \rightarrow (\mathbf{R}^{n+r}, \tilde{\nabla}, \tilde{\omega})$ を等積構造を備えた n 次元多様体から等積構造を備えた $(n+r)$ 次元アファイン空間へのアファインはめ込みとする。もし横断束 N と、 N 上の体積要素 $\theta^\perp$ が存在して、 M 上の等積構造 (∇, θ) が $(N, \theta^\perp)$ から誘導されるならば、 f を**等積アファインはめ込み**と呼ぶ。等積アファインはめ込みに対して、Koike [4] は Lipschitz–Killing 曲率と絶対全曲率を導入した。絶対全曲率は、はめ込みがその空間の中で大域的にどれだけ曲がるかを測る量であり、凹凸や位相的複雑さの増大に伴って大きくなる。Chern と Lashof は [1, 2] において、ユークリッド空間へのコンパクト多様体のはめ込みの絶対全曲率がベッチ数の総和以上であること、また絶対全曲率が 2 に等しいことと、像が $\mathbf{E}^{n+r}$ のある $(n+1)$ 次元アファイン部分空間に埋め込まれた凸超曲面であることが同値であることを示した。Koike [4] は等積アファインはめ込みに対しても Chern–Lashof 型の定理が成り立つことを示している。なお、等積アファインはめ込みの場合、絶対全曲率は一般に単位楕円面 S の取り方に依存するため、以下ではその依存性を明示して $\tau_S(f)$ と表す (詳しくは注意 2.3 を参照)。

事実 1.1 ([4]). M を向き付けられた n 次元コンパクト多様体とし、 $f : M \rightarrow \mathbf{R}^{n+r}$ を $(n+r)$ 次元アファイン空間への等積アファインはめ込みとする。また、 S を任意の単位楕円面とする。

(1) 単位楕円面 S に関する f の絶対全曲率 $\tau_S(f)$ は

$$\tau_S(f) \geq \sum_{k=0}^n b_k(M, \mathbf{F})$$

* E-mail: yamauchi-yuta-hj@ynu.jp

を満たす．ただし $b_k(M, \mathbf{F})$ は、任意の係数体 $\mathbf{F}$ に関する M の k 次の Betti 数を表す．

(2) もし $\tau_S(f) < 3$ ならば、 M は n 次元球面と同相である．

しかし、[4, 5] においては、絶対全曲率の最小性による特徴づけ、とくに凸性との関係は明らかではなかった．本稿では、絶対全曲率の最小性と凸性の関係が等積アファインにおいても成り立つことを紹介する．

2 主定理

本節では最初に [4, 5] に従い、一般余次元の場合の等積アファインはめ込みと、それに付随する Lipschitz–Killing 曲率等の概念について紹介する．一般余次元の等積アファインはめ込みのいくつかの性質は、[6] の Notes 1, 2 にも述べられている．

本稿では、全てのアファイン接続は振れないものと仮定する． $f: M \rightarrow (\mathbf{R}^{n+r}, \tilde{\nabla}, \tilde{\omega})$ を、等積構造 $(\tilde{\nabla}, \tilde{\omega})$ を備えたアファイン空間 $\mathbf{R}^{n+r}$ への、 n 次元多様体 M からのアファインはめ込みとする． $(N, \theta^\perp)$ を f の横断束と N 上の体積要素とする．このとき、 M 上のアファイン接続 ∇ と体積要素 θ を次で定める：

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_X df(Y) &= df(\nabla_X Y) + \alpha(X, Y), \\ \theta(X_1, \dots, X_n) &= \frac{\tilde{\omega}(df(X_1), \dots, df(X_n), \xi_1, \dots, \xi_r)}{\theta^\perp(\xi_1, \dots, \xi_r)} \quad (X_1, \dots, X_n \in TM)\end{aligned}$$

ここで X, Y は M の接ベクトル場であり、 $(\xi_1, \dots, \xi_r)$ は N のフレームである．また、一つ目の式は接成分と N 成分に分解したものであり、 α は N に値をもつ対称テンソル場である． ∇ を誘導された接続、 θ を $(N, \theta^\perp)$ により誘導された体積要素と呼ぶ． (∇, θ) を M の等積構造（すなわち $\nabla\theta = 0$ ）とする．もしはめ込み $f: (M, \nabla, \theta) \rightarrow (\mathbf{R}^{n+r}, \tilde{\nabla}, \tilde{\omega})$ が (∇, θ) を誘導する $(N, \theta^\perp)$ を持つならば、 f を **等積アファインはめ込み** と呼ぶ．以後そのような $(N, \theta^\perp)$ を固定する． N に値をもつ対称テンソル場

$$\alpha(X, Y) := \tilde{\nabla}_X df(Y) - df(\nabla_X Y) \quad (X, Y \in TM)$$

を (f, N) の **アファイン基本形式** と呼ぶ．超曲面の場合 ($r = 1$) では、 $\theta^\perp(\xi) = 1$ として対称 $(0, 2)$ 型テンソル場 α_ξ を

$$\alpha_\xi(X, Y)\xi = \tilde{\nabla}_X df(Y) - df(\nabla_X Y) \quad (X, Y \in TM) \quad (2.1)$$

で定める．この α_ξ を (f, ξ) の **アファイン基本形式** と呼ぶ．

各 $\phi(\neq 0) \in \bigwedge^{n+r-1} \mathbf{R}^{n+r}$ に対し、 $\phi = v_1 \wedge \dots \wedge v_{n+r-1}$ と表し、 $\tilde{\omega}(v_1, \dots, v_{n+r}) = 1$ を満たす $v_{n+r} \in \mathbf{R}^{n+r}$ を取る．このとき ϕ の高さ関数 $\tilde{h}_\phi$ を

$$\text{pr}_{v_{n+r}}(v) = \tilde{h}_\phi(v) \cdot v_{n+r} \quad (v \in \mathbf{R}^{n+r})$$

で定める．ここで $\text{pr}_{v_{n+r}}$ は

$$\text{Span}\{v_1, \dots, v_{n+r-1}\} \oplus \text{Span}\{v_{n+r}\} = \mathbf{R}^{n+r}$$

という分解に関して $\text{Span}\{v_{n+r}\}$ への射影を表す. この定義が ϕ の表し方に依らないことは容易に分かる. $\bigwedge^{n+r-1} \mathbf{R}^{n+r}$ の単位楕円面 S を一つ固定する. これはアファイン座標系 $(x_1, \dots, x_{n+r})$ に関して $\sum_{i=1}^{n+r} x_i^2 = 1$ と表され, かつ $\tilde{\omega}'(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{n+r}}) = 1$ を満たす集合とする. ここで $\tilde{\omega}'$ は $\tilde{\omega}(v_1, \dots, v_{n+r}) = 1$ の下で

$$\tilde{\omega}'(\hat{v}_1 \wedge \dots \wedge v_{n+r}, \dots, v_1 \wedge \dots \wedge \hat{v}_{n+r}) = (-1)^{(n+r)(n+r-1)/2}$$

により定める $\bigwedge^{n+r-1} \mathbf{R}^{n+r}$ 上の体積要素である. $\tilde{\nu}_N : \bigwedge^{r-1} N \rightarrow \bigwedge^{n+r-1} \mathbf{R}^{n+r}$ を

$$\tilde{\nu}_N(\eta) := df(e_1) \wedge \dots \wedge df(e_n) \wedge \eta$$

で定める. ここで $(e_1, \dots, e_n)$ は $\theta(e_1, \dots, e_n) = 1$ を満たす TM のフレームとする. f の横断楕円面束を

$$B := \tilde{\nu}_N^{-1}(S) \subset \bigwedge^{r-1} N$$

で定める. 制限 $\nu := \tilde{\nu}_N|_B : B \rightarrow S$ を $(f, N, \theta^\perp, S)$ の Gauss 写像と呼ぶ.

定義 2.1 ([4]). $\eta \in B$ に対し, $G : B \rightarrow \mathbf{R}$ を

$$G(\eta) := (-1)^n \det_{\theta}(\tilde{h}_\eta \circ \alpha)$$

で定める. ここで $\det_{\theta}(\tilde{h}_\eta \circ \alpha)$ は $\theta(e_1, \dots, e_n) = 1$ を満たす $T_{\pi(\eta)}M$ のフレーム $(e_1, \dots, e_n)$ に対して行列 $[(\tilde{h}_\eta \circ \alpha)(e_i, e_j)]_{1 \leq i, j \leq n}$ の行列式を表す. G を $(f, N, \theta^\perp, S)$ の Lipschitz-Killing 曲率と呼ぶ.

B と S 上の体積要素をそれぞれ ω_B と $\tilde{\omega}_S$ とする ([4] 参照). このとき, ω_B と $\tilde{\omega}_S$ の間には次が成り立つ [4, Proposition 2.2] :

$$(\nu^* \tilde{\omega}_S)_\eta = G(\eta) \cdot (\omega_B)_\eta \quad (\eta \in B). \quad (2.2)$$

等積アファインはめ込みの絶対全曲率は次で定義される.

定義 2.2 ([4]). M を向き付けられたコンパクトな n 次元多様体とする. 等積アファインはめ込み $f : (M, \nabla, \theta) \rightarrow (\mathbf{R}^{n+r}, \tilde{\nabla}, \tilde{\omega})$ の単位楕円面 S に関する絶対全曲率 $\tau_S(f)$ を

$$\tau_S(f) := \frac{1}{\text{vol}(S^{n+r-1}(1))} \int_B |G| \omega_B$$

で定める. ここで $\text{vol}(S^{n+r-1}(1))$ は単位球面 $S^{n+r-1}(1)$ の体積を表す.

注意 2.3. 絶対全曲率 $\tau_S(f)$ は, 横断束とその体積要素の組 $(N, \theta^\perp)$ の取り方には依存しない [5, Theorem A]. 一方で, 単位楕円面 S の取り方には依存する. ただし, $\tau_S(f)$ がある単位楕円面 S に対して M の Betti 数の総和に等しいならば, その等式は任意の単位楕円面に対して成り立つ. したがって, 絶対全曲率の最小性は単位楕円面の選択に依存しない.

$C \subset B$ を Gauss 写像 $\nu : B \rightarrow S$ の臨界点の集合とする. Sard の定理より, 像 $\nu(C)$ は測度 0 である. さらに, f の高さ関数 $h_\phi = \tilde{h}_\phi \circ f : M \rightarrow \mathbf{R}$ が Morse でないことと $\phi \in \nu(C)$ は同値で

ある．従って (2.2) より，絶対全曲率 $\tau_S(f)$ は，高さ関数 $h_\phi = \tilde{h}_\phi \circ f$ の臨界点の個数の平均に等しい：

$$\tau_S(f) = \frac{1}{\text{vol}(\mathcal{S}^{n+r-1}(1))} \int_{S \setminus \nu(C)} \# \text{crit}(h_\phi) \tilde{\omega}_S. \quad (2.3)$$

ここで $\# \text{crit}(h_\phi)$ は M 上の h_ϕ の臨界点の個数を表す． M はコンパクトであるから， ϕ に対して M 上に少なくとも二つの臨界点が存在する．従って $\tau_S(f) = 2$ は，任意の $\phi \in S \setminus \nu(C)$ に対して高さ関数 h_ϕ がちょうど二つの臨界点をもつことと同値である．

定理 2.4 ([7]). M を向き付けられたコンパクトな n 次元多様体とし， $f : (M, \nabla, \theta) \rightarrow (\mathbf{R}^{n+r}, \tilde{\nabla}, \tilde{\omega})$ を等積アファインはめ込みとする．もし f の絶対全曲率が 2 に等しいならば，像 $f(M)$ は $\mathbf{R}^{n+r}$ のある $(n+1)$ 次元アファイン部分空間に埋め込まれた凸超曲面である．また，逆も成り立つ．

本定理は， $\mathbf{R}^{n+1}$ に埋め込まれた凸超曲面であることが，一般の余次元における大域的な曲率条件によって特徴づけられることを示す．

3 例

本節では，絶対全曲率が最小であるアファインはめ込みの例を与える．この例は，アファイン基本形式が退化する特異点をもつ凸曲面である．さらに，この曲面が良い性質をもつ退化計量を備えることを示す．

例 3.1. Σ をアファイン空間 $\mathbf{R}^3$ における閉曲面とし，

$$\Sigma := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid (z - \sqrt{x^2 + y^2})^4 + (z + \sqrt{x^2 + y^2})^4 = 16\}$$

で定める．このとき Σ はアファイン空間における凸曲面である．アファイン基本形式の特異点集合 $\text{Sing}(\Sigma)$ は

$$\text{Sing}(\Sigma) = \{(\cos v, \sin v, \pm 1) \in \Sigma \mid v \in [-\pi, \pi]\}$$

で与えられる．

Σ の局所座標表示は $f_\pm : [-(\frac{1}{2})^{1/4}, (\frac{1}{2})^{1/4}] \times [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbf{R}^3$ として

$$f_\pm(u, v) := \left((u - (1 - u^4)^{1/4}) \cos v, (u - (1 - u^4)^{1/4}) \sin v, \pm(u + (1 - u^4)^{1/4}) \right)$$

で与えられる．以後 f_+ を考える．関数 $E(u)$ と $F(u)$ を

$$E(u) := u - (1 - u^4)^{1/4}, \quad F(u) := u + (1 - u^4)^{1/4}$$

で定め，

$$\delta(u) := \sqrt{(E'(u))^2 + (F'(u))^2}$$

とおく．ここで $'$ は u による微分を表す．ベクトル場 ξ を

$$\xi(u, v) := \frac{1}{\delta(u)} (F'(u) \cos v, F'(u) \sin v, -E'(u)).$$

で定める．このとき ξ は等積な横断的ベクトル場である．アファイン基本形式 α_ξ の行列式は (cf. (2.1))

$$\det \alpha_\xi = \frac{6u^2}{\delta(u)^2(1-u^4)^{13/4}} \cdot (-u + (1-u^4)^{1/4})(-1 + u^4 + u(1-u^4)^{3/4}) \\ \cdot (-1 + u^3(1-u^4)^{1/4} + u(1-u^4)^{3/4})$$

で与えられる．さらに C^∞ 級関数 $\lambda: [-(\frac{1}{2})^{1/4}, (\frac{1}{2})^{1/4}] \rightarrow \mathbf{R}$ が存在して $\det \alpha_\xi = \lambda^2$ が成り立つ．従って $\lambda(u) = 0$ は $u = 0$ と同値である．言い換えると, $\det \alpha_\xi$ が 0 になるのは $u = 0$ のときに限る．よって像 $f(0, v)$ は $\text{Sing}(\Sigma)$ と一致する．また $\lambda'(0)$ は 0 ではない．このとき α_ξ は *Kossowski metric* の条件を満たす ([3] 参照)．

この例は, アファイン計量が退化する場合でも意味のある幾何構造が存在し得ることを示し, 非退化性を越えたアファイン微分幾何の新たな方向性を示唆する．

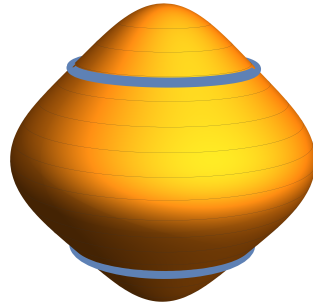


図1 例 3.1 における凸曲面 Σ および特異点集合 $\text{Sing}(\Sigma)$ (青い曲線)． Σ の アファイン基本形式は半正定値である．

参考文献

- [1] Chern, S. S. and Lashof, R. K., *On the total curvature of immersed manifolds*, Am. J. Math. **79** (1957), 306–318.
- [2] Chern, S. S. and Lashof, R. K., *On the total curvature of immersed manifolds. II*, Mich. Math. J. **5** (1958), 5–12.
- [3] Hasegawa, M., Honda, A., Naokawa, K., Saji, K., Umehara, M. and Yamada, K., *Intrinsic properties of surfaces with singularities*, Int. J. Math. **26** (2015), 34.
- [4] Koike, N., *The Lipschitz-Killing curvature for an equiaffine immersion and theorems of Gauss-Bonnet type and Chern-Lashof type*, Result. Math. **39** (2001), 230–244.
- [5] Koike, N., *The total curvature of an equiaffine immersion*, Result. Math. **42** (2002), 81–106.
- [6] Nomizu, K. and Sasaki, T., *Affine differential geometry*, Cambridge: Cambridge University Press. (1994).
- [7] Yamauchi, Y., *Minimal total absolute curvature for equiaffine immersions*, preprint, arXiv: 2604.00384.

Comparison theorems in centro-affine differential geometry

藤谷恭明 *

Milman [9] は中心 affine 微分幾何を用いて凸幾何学における問題を研究した. このアプローチでは, Levi-Civita 接続とは異なるいくつかの affine 接続が導入される. 一方, 重み付き多様体の比較幾何の文脈では, Wylie-Yeroshkin [13] が, その Ricci 曲率が 1-重み付き Ricci 曲率と一致する affine 接続を考察した. 本発表では Milman により導入された affine 接続の一つが, Wylie-Yeroshkin 接続と一致することを確認し, 比較定理の一つである Cheng の最大直径定理について Milman [9] の設定において議論する. 本発表は preprint [4] に基づく. 本稿を通じて, $n \geq 2$ と仮定する.

1 比較幾何

Cheng の最大直径定理は以下の通りである (Cheng [2, Theorem 3.1]):

定理 1.1 ([2]). (M, g) を n 次元完備 Riemann 多様体とする. $\kappa > 0$ に対して,

$$\mathrm{Ric}_g \geq (n-1)\kappa g, \quad \mathrm{diam}(M, g) = \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$$

を仮定する. このとき, (M, g) は半径 $1/\sqrt{\kappa}$ の球面と等長である.

上述の Cheng の最大直径定理は重みなしの多様体におけるものであるが, この定理は重み付き多様体の場合へ拡張されている. 以下ではまず, 重み付き多様体の比較幾何について紹介する. (M, g) を n 次元 Riemann 多様体とし, $f \in C^\infty(M)$ とする. また, v_g を Riemann 体積測度とする. 三つ組 $(M, g, e^{-f}v_g)$ を重み付き Riemann 多様体という. $N \in (-\infty, 1] \cup (n, \infty]$ に対して, N -重み付き Ricci 曲率を以下のように定義する:

$$\mathrm{Ric}_{g,f}^N := \mathrm{Ric}_g + \mathrm{Hess} f - \frac{df \otimes df}{N-n}.$$

ただし, $N = +\infty$ のとき, 最後の項は 0 とする. $N = +\infty$ の場合は, Lichnerowicz [7] および Bakry-Émery [1] により導入され, $N \in (n, +\infty)$ の場合は Qian [11] により導入された. $N \in (n, \infty)$ に対して, $\mathrm{Ric}_{g,f}^N \geq (n-1)\kappa g$ を満たす重み付き Riemann 多様体の比較幾何学的な性質は, $\mathrm{Ric}_g \geq (n-1)\kappa g$ かつ $\dim(M) \leq N$ を満たす Riemann 多様体の性質と類似している. $N_1 \in (-\infty, 1)$ および $N_2 \in (n, +\infty)$ に対して,

$$\mathrm{Ric}_{g,f}^{N_2} \leq \mathrm{Ric}_{g,f}^\infty \leq \mathrm{Ric}_{g,f}^{N_1} \leq \mathrm{Ric}_{g,f}^1$$

が成立する. 従って, $\mathrm{Ric}_{g,f}^1$ の下限条件は $\mathrm{Ric}_{g,f}^{N_2}$ の下限条件よりも弱い条件である. 近年, $N \in (-\infty, 1]$ の場合は盛んに研究されてきた. とくに, Ohta [10] および Kolesnikov-Milman [5] は $N \in (-\infty, 0)$ の場合を研究した. さらに, Wylie [12] は $N = 1$ の場合に Cheeger-Gromoll 型の分裂定理を得た. その後, $\varphi \in C^\infty(M)$ に対して, Wylie-Yeroshkin [13] は次の affine 接続を考察した:

$$\nabla_X^{g,\varphi} Y := \nabla_X^g Y - d\varphi(X)Y - d\varphi(Y)X.$$

* 東京大学大学院数理科学研究科 yasukifujitani@g.ecc.u-tokyo.ac.jp

ここで、 ∇^g は g の Levi-Civita 接続である。Affine 接続 D に対して、曲率テンソルと Ricci 曲率を以下のように定義する：

$$R^D(X, Y)Z := D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X, Y]}Z, \quad \text{Ric}_g^D(Y, Z) := \sum_{i=1}^n g(R^D(E_i, Y)Z, E_i).$$

ここで、 $\{E_i\}_{i=1}^n$ は g -正規直交枠である。 Ric_g^D の代わりに Ric^D と書くこともある。Wylie-Yeroshkin [13] は $\varphi := (n-1)^{-1}f$ のとき、

$$\text{Ric}_{g,f}^1 = \text{Ric}^{\nabla^{g,\varphi}} \quad (1)$$

が成り立つことを示した。 $\nabla^{g,\varphi}$ は ∇^g と射影同値であると言われ、射影同値な接続は古くから研究されている。Wylie-Yeroshkin [13] は、 ∇^g と $\nabla^{g,\varphi}$ の測地線がパラメータを除けば曲線として一致するという Weyl の古典的な結果 (例えば Eastwood [3] 参照) を用いた。[13] においては、affine 接続 $\nabla^{g,\varphi}$ の測地線を考えることにより、

$$\text{Ric}_{g,f}^1 \geq (n-1)\kappa e^{-\frac{4f}{n-1}} g \quad (2)$$

を満たす重み付き多様体に対する Bishop-Gromov 体積比較定理、Bonnet-Myers 定理、および Cheng 型の最大直径定理を得た。これらの定理については Lu-Minguzzi-Ohta [8] および Kuwae-Sakurai [6] も参照されたい。ここで、 $N = 1$ の場合の Cheng の最大直径定理を述べるために、Lu-Minguzzi-Ohta [8] や Kuwae-Sakurai [6] に沿って記法を準備する。 $\theta \in U_p M := \{\theta \in T_p M \mid |\theta|_g = 1\}$ に対して、 $\gamma_{p,\theta}$ を $\gamma_{p,\theta}(0) = p$ かつ $\gamma'_{p,\theta}(0) = \theta$ を満たす単位速度測地線とする。さらに $t \geq 0$ および $\theta \in U_p M$ に対して、

$$s_{f,p,\theta}(t) := \int_0^t e^{-\frac{2f(\gamma_{p,\theta}(\xi))}{n-1}} d\xi \quad (3)$$

と定義する。 $N = 1$ の場合における Bonnet-Myers 型および Cheng の最大直径定理は以下の通りである (Wylie-Yeroshkin [13, Theorem 2.2 and Theorem 4.16], Lu-Minguzzi-Ohta [8, Theorem 3.6] および Kuwae-Sakurai [6, Theorem 3.3 and Corollary 3.4])。

定理 1.2 ([6, 13]). $(M, g, e^{-f}v_g)$ を n 次元完備重み付き Riemann 多様体とする。 $\kappa > 0$ に対して、

$$\text{Ric}_{g,f}^1 \geq (n-1)\kappa e^{-\frac{4f}{n-1}} g$$

と仮定する。 $\widehat{g} := e^{-\frac{4f}{n-1}} g$ とおく。このとき、

$$\text{diam}(M, \widehat{g}) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$$

が成り立つ。さらに $f(p) = 0$ かつ

$$d_{\widehat{g}}(p, q) = \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$$

を満たす $p, q \in M$ が存在すると仮定する。このとき、 M は $\mathbb{S}^n$ と同相であり、 f は p に関して *radial* であり、

$$g = dt^2 + e^{\frac{2f(\gamma_{p,\theta}(t))}{n-1}} \frac{\sin^2(\sqrt{\kappa} s_{f,p,\theta}(t))}{\kappa} g_{\mathbb{S}^{n-1}} \quad (4)$$

が $0 < t < d_g(p, q)$ で成り立つ。ここで、 (t, θ) は p の周りの測地極座標である。

2 凸体の中心 affine 微分幾何

$x : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ を embedding とする．ここで M は C^∞ 多様体である．また， $\mathbb{R}^{n+1}$ 上の標準平坦接続を $\overline{D}$ で表す． x に沿ったなめらかなベクトル場 ξ が横断的であるとは任意の $p \in M$ に対して，

$$\xi_p \notin x_*(T_p M)$$

が成り立つことをいう．横断ベクトル場 ξ に対して， $S^\xi \in \Gamma(T^*M \otimes TM)$ ， $\tau^\xi \in \Omega^1(M)$ ， TM 上の対称双線形形式 g^ξ ，および torsion free な affine 接続 ∇^ξ が存在して，次の Gauss–Weingarten 型の方程式を満たす：

$$\begin{aligned} \overline{D}_X(x_*Y) &= x_*(\nabla_X^\xi Y) - g^\xi(X, Y)\xi, \\ \overline{D}_X\xi &= -x_*(S^\xi X) + \tau^\xi(X)\xi. \end{aligned} \quad (5)$$

位置ベクトル場 $\xi_x(p) := x(p)$ が横断ベクトル場であるとき， ∇^{ξ_x} を中心 affine 接続という． g^ξ が非退化であるとき， g^ξ -双対接続 $(\nabla^\xi)^*$ を次の関係により定義する：

$$X(g^\xi(Y, Z)) = g^\xi(\nabla_X^\xi Y, Z) + g^\xi(Y, (\nabla^\xi)^*_X Z).$$

中心 affine 接続は中心 affine 変換のもとで不変である．実際，次が成立する：

命題 2.1. $x : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ を embedding とする．ここで， M は n 次元 C^∞ 多様体である． $\xi_x := x$ が横断ベクトル場であると仮定する． $A \in GL(\mathbb{R}^{n+1})$ に対して， $\tilde{x} := A \circ x$ とおく．このとき，

$$\nabla^{\xi_x} = \nabla^{\xi_{\tilde{x}}}, \quad g^{\xi_x} = g^{\xi_{\tilde{x}}}$$

が成り立つ．

以下では，[9] に従って，用語を導入する． E を $\mathbb{R}$ 上の $(n+1)$ 次元ベクトル空間とする．本稿では E を $\mathbb{R}^{n+1}$ と同一視する．また， E^* をその双対空間とする．標準 Euclidean 内積を固定し，しばしば E^* も E と同一視する． E および E^* における単位球面をそれぞれ $\mathbb{S}$ および $\mathbb{S}^*$ で表す． K を原点を内部に含む凸体全体の集合とし， K_+^∞ を K に属し， C^∞ 級滑らかな境界と正の曲率をもつ凸体全体の集合とする． $K \in K$ に対して，支持関数を次で定義する：

$$h_K(x^*) := \max_{x \in K} \langle x^*, x \rangle.$$

ただし， $x^* \in E^*$ であり， $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は E と E^* の間の自然なペアリングを表す． $e \in \mathbb{S}^*$ に対して， $e^\perp := \{x \in E \mid \langle e, x \rangle = 0\}$ とおき， $P_{e^\perp} : E \rightarrow E$ を部分空間 $e^\perp$ への射影とする．制限することにより， h_K は $\mathbb{S}^*$ 上の関数とみなせることに注意する． $K \in K_+^\infty$ に対して，位置ベクトルを

$$x_{\partial K}^K(p) := p$$

で表す．ここで， $p \in \partial K$ である．また，対応する中心 affine 接続と双線形形式を $\nabla_K^{\partial K}$ および $g_K^{\partial K}$ で表す． $K^* := \{x^* \in E^* \mid h_K(x^*) \leq 1\}$ とおく． $M \in \mathcal{M}_K := \{\mathbb{S}, \mathbb{S}^*, \partial K, \partial K^*\}$ に対して，Milman [9, Section 4] は $M_i, M_j \in \mathcal{M}_K$ に対する微分同相写像 $T_K^{M_i \rightarrow M_j} : M_i \rightarrow M_j$ を構成し， $x_K^M := T_K^{M \rightarrow \partial K}$ と置いた． $T_K^{\partial K \rightarrow \mathbb{S}^*}$ は Gauss 写像と一致することに注意する．ここで，以下の通り記号を定義する：

$$g_K^M := (x_K^M)^* g_K^{\partial K}, \quad \nabla_K^M := (x_K^M)^* \nabla_K^{\partial K}.$$

注意 2.2. $M_1, M_2 \in \mathcal{M}_K$ に対して，

$$g_K^{M_1} = (T_K^{M_1 \rightarrow M_2})^* g_K^{M_2}, \quad \nabla_K^{M_1} = (T_K^{M_1 \rightarrow M_2})^* \nabla_K^{M_2}$$

が成立する．

凸体は次の意味で正の定数中心 affine Ricci 曲率をもつ (例えば [9, Subsection 3.10] 参照):

命題 2.3. $K \in \mathcal{K}_+^\infty$ とする. $M \in \mathcal{M}_K$ について,

$$\text{Ric}^{\nabla_K^M} = \text{Ric}^{(\nabla_K^M)^*} = (n-1)g_K^M \quad (6)$$

が成り立つ. ここで, $(\nabla_K^M)^*$ は g_K^M -双対接続である.

以下では, h_K の $\bar{D}$ に関する Hessian を $\bar{D}^2 h_K$ で表し, $\bar{D}^2 h_K$ の TS^* への制限を $D^2 h_K$ で表す. 計量と接続は次のように明示的に書ける ([9, Proposition 4.2]):

命題 2.4 ([9]). $K \in \mathcal{K}_+^\infty$ とする. このとき,

$$g_K^{\mathbb{S}^*} = \frac{D^2 h_K}{h_K} = \frac{\text{Hess}_{g_{\mathbb{S}^*}} h_K}{h_K} + g_{\mathbb{S}^*},$$

$$(\nabla_K^{\mathbb{S}^*})_X^* Y = \nabla_X^{g_{\mathbb{S}^*}} Y - (X \log h_K)Y - (Y \log h_K)X$$

が成立する. ここで $g_{\mathbb{S}^*}$ は $\mathbb{S}^*$ の標準 Riemann 計量であり, $(\nabla_K^{\mathbb{S}^*})^*$ は $\nabla_K^{\mathbb{S}^*}$ の $g_K^{\mathbb{S}^*}$ -双対接続である.

3 主結果

凸体上の重み付き構造を導入する. $K \in \mathcal{K}_+^\infty$ とし, $\mathbf{n} : \partial K \rightarrow \mathbb{S}^*$ を Gauss 写像とする. 標準 Riemann 計量 $g_{\mathbb{S}^*}$ および $\mathbf{n}$ に付随する記法を次のように導入する:

$$g_{\partial K} := \mathbf{n}^* g_{\mathbb{S}^*}, \quad h_{\partial K} := h_K \circ \mathbf{n}, \quad f_K := (n-1) \log h_K, \quad f_{\partial K} := (n-1) \log h_{\partial K}.$$

さらに,

$$\hat{g}_K^{\mathbb{S}^*} := e^{-\frac{4f_K}{n-1}} g_{\mathbb{S}^*}, \quad \hat{g}_{\partial K} := e^{-\frac{4f_{\partial K}}{n-1}} g_{\partial K}$$

とおく. 次が成り立つ ([4, Proposition 4.1]):

命題 3.1. $K \in \mathcal{K}_+^\infty$ とする. このとき,

$$(\nabla_K^{\partial K})^* = \nabla^{g_{\partial K}, \frac{f_{\partial K}}{n-1}} \quad (7)$$

が成り立つ. ここで, $(\nabla_K^{\partial K})^*$ は $\nabla_K^{\partial K}$ の $g_K^{\partial K}$ -双対接続である. さらに,

$$\text{Ric}_{g_{\partial K}, f_{\partial K}}^1 = \text{Ric}^{(\nabla_K^{\partial K})^*} = \text{Ric}^{\nabla_K^{\partial K}} = (n-1)g_K^{\partial K} \quad (8)$$

が成立する.

従って, 中心 affine Ricci 曲率は 1-重み付き Ricci 曲率として解釈できる. 本発表における主結果は以下の通りである ([4, Theorem 4.5]):

定理 3.2. $K \in \mathcal{K}_+^\infty$ とする. $\kappa > 0$ に対して,

$$\text{Ric}_{g_{\partial K}, f_{\partial K}}^1 \geq (n-1)\kappa e^{-\frac{4f_{\partial K}}{n-1}} g_{\partial K}$$

を仮定し, さらに,

$$d_{\hat{g}_{\partial K}}(x, y) = \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$$

を満たす $x, y \in \partial K$ が存在すると仮定する. このとき, K は回転対称な楕円体である. 特に, $e := \mathbf{n}(x)$ および $\theta \in \mathbb{S}^*$ に対して,

$$h_K(\theta)^2 = h_K(e)^2 \langle \theta, e \rangle^2 + \kappa h_K(e)^{-2} |P_{e^\perp} \theta|^2$$

が成り立つ.

参考文献

- [1] D. Bakry and M. Émery, *Diffusions hypercontractives*, Séminaire de probabilités, XIX, 1983/84, 1985, pp. 177–206.
- [2] S. Y. Cheng, *Eigenvalue comparison theorems and its geometric applications*, Math. Z. **143** (1975), no. 3, 289–297.
- [3] M. Eastwood, *Notes on projective differential geometry*, Symmetries and overdetermined systems of partial differential equations, 2008, pp. 41–60.
- [4] Y. Fujitani, *Comparison theorems in centro-affine differential geometry*, arXiv preprint arXiv:2606.16654 (2026).
- [5] A. V. Kolesnikov and E. Milman, *Poincaré and Brunn-Minkowski inequalities on the boundary of weighted Riemannian manifolds*, Amer. J. Math. **140** (2018), no. 5, 1147–1185.
- [6] K. Kuwae and Y. Sakurai, *Rigidity phenomena on lower N -weighted Ricci curvature bounds with ε -range for nonsymmetric Laplacian*, Illinois J. Math. **65** (2021), no. 4, 847–868.
- [7] A. Lichnerowicz, *Variétés riemanniennes à tenseur C non négatif*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **271** (1970), A650–A653.
- [8] Y. Lu, E. Minguzzi, and S. Ohta, *Comparison theorems on weighted Finsler manifolds and spacetimes with ϵ -range*, Anal. Geom. Metr. Spaces **10** (2022), no. 1, 1–30.
- [9] E. Milman, *Centro-affine differential geometry and the log-Minkowski problem*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **27** (2025), no. 2, 709–772.
- [10] S. Ohta, *(K, N) -convexity and the curvature-dimension condition for negative N* , J. Geom. Anal. **26** (2016), no. 3, 2067–2096.
- [11] Z. Qian, *Estimates for weighted volumes and applications*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **48** (1997), no. 190, 235–242.
- [12] W. Wylie, *A warped product version of the Cheeger-Gromoll splitting theorem*, Trans. Amer. Math. Soc. **369** (2017), no. 9, 6661–6681.
- [13] W. Wylie and D. Yeroshkin, *On the geometry of Riemannian manifolds with density*, arXiv preprint arXiv:1602.08000 (2016).

3次元 isotropic 空間内の特異点付き零平均曲率曲面

岸田 陸玖 (Riku Kishida)*

東京科学大学 情報理工学院

概要

符号が $(0++)$ の退化した内積が付随した 3 次元実ベクトル空間を、**3 次元 isotropic 空間** という。本講演では、3 次元 isotropic 空間内の零平均曲率曲面にある種の特異点を許容したクラスについて紹介する。この応用として、導入したクラスに対し、完備性および有限全曲率に関するある条件の下で、Osseman 型不等式が複数得られることについて述べる。これらの不等式の等号成立条件は、エンドの漸近挙動に密接に関係する。また、等号成立条件を満たす例をいくつか紹介する。なお、本講演の内容は [12] に基づく。

1 準備

3 次元の実ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ に退化した内積

$$\langle (t_1, x_1, y_1), (t_2, x_2, y_2) \rangle := x_1 x_2 + y_1 y_2 \quad ((t_1, x_1, y_1), (t_2, x_2, y_2) \in \mathbb{R}^3)$$

が付随した空間を **3 次元 isotropic 空間 (isotropic 3-space)** といい $\mathbb{I}^3$ と表す。この空間は Cayley-Klein 幾何学の一例として、Strubecker らにより古くから数多くの研究がなされた [18]。また、この空間は、符号が $(-+++)$ の 4 次元 Lorentz-Minkowski 空間 $\mathbb{L}^4$ 内の光的超平面と、次のように同一視できる。

$$\mathbb{I}^3 \ni (t, x, y) \longleftrightarrow (t, x, y, t) \in \{(t, x, y, z) \in \mathbb{L}^4; t - z = 0\}.$$

以後、この同一視を断りなく用いる。また、同一の記号 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を用いて、 $\mathbb{L}^4$ 上の標準的な Lorentz 内積を表す。 Σ^2 を Riemann 面とし、 $f: \Sigma^2 \rightarrow \mathbb{I}^3$ を空間的にはめ込みで、**第一基本形式** $ds^2 := f^* \langle \cdot, \cdot \rangle$ に関して共形的とする。定ベクトル $\mathbf{p} := (1, 0, 0) \in \mathbb{I}^3$ を用いて、 $\mathbb{L}^4$ の部分集合

$$\mathcal{P} := \{\mathbf{v} \in \mathbb{L}^4; \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0, \langle \mathbf{v}, \mathbf{p} \rangle = 1\}$$

を考える。このとき、滑らかな写像 $\nu: \Sigma^2 \rightarrow \mathcal{P}$ で、 $\langle \nu, df \rangle = 0$ を満たすものが一意的に存在し、 f の光的 **Gauss 写像** という。また、 $h := -\langle df, d\nu \rangle$ を f の**第二基本形式** といい、 ds^2 に関する h のトレースの $1/2$ 倍を H とおいて、 f の平均曲率関数という。特に H が恒等的に零である場合、 f を $\mathbb{I}^3$ 内の**零平均曲率曲面** という。 $\mathbb{I}^3$ 内の零平均曲率曲面に関して、Weierstrass 型表現公式が知られている。実際、 Σ^2 上の正則関数 g と正則 1-形式 ω が正則条件と周期条件を満たしているとき、

$$f(z) := \operatorname{Re} \int (g, 1, -i)\omega \quad (z \in \Sigma^2)$$

によって定まる写像 $f: \Sigma^2 \rightarrow \mathbb{I}^3$ は零平均曲率曲面である。組 (g, ω) を f の **Weierstrass data** といい、 g を f の **Gauss 写像** という。この表現公式を元に、 $\mathbb{I}^3$ 内の零平均曲率曲面に関する研究が数多くなされている [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 11, 15, 17]。次の例は、 $\mathbb{I}^3$ 内の零平均曲率曲面の典型例である。

例 1 (カテナイド). $\Sigma^2 := \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $(g, \omega) := (1/z, dz)$ の場合、対応する零平均曲率曲面は、図 1 (a) のように表される。この曲面を $\mathbb{I}^3$ 内の**カテナイド (catenoid)** という。

* kishida.r.1632@m.isct.ac.jp

本研究は、JSPS 科研費 JP25KJ1223 の助成を受けたものである。

2 ZMC-面の定義

先行研究では, $\mathbb{I}^3$ 内の零平均曲率曲面は特異点を持つことが示唆されている [15, 11]. 例えば, $\mathbb{C}$ 上の Weierstrass data $(g, \omega) := (1/z, z dz)$ から得られる零平均曲率曲面は $z = 0$ で交叉帽子特異点を持つ (図 1 (b)).

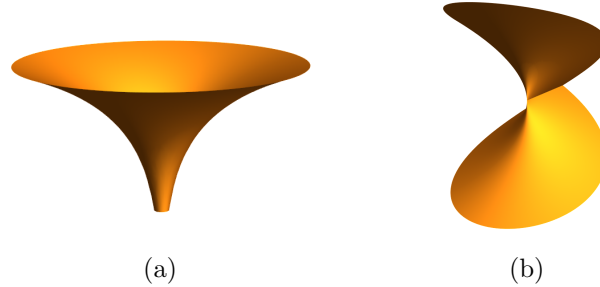


図 1 (a) $\mathbb{I}^3$ 内のカテナイド (上側は拡大エンド, 下側は縮小エンド). (b) 交叉帽子特異点を持つ零平均曲率曲面.

本講演では, ある種の特異点を許容した零平均曲率曲面のクラスとして, **ZMC-面**を導入する. なお, このクラスは極大面 (梅原-山田 [21]), CMC-1 面 (藤森 [9]), 極小面 (高橋 [20]・赤嶺 [1]) の類似である.

定義 2 ([12]). Σ^2 を Riemann 面とし, $\pi: \tilde{\Sigma}^2 \rightarrow \Sigma^2$ を普遍被覆写像とする. 正則はめ込み $F = (F^0, F^1, F^2): \tilde{\Sigma}^2 \rightarrow \mathbb{C}^3$ が, $(dF^1)^2 + (dF^2)^2 = 0$ を満たし, F^1 (または F^2) が定値でないとき, F は $(0++)$ -**type null** という. (はめ込みとは限らない) 滑らかな写像 $f: \Sigma^2 \rightarrow \mathbb{I}^3$ に対して, $(0++)$ -type null な正則はめ込み $F: \tilde{\Sigma}^2 \rightarrow \mathbb{C}^3$ で, $f \circ \pi = \text{Re}(F)$ を満たすものが存在するとき, f は **ZMC-面 (ZMC-face)** という. 特に, F は f の正則リフト (**holomorphic lift**) という.

注意 3. 一般に, 正則はめ込み $F = (F^0, F^1, F^2): \tilde{\Sigma}^2 \rightarrow \mathbb{C}^3$ が, $(dF^0)^2 + (dF^1)^2 + (dF^2)^2 = 0$ を満たすとき, F は **Euclidean null** という. 一方で, $-(dF^0)^2 + (dF^1)^2 + (dF^2)^2 = 0$ を満たすとき, F は **Lorentzian null** という. そのため, $(0++)$ -type null は, これらの中間物とみなせる.

注意 4. $(dF^1)^2 + (dF^2)^2 = 0$ は, $dF^1 - i dF^2 = 0$ または $dF^1 + i dF^2 = 0$ と同値である. 後者の等式を満たす場合, F^2 を -1 倍することで, 前者の等式を満たす場合に帰着できる. この操作は, $f := \text{Re}(F)$ において, tx -平面での鏡映に対応する. 今後の議論を簡単にするため, 特に指定しない限り, ZMC-面 f の正則リフト F は $dF^1 - i dF^2 = 0$ を満たしている場合を考える.

次の命題は, ZMC-面に対する Weierstrass 型表現公式である.

命題 5 (ZMC-面の Weierstrass 型表現公式, [12]). g と ω をそれぞれ Σ^2 上の有理型関数と正則 1-形式とする. ただし, $g\omega$ は正則で, ω と $g\omega$ は共通の零点を持たず, Σ^2 上の任意の閉曲線 γ に対し, $\text{Re} \oint_{\gamma} g\omega = 0$ と $\oint_{\gamma} \omega = 0$ を満たしているとする. このとき, $f := \text{Re} \int (g, 1, -i)\omega$ によって定まる写像 $f: \Sigma^2 \rightarrow \mathbb{I}^3$ は ZMC-面である. 逆に, 任意の ZMC-面はこのような方法で表される.

$\mathbb{I}^3$ 内の空間的曲面は, ある種の双対性を持つ [19]. 特に, $\mathbb{I}^3$ 内の零平均曲率曲面は, その双対曲面も零平均曲率を持つ. $f = (f^0, f^1, f^2): \Sigma^2 \rightarrow \mathbb{I}^3$ を ZMC-面とし, (g, ω) を f の Weierstrass data とする. $S_f \subseteq \Sigma^2$ を f の特異点全体の集合とする. Σ^2 上の正則関数 $g_* := f^1 + i f^2 = \int \omega$ と, 有理型 1-形式 $\omega_* := dg$ を考える. このとき, 写像 $f_*: \Sigma^2 \setminus S_f \rightarrow \mathbb{I}^3$ を,

$$f_* := \text{Re} \int (g_*, 1, i)\omega_*$$

によって定めると, f_* は正則点上で零平均曲率曲面である.

定義 6 ([12]). ZMC-面 $f: \Sigma^2 \rightarrow \mathbb{I}^3$ に対し, 上記のような方法で得られる写像 $f_*: \Sigma^2 \setminus S_f \rightarrow \mathbb{I}^3$ を f の双対写像とよぶ. 組 (g_*, ω_*) を f の双対 **Weierstrass data** といい, g_* を f の双対 **Gauss** 写像とよぶ.

注意 7. 一般に, ZMC-面の双対写像は ZMC-面とは限らない. 実際, $\Sigma^2 = \mathbb{C}$ 上で定義された Weierstrass data $(g, \omega) = (z^2, dz)$ から得られる ZMC-面の双対写像は ZMC-面でない.

ZMC-面 $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{I}^3$ が, ある調和関数 $\varphi(x, y)$ を用いて, $f(x + iy) := (\varphi(x, y), x, y)$ のようにグラフとして表される場合を考える. f の Weierstrass data は $(g, \omega) = (2\varphi_z, dz)$ であるため, 双対 Weierstrass data は $(g_*, \omega_*) = (z, 2\varphi_{z\bar{z}}dz)$ と表される. よって, 双対写像は, $f_* = (x\varphi_x + y\varphi_y - \varphi, \varphi_x, \varphi_y)$ と計算でき, この式は [19] で与えられている双対曲面の式に一致する.

3 ZMC-面の弱完備性と有限全曲率性

極大面 [21] と同様に, ZMC-面の弱完備性と有限全曲率性を次のように定める.

定義 8 ([12]). $f: \Sigma^2 \rightarrow \mathbb{I}^3$ を ZMC-面とし, $F = (F^0, F^1, F^2)$ を f の正則リフト, (g, ω) を f の Weierstrass data とする. Σ^2 上の正定値計量 $ds_{\#}^2$ を,

$$ds_{\#}^2 := (2 + |g|^2)|\omega|^2 = |dF^0|^2 + |dF^1|^2 + |dF^2|^2$$

と定め, f に関するリフト計量 (**lift-metric**) という. リフト計量 $ds_{\#}^2$ が完備であるとき, f は弱完備という. また, リフト計量 $ds_{\#}^2$ が有限全曲率を持つとき, f は有限型 (**finite-type**) という.

弱完備かつ有限型である ZMC-面に関して, 次のような命題が成立する.

命題 9 ([12]). ZMC-面 $f: \Sigma^2 \rightarrow \mathbb{I}^3$ は弱完備かつ有限型とする. このとき, あるコンパクトな Riemann 面 $\bar{\Sigma}^2$ と有限個の点 $p_1, \dots, p_n \in \bar{\Sigma}^2$ が存在し, Σ^2 は $\bar{\Sigma}^2 \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$ と双正則同値となる. また, f の Weierstrass data (g, ω) は $\bar{\Sigma}^2$ 上の有理型関数と有理型 1-形式に拡張できる.

点 $p_1, \dots, p_n$ を f のエンド (**end**) という. カテナイドは異なる振る舞いをする 2 つのエンドを持つ (図 1 (a)). そこで, 次のような定義を導入する.

定義 10 ([12]). $f: \Sigma^2 \rightarrow \mathbb{I}^3$ を弱完備かつ有限型の ZMC-面とし, p を f のエンドとする. 第一基本形式 ds^2 が p で完備であるとき, p は拡大エンド (**expanding end**) といい, そうでないとき縮小エンド (**shrinking end**) という.

f のエンド p に対して, p の開近傍 $U \subseteq \bar{\Sigma}^2$ が存在して, f の $U \setminus \{p\}$ 上の制限が埋め込みであるとき, p は埋め込まれたエンド (**embedded end**) という. このようなエンドよりも, よい振る舞いをするものとして, 次のような定義を導入する.

定義 11 ([12]). $f: \Sigma^2 \rightarrow \mathbb{I}^3$ を弱完備かつ有限型の ZMC-面とし, p を f の埋め込まれたエンドとする. p を中心とする複素座標系 z と, 写像 $\tilde{f}: \{z \in \mathbb{C}; 0 < |z| < 1\} \rightarrow \mathbb{I}^3$ が存在し, $\tilde{f}$ は平面 (resp. カテナイド) の一部に, 等長変換・相似変換・ t -軸に関する拡大縮小を合成したもので, $\lim_{z \rightarrow 0} (f(z) - \tilde{f}(z)) = 0$ を満たしているとする. このとき, エンド p は平面型 (**planar**) (resp. カテナイド型 (**catenoidal**)) という. 特に, カテナイド型エンドに関しては, 拡大カテナイド型と縮小カテナイド型の 2 種類に分けられる.

縮小エンドに関しては, 3 次元 Euclid 空間 $\mathbb{E}^3$ 内の極小曲面や, 3 次元 Lorentz-Minkowski 空間 $\mathbb{L}^3$ 内の極大曲面とは異なる現象が生じる. 実際, Weierstrass data $(g, \omega) = (1/z^2, zdz)$ から得られる ZMC-面を考えると, $z = 0$ でカテナイドの縮小エンドに漸近するが, 埋め込みでない. このような事実から, 次のような定義を導入する.

定義 12 ([12]). $f: \Sigma^2 \rightarrow \mathbb{I}^3$ を弱完備かつ有限型の ZMC-面とする. f のエンド p が, 定義 11 における縮小カテナイド型の条件を, p が埋め込みであることを除いて満たすとき, p は多重縮小カテナイド型 (**layered shrinking**)

catenoidal) という.

4 ZMC-面の Osserman 型不等式

本節では, ZMC-面の応用として, 弱完備かつ有限型であるとき, Osserman 型不等式が複数得られることについて述べる. 極小曲面に対する Osserman 不等式は以下のとおりである.

事実 13 (Osserman の不等式, [14]). $f: \Sigma^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$ を完備かつ有限全曲率を持つ極小曲面とする. このとき, f の Gauss 写像 g は,

$$2 \deg(g) \geq n - \chi(\Sigma^2)$$

を満たす. ただし, $\deg(\cdot)$ は写像度, n はエンドの数, $\chi(\cdot)$ は Euler 標数を表す. この不等式の等号成立条件は, f の各エンドが埋め込まれていることである.

極小曲面においては, エンドが埋め込みであることと, エンドが平面型またはカテノイド型に該当することは同値であることが知られている [10, 16].

$f: \Sigma^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$ を弱完備かつ有限型の ZMC-面とする. (g, ω) を f の Weierstrass data とし, g_* を f の双対 Gauss 写像とする. また, n をエンドの数で, $p_1, \dots, p_n$ を f のエンドとする. さらに, k を拡大エンドの数とし, $p_1, \dots, p_k$ は拡大エンド, $p_{k+1}, \dots, p_n$ は縮小エンドと仮定する. 埋め込まれたエンドに着目した場合, 次のような Osserman 型不等式が得られる.

定理 14 (第一 Osserman 型不等式, [12]). 上記の設定の下で, 次のような不等式が成立する.

$$-\sum_{j=1}^k \text{ord}_{p_j}(\omega) + \sum_{j=k+1}^n \text{ord}_{p_j}(\omega) \geq 2k.$$

この不等式の等号成立条件は, f の各エンドが埋め込まれていることである.

一方, 平面型・拡大カテノイド型・縮小カテノイド型エンドに着目した場合, 3 次元双曲空間内の平坦波面に対する Osserman 型不等式 [13] に類似する, 次のような定理が得られる.

定理 15 (第二 Osserman 型不等式, [12]). 上記の設定に加え, $S_f = \{q_1, \dots, q_m\}$ を f の特異点全体の集合とし, $d_j := \text{ord}_{q_j}(\omega)$ ($j = 1, \dots, m$) とおく. このとき, Gauss 写像 g と双対 Gauss 写像 g_* は,

$$\deg(g) + \deg(g_*) \geq n + d_1 + \dots + d_m$$

を満たす. この不等式の等号成立条件は, f の各エンドが埋め込みで, 平面型・拡大カテノイド型・縮小カテノイド型のいずれかに該当することである.

一方で, 極小曲面に対する Osserman 不等式のように, Gauss 写像 g の写像度のみを用いた不等式も得られる.

定理 16 (第三 Osserman 型不等式, [12]). 上記の設定の下で, Gauss 写像 g は,

$$\deg(g) \geq k - \chi(\Sigma^2)$$

を満たす. この不等式の等号成立条件は, f の各エンドが平面型・拡大カテノイド型・多重縮小カテノイド型のいずれかに該当することである.

5 等号成立条件を満たす例

最後に, Osserman 型不等式の等号成立条件を満たす ZMC-面の例をいくつか紹介する.

例 17 ([12]). $\Sigma^2 := \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ 上の Weierstrass data

$$(g, \omega) := \left(\frac{z^2}{(z^2 + 1)(z - 1)}, \frac{z^2 + 1}{z^2} dz \right)$$

から得られる弱完備かつ有限型の ZMC-面 f は, $z = 0$ で平面型エンド, $z = \infty$ で拡大カテノイド型エンド, $z = 1$ で縮小カテノイド型エンドを持つ. よって, この例は第一・第二・第三 Osserman 型不等式の等号成立条件を満たす (図 2 (a)).

例 18 ([12]). $\Sigma^2 := \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ 上の Weierstrass data

$$(g, \omega) := \left(\frac{z^2}{(z^2 - 1)(z - 1)}, \frac{z^2 - 1}{z^2} dz \right)$$

から得られる弱完備かつ有限型の ZMC-面 f は, $z = 0$ で平面型エンド, $z = \infty$ で拡大カテノイド型エンド, $z = 1$ で多重縮小カテノイド型エンドを持つ. 特に, f は $z = 1$ で埋め込みでないエンドを持つ. よって, この例は第三 Osserman 型不等式のみ等号成立条件を満たす (図 2 (b)).

例 19 ([12]). $T := \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$ を正方トーラスとし, $\wp(z)$ を T 上の Weierstrass $\wp$ 関数とする. また, $c \in \mathbb{C}$ を定数とし,

$$\omega := d\left(\frac{\wp'}{\wp}\right) = \frac{\wp''\wp - (\wp')^2}{\wp^2} dz, \quad g := \frac{dz}{\omega} \frac{\wp'}{\wp - c},$$

とおいて, $\Sigma^2 := T \setminus \{\text{the poles of } \omega \text{ or } g\omega\}$ と定める.

$c = 0$ の場合, この Weierstrass data から得られる ZMC-面 $f: T \setminus \{0, (1+i)/2\} \rightarrow \mathbb{I}^3$ は, $z = 0, (1+i)/2$ で拡大カテノイド型エンドを持つ (図 2 (c)).

一方, $c = \wp(1/4)$ の場合, この Weierstrass data から得られる ZMC-面 $f: T \setminus \{0, (1+i)/2, -1/4, 1/4\} \rightarrow \mathbb{I}^3$ は, $z = 0$ で拡大カテノイド型エンド, $z = (1+i)/2$ で平面型エンド, $z = -1/4, 1/4$ で縮小カテノイド型エンドを持つ (図 2 (d)).

加藤 [11] では, 拡大カテノイド型エンドのみを持つ例に対して, Weierstrass data の一般形を与えている. 例 19 の $c = 0$ の例は, その一般形に含まれている. 例 17 と 例 19 の $c = 0$ および $c = \wp(1/4)$ の例は, 遠方に自己交差を持たない.

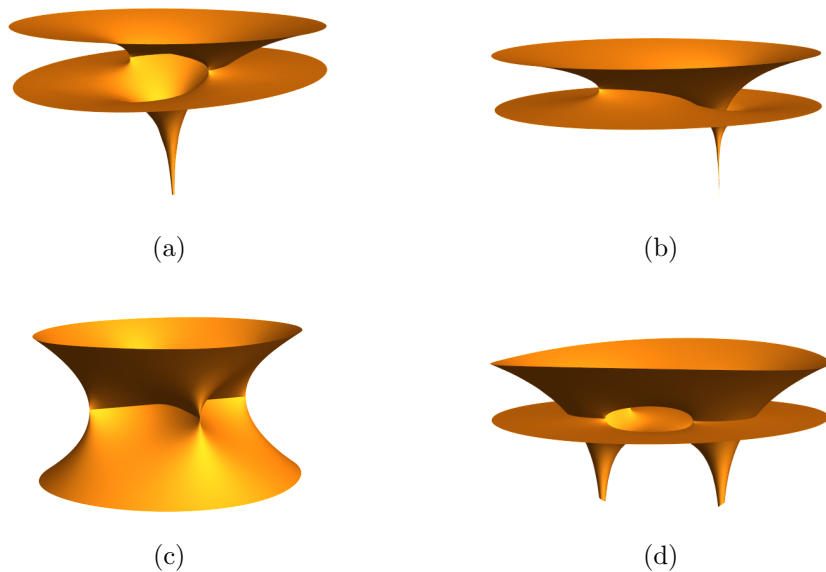


図 2 (a) 例 17. (b) 例 18. (c) 例 19 の $c = 0$ の場合. (d) 例 19 の $c = \wp(1/4)$ の場合.

参考文献

- [1] S. Akamine, *Behavior of the Gaussian curvature of timelike minimal surfaces with singularities*, Hokkaido Math. J. **48** (2019), 537–568.
- [2] S. Akamine, J. Cho, M. Hara, and Y. Ogata, *Geometric properties invariant under the decomposition of zero mean curvature surfaces*, manuscripta math. **176** (2025), 73.
- [3] S. Akamine and H. Fujino, *Extension of Krust theorem and deformations of minimal surfaces*, Ann. Mat. Pura Appl. **201** (2022), 2583–2601.
- [4] ———, *Reflection Principles for Zero Mean Curvature Surfaces in the Simply Isotropic 3-space*, Results Math. **77** (2022), 176.
- [5] S. Akamine, W. Lee, and S.-D. Yang, *Bernstein-type theorem for constant mean curvature surfaces in the isotropic 3-space*, preprint, arXiv:2505.24109.
- [6] J. Cho and M. Hara, *Zero mean curvature surfaces in isotropic space with planar curvature lines*, Port. Math. **83** (2026), 113–144.
- [7] J. Cho, D. Lee, W. Lee, and S.-D. Yang, *Spinor Representation in Isotropic 3-space via Laguerre Geometry*, Results Math. **79** (2024), 8.
- [8] L. C. B. da Silva, *Holomorphic representation of minimal surfaces in simply isotropic space*, J. Geom. **112** (2021), 35.
- [9] S. Fujimori, *Spacelike CMC 1 surfaces with elliptic ends in de Sitter 3-space*, Hokkaido Math. J. **35** (2006), 289–320.
- [10] L. P. Jorge and W. H. Meeks, *The topology of complete minimal surfaces of finite total Gaussian curvature*, Topology **22** (1983), 203–221.
- [11] S. Kato, *Classification of simple ends of minimal surfaces in $\mathbf{I}^3$ and decompositions of minimal surfaces in $\mathbf{R}^3$* , preprint.
- [12] R. Kishida, *A new framework of zero mean curvature surfaces in the isotropic 3-space*, preprint, arXiv:2604.22698.
- [13] M. Kokubu, M. Umehara, and K. Yamada, *Flat fronts in hyperbolic 3-space*, Pacific J. Math. **216** (2004), 149–175.
- [14] R. Osserman, *A survey of Minimal Surfaces*, Van Nostrand Reinhold Co., New York-London-Melbourne, 1969.
- [15] Y. Sato, *d-Minimal Surfaces in Three-Dimensional Singular Semi-Euclidean Space $\mathbb{R}^{0,2,1}$* , Tamkang J. Math. **52** (2021), 37–67.
- [16] R. M. Schoen, *Uniqueness, symmetry, and embeddedness of minimal surfaces*, J. Differential Geom. **18** (1983), 791–809.
- [17] J. J. Seo and S.-D. Yang, *Zero mean curvature surfaces in isotropic three-space*, Bull. Korean Math. Soc. **58** (2021), 1–20.
- [18] K. Strubecker, *Differentialgeometrie des isotropen Raumes. I. Theorie der Raumkurven*, Akad. Wiss. Wien, S.-B. IIa **150** (1941), 1–53.
- [19] ———, *Duale Minimalflächen des isotropen Raumes*, Rad Jugoslav. Akad. Znan. Umjet. **382** (1978), 91–107.
- [20] H. Takahashi, *Timelike minimal surfaces with singularities in three-dimensional spacetime (in Japanese)*, Master thesis, Osaka University, 2012.
- [21] M. Umehara and K. Yamada, *Maximal surfaces with singularities in Minkowski space*, Hokkaido Math. J. **35** (2006), 13–40.

Gromov-Hausdorff 空間と等距離埋め込みについて

百野 巧真 (関西大学大学院 理工学研究科)*

1 Gromov-Hausdorff 空間

集合 X, Y の間の全射な多価写像全体を便宜的に $\text{GHC}(X, Y)$ と書くことにする。距離空間 (X, d) の空でない部分集合 A, B に対して次の値が考えられる。

$$Hd(A, B) = \max \left\{ \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a, b), \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} d(a, b) \right\} = \inf_{R \in \text{GHC}(A, B)} \sup_{\substack{a \in A \\ b \in R(a)}} d(a, b)$$

こうして定められる関数 Hd は **Hausdorff 距離** と呼ばれ、 X の空でない有界閉集合全体の集まりを距離空間にする。上式において R は A と B がどう似ているかを表現し、 $\sup d(a, b)$ の部分でその似具合を数値化したものとなっている。

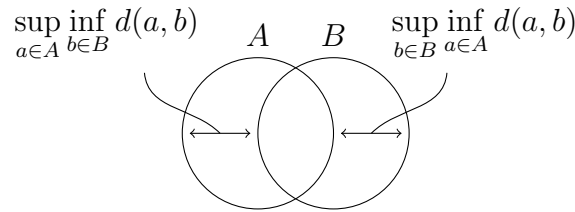


図1 Hausdorff 距離の定義

これを用いて距離空間 X, Y の間に次のような値が与えられる。

$$d_{\text{GH}}(X, Y) = \inf_{(Z, d), \varphi, \psi} Hd(\varphi[X], \psi[Y])$$

ここで $\inf$ の変数 (Z, d) は任意の距離空間、 φ, ψ はそれぞれ X から Z , Y から Z への等距離写像となっている。多価写像を用いると次のように書き直せる。

$$d_{\text{GH}}(X, Y) = \frac{1}{2} \inf_R \text{dis}(R), \quad \text{dis}(R) = \sup_{\substack{x \in X, y \in R(x) \\ \xi \in X, \eta \in R(\xi)}} |d_X(x, \xi) - d_Y(y, \eta)|$$

$Hd(A, B)$ は A と B がどう似ているかを、形状以外にも位置や向きも考慮した似具合を考えているのに対して、 $d_{\text{GH}}(X, Y)$ は X と Y を重ね合わせることで、形状についてのみの似具合を数値化したものとなっている。

* e-mail: k241344@kansai-u.ac.jp

本研究は 2026 年度関西大学大学院理工学研究科高度化推進研究費によって行った。

2020 Mathematics Subject Classification: 30L05, 54E35, 53C23

キーワード：Gromov-Hausdorff 空間, 距離空間の埋め込み

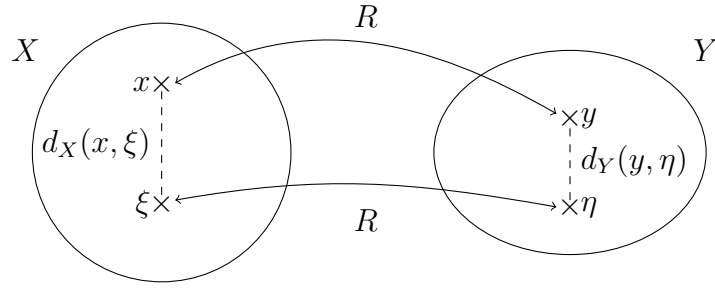


図2 Gromov-Hausdorff 距離の定義

Gromov-Hausdorff 距離は下記の不等式を満たす。

$$\frac{|\text{diam}(X) - \text{diam}(Y)|}{2} \leq d_{\text{GH}}(X, Y) \leq \max\{\text{diam}(X), \text{diam}(Y)\}$$

そして定義より明らかに正に値をとり、多価写像の逆写像によって対称性があり、多価写像の合成によって三角不等式を満たす。 Hd が空でない有界閉集合全体の集まりに対して距離を定めるように、 d_{GH} も特別な集合で距離を定め、**Gromov-Hausdorff 距離**と呼ばれる。

Gromov-Hausdorff 空間とは、その特別な距離空間 $(\mathcal{M}, d_{\text{GH}})$ をいう。この $\mathcal{M}$ はコンパクト距離空間全体の集まりを等距離同型で割った集合を指す。厳密には次の2条件を満たす集合である。

- (1) $\mathcal{M}$ の元は全て (空でない) コンパクト距離空間である。
- (2) 任意のコンパクト距離空間 X に対して、等距離同型な $Y \in \mathcal{M}$ が唯1つ存在する。

例えば、全ての可分距離空間は数列空間 ℓ^∞ に等距離埋め込みできるので、 ℓ^∞ の適当な部分集合系から $\mathcal{M}$ を構成することができる。

2 Gromov-Hausdorff 空間の性質

コンパクト距離空間 (X, d) の直径を $\text{diam } X$ とおく：

$$\text{diam}(X) = \sup_{x_0, x_1 \in X} d(x_0, x_1)$$

またコンパクト距離空間 X を正数 t で t 倍した距離空間を tX とする：

$$tX = X, \quad (td)(x_0, x_1) = t d(x_0, x_1)$$

コンパクト距離空間 X, Y に対して Gromov-Hausdorff 距離は次のような等式を満たす。

- (1) 1 点集合 $\mathbf{1}$ に対して $d_{\text{GH}}(\mathbf{1}, X) = 2^{-1} \text{diam}(X)$
- (2) $d_{\text{GH}}(sX, tX) = 2^{-1}|s - t| \text{diam}(X)$

$$(3) d_{\text{GH}}(tX, tY) = td_{\text{GH}}(X, Y)$$

これらの等式と $\mathcal{M}$ の部分集合

$$\mathcal{B}_s = \{X \in \mathcal{M} | \text{diam}(X) = s\}, \quad \mathcal{B}_{\leq s} = \{X \in \mathcal{M} | \text{diam}(X) \leq s\}$$

に注目すると、[5] では Gromov-Hausdorff 空間は図 3 錐の形状をしていると考えられている。同じく [5] では Gromov-Hausdorff 空間の等長群が自明であることが示されて

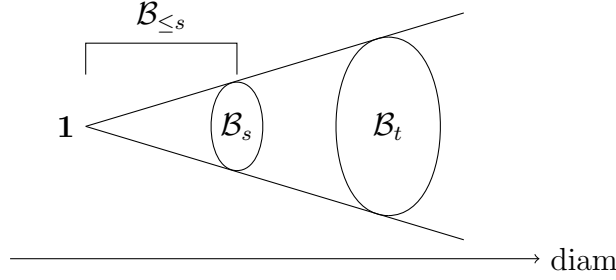


図 3 Gromov-Hausdorff 空間の形状

いる。また [6] では測地線の構成が示され、[3] では測地線が連続体濃度本あることが示されている。特に Gromov-Hausdorff 空間は弧状連結となっている。他にも、 $\mathcal{M}$ に属する有限距離空間全体の集合が可算稠密集合 (したがって $\mathcal{M}$ は可分) であることや Gromov-Hausdorff 空間が完備であることが知られている。

3 Gromov-Hausdorff 空間と等距離埋め込み

[4] では、任意の有限距離空間が Gromov-Hausdorff 空間に等距離埋め込みできることが示された。特にその証明から、 ℓ^∞ 距離 (max 距離) を導入した $\mathbb{R}^n$ の有界集合も Gromov-Hausdorff 空間に等距離埋め込みできることも示せる。同論文では Gromov-Hausdorff 空間の未解決問題として次が掲載されている。

問題 1. 任意のコンパクト距離空間は Gromov-Hausdorff 空間に等距離埋め込み可能か

この問に対して、[1],[2] で次の定理を証明した。

定理 1. 正整数 n と正数 r に対して、 ℓ^∞ 直積距離空間 $(\mathcal{B}_{\leq r})^n$ は $\mathcal{B}_{\leq 5rn}$ に等距離埋め込みできる：写像 $\mathfrak{S}_{r,n} : (\mathcal{B}_{\leq r})^n \rightarrow \mathcal{B}_{\leq 5rn}$ が存在し、

$$d_{\text{GH}}(\mathfrak{S}_{r,n}(X_k)_{k=1}^n, \mathfrak{S}_{r,n}(Y_k)_{k=1}^n) = \max_{k=1,2,\dots,n} d_{\text{GH}}(X_k, Y_k)$$

定理 2. 収束正項級数 $c = \sum_{n=1}^{\infty} r_n$ ($r = (r_n)_{n=1}^{\infty}$) に対して ℓ^∞ 直積距離空間 $\mathcal{B}_{\leq r} = \prod_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_{\leq r_n}$

は $\mathcal{B}_{\leq 36c-3r_1}$ に等距離埋め込みできる：写像 $\mathfrak{S}_r : \mathcal{B}_{\leq r} \rightarrow \mathcal{B}_{\leq 36c-3r_1}$ が存在し、

$$d_{\text{GH}}(\mathfrak{S}_r(X_n)_{n=1}^\infty, \mathfrak{S}_r(Y_k)_{n=1}^\infty) = \sup_{n=1,2,\dots} d_{\text{GH}}(X_n, Y_n)$$

定理 2 から、収束正項級数 $c = \sum_{n=1}^\infty r_n$ に対して $\{(x_n)_{n=1}^\infty | 0 \leq x_n \leq r_n\}$ の形をした数列空間 ℓ^∞ の部分空間も Gromov-Hausdorff 空間に埋め込めることがわかる。

定理 1, 2 は図 4, 5 のような見た目の写像を構成し、背理法を多重に用いながら計算で示した。

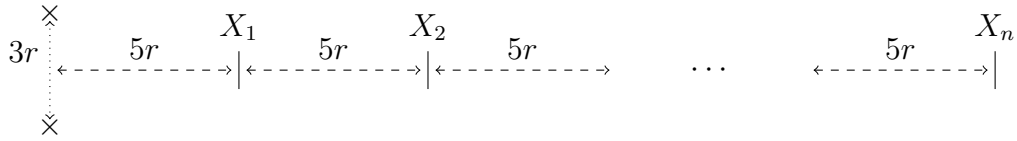


図 4 証明に用いた $\mathfrak{S}_{r,n}$ の定義の略図

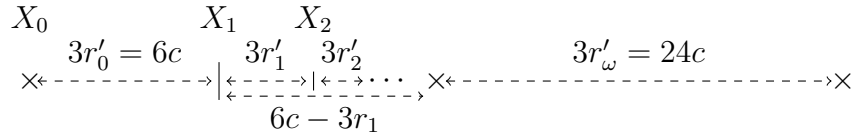


図 5 証明に用いた $\mathfrak{S}_r$ の定義の略図

この発表では、この証明の解説のために、距離空間 (Z, d_Z) を添え字に持つ非交和の距離空間 $X = \bigsqcup_{z \in Z} X_z, Y = \bigsqcup_{z \in Z} Y_z$ の Gromov-Hausdorff 距離を計算する。ただしこの距離空間 (X, d_X) の距離は $d_X|_{X_z \times X_\zeta} \equiv d_Z(z, \zeta)$ ($z \neq \zeta$) を満たすものである。

このとき、 Z が適切な条件を満たしていれば、

$$d_{\text{GH}}(X, Y) = \inf_{\sigma \in \text{Isom}(Z)} \max_{z \in Z} d_{\text{GH}}(X_z, Y_z)$$

が成り立つ。ここで、 $\text{Isom}(Z)$ は Z の等長群を指す。特に Z としては辺の重み $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ が定義されたグラフ $G = (V, E)$ を距離空間と見做したものをを用いて計算を行う：

$$d_Z(v, w) = \inf \left\{ \sum_{0 \leq k < n} \varphi(v_k v_{k+1}) \mid (v_k)_{k=0}^n \text{ は } v \text{ と } w \text{ を結ぶ道} \right\}, \quad v, w \in V (v \neq w)$$

参考文献

- [1] T. Byakuno. *An Isometric Embedding of the ℓ^∞ product space of two bounded subspaces of the Gromov-Hausdorff Space into the Gromov-Hausdorff Space*, arXiv:2502.19746

- [2] T. Byakuno. *A sequence of compact metric spaces and an isometric embedding into the Gromov-Hausdorff space*, Topology and its Applications, **384**, 2026. arXiv:2507.07449v2
- [3] Y. Ishiki, *Branching geodesics of the Gromov-Hausdorff distance*, Anal. Geom. Metr. Spaces, **10**, 109–128, 2022. DOI: 10.1515/agms-2022-0136.
- [4] S. Iliadis, A. Ivanov and A. Tuzhilin. *Local structure of Gromov-Hausdorff space, and isometric embeddings of finite metric spaces into this space*, Topology and its Applications, **221**, 2017, pp.393–398. DOI: 10.1016/j.topol.2017.02.050.
- [5] A. Ivanov, A. Tuzhilin, *Isometry group of Gromov-Hausdorff space*, Matematicki Vesnik, **71**: (1–2), pp.123–154, 2019.
- [6] A. Ivanov, N. Nikolaeva, A. Tuzhilin, *The Gromov-Hausdorff metric on the space of compact metric spaces is strictly intrinsic*, Mathematical Notes, **199**, pp.883–885, 2016. arXiv e-prints, arXiv:1504.03830, 2015.

特異点の変形とその幾何

神戸大学大学院理学研究科

島田 瑠奈 (Runa Shimada)*

概要

写像の特異点はあらわれやすい順 (余次元) に分類がなされており、一番あらわれやすい特異点の次にあらわれやすい特異点は特異点の出現や消滅に対応するような、写像の 1 パラメーター変形にあらわれるものである。したがって、特異点を調べる際は変形まで含めて考えるのが自然である。本講演では、定義域に 1 パラメータを追加した特異点の変形に対して像域の等長写像のみを用いた表示式を与え、その微分幾何学的な性質や変形にあらわれる特異点について述べる。

1 導入

近年、特異点をもつ曲線や曲面の微分幾何的研究が盛んに行われている。正則曲面の代表的な微分幾何的不変量にガウス曲率と平均曲率等があり、曲面の微分幾何的性質はこれらの曲率の性質をもとに多く研究されてきた。曲面が特異点をもつ場合、これらの不変量は通常発散し、定義できない。したがって、特異点を持つ曲面の微分幾何的性質を述べるための言語がない状態になる。これの対処法の一つに像域の等長写像のみを用いた表示式 ($SO(3)$ -normal form) を使う方法がある。代表的な特異点に対してはこの表示式が与えられており、様々な微分幾何的性質が研究されている。ただし、これらの表示式は固定された特異点に対するものである。特異点はあらわれやすい順に分類がなされており、一番あらわれやすい特異点の次にあらわれやすい特異点は特異点の出現や消滅に対応するような、写像の 1 パラメーター変形にあらわれることから、本講演では、変形まで含めた特異点の像域の等長写像のみを用いた表示式を与える。これを用いて、特異点の変形の微分幾何学的性質を考察する。

本講演では、写像の局所的な振る舞いのみに注目するため、写像は断りのない限りすべて写像芽として述べる。詳しい定義は [4, 3 章] [6, 8 章] 等を参照。

定義 1.1. 2 つの写像芽 $f, g : (\mathbf{R}^m, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^n, 0)$ が $\mathcal{A}$ 同値または右左同値であるとは、定義域の座標変換 φ と像域の座標変換 ψ が存在して $g = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ が成り立つときをいう。

この同値関係は写像芽の定義域と像域の座標変換、つまり微分同相写像で移り合うものはすべて等しいとみなすものであり、写像の幾何的な性質を扱う立場から自然なものである。この同値関係で考えると、微分の階数が最大となっている点の写像芽はすべて同値になる。したがって、注目するのは次で定義する特異点である。

* E-mail: 231s010s@stu.kobe-u.ac.jp

定義 1.2. 多様体間の写像 $f: M \rightarrow N$ が $p \in M$ において**特異点**であるとは, $\text{rank } df_p < \min\{m, n\}$ となるときをいう. ただし, $\dim M = m$, $\dim N = n$ である. さらに, $S(f)$ で f の特異点集合を表す.

定義 1.3. 写像芽 $f: (\mathbf{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^3, 0)$ において, 定義域のベクトル場 η が**退化ベクトル場**であるとは, $p \in S(f)$ ならば, η が $\ker df_p$ の生成元であるときをいう.

曲面に最もよくあらわれるのは**ホイットニーの傘**と呼ばれる特異点で, $(u, v) \mapsto (u, uv, v^2)$ と原点で $\mathcal{A}$ -同値になる写像芽のことをいう.

特異点においては通常単位法線ベクトルが定義されず, このために曲面の性質を表している幾何学的量が意味を失う. そのような場合の有効な方法の一つが normal form (正確には $SO(3)$ -normal form) と呼ばれるものである.

定理 1.4. [1] 写像芽 $f: (\mathbf{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^3, 0)$ がホイットニーの傘とする. このとき, 向きを保つ微分同相写像芽 $\varphi: (\mathbf{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^2, 0)$ と $T \in SO(3)$ が存在して

$$T \circ f \circ \varphi^{-1}(u, v) = \left(u, uv + O(3), \frac{1}{2} (a_{20}u^2 + 2a_{11}uv + a_{02}v^2) + O(3) \right) \quad (1.1)$$

と書ける. ただし, $a_{20}, a_{11}, a_{02} \in \mathbf{R}$ である.

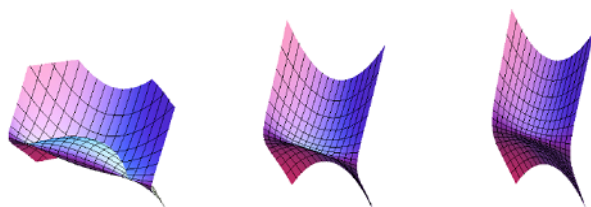
2 特異点の変形

本講演で注目するのは, 特異点の変形である. したがって, この節では, 変形について詳しく述べる.

定義 2.1. 写像芽 $f: (\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^3, 0)$ が $g: (\mathbf{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^3, 0)$ の変形であるとは, $f(u, v, 0) = g(u, v)$ と $f(0, 0, s) = (0, 0, 0)$ を満たすことである.

この定義において, 定義域に追加した $s \in \mathbf{R}$ が写像の変形を表すパラメーターであり**変形パラメーター**という. 写像芽の変形に対しては変形パラメーターを保つ右左同値を考えるのが適切である. また, 以下は変形の例である.

$$f_s: (\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}, 0) \ni (u, v, s) \mapsto (u, v^2, v(u^2 + v^2) + sv) \in (\mathbf{R}^3, 0)$$



左: f_{-1} , 中: f_0 , 右: f_1

定義 2.2. 2つの写像芽 $f_1, f_2 : (\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^3, 0)$ を $g : (\mathbf{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^3, 0)$ の変形とする. このとき f_1 と f_2 が変形として同値であるとは, $\psi \circ f_1 \circ \varphi^{-1}(u, v, s) = f_2(u, v, s)$ となる微分同相写像芽 $\varphi : (\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}, 0)$ と $\psi : (\mathbf{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^3, 0)$ が存在することをいう. ただし, $\varphi(u, v, s) = (\varphi_1(u, v, s), \varphi_2(u, v, s), \varphi_3(s))$ の形である.

ここで定義域の第3成分が変形パラメーターであり, φ_3 が s にしか依存しないように定義されているのは, 変形パラメーター自体の変化は許すが, 変形パラメーターに他のパラメーターが影響を与えないようにするためである. ゆえにこの定義は変形パラメーターを保つような $\mathcal{A}$ -同値である.

注意 2.3. [5] 写像芽 $f : (\mathbf{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^3, 0)$ において, $\text{rank } df_0 = 1$ となる写像芽の2-ジェットは, $(u, v^2, 0)$, (u, v^2, uv) , $(u, uv, 0)$, $(u, 0, 0)$ の4種類のいずれかと $\mathcal{A}$ -同値になる.

本講演では2-ジェットが $(u, v^2, 0)$ または (u, v^2, uv) と $\mathcal{A}$ -同値となるものだけに注目する. また, 写像の幾何学的性質を調べたいため, 次の変形まで含めた $SO(3)$ -標準形を導入する.

定理 2.4. 写像芽 $f : (\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^3, 0)$ を $g : (\mathbf{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^3, 0)$ の変形とする. ただし, j^2g は $(u, v^2, 0)$ または (u, v^2, uv) と $\mathcal{A}$ -同値である. このとき, 定義 2.2 の向きを保つ微分同相写像芽 $\varphi : (\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}, 0)$ と $T \in SO(3)$ と関数 $f_{21}, f_{31} \in C^\infty(1, 1), f_{24}, f_{33}, f_{34} \in C^\infty(2, 1), f_{32} \in C^\infty(3, 1)$ が存在して,

$$\begin{aligned} f_n^s &:= T \circ f \circ \varphi^{-1}(u, v, s) \\ &= (u, u^2 f_{21}(u) + v^2 + u s f_{24}(u, s), \\ &\quad u^2 f_{31}(u) + v^2 f_{32}(u, v, s) + v f_{33}(u, s) + u s f_{34}(u, s)) \end{aligned} \quad (2.1)$$

が成り立つ. ただし, $f_{32}(0, 0, 0) = f_{33}(0, 0) = 0$ である. j^2g が $(u, v^2, 0)$ と $\mathcal{A}$ -同値ならば, $(f_{33})_u(0, 0) = 0$ であり, (u, v^2, uv) と $\mathcal{A}$ -同値ならば, $(f_{33})_u(0, 0) \neq 0$ である. また, 原点で $S_1^\pm$ 特異点 $((u, v^2, v^3 \pm u^2 v)$ に $\mathcal{A}$ -同値なもの) をもつ必要十分条件は $(f_{32})_v(0, 0, 0) \neq 0$, $(f_{33})_{uu}(0, 0) \neq 0$ である.

この写像 f_n^s の特異点集合 $S(f_n^s)$ は, $S(f_n^s) = \{(u, v) \mid v = 0, f_{33}(u, s) = 0\}$ である. この定理において与えられた f と f_n^s は変形として同値であり, さらに像域の微分同相写像は, $SO(3)$ の元であるため f と f_n^s は同じ幾何学的な性質をもつ. さらに, この式の係数 f_{ij} はすべて定義域の微分同相写像と像域の $SO(3)$ の作用で不変であり, 写像の幾何学的な性質を表現できる. これを用いて変形まで含めた特異点の性質を述べる.

3 特異点の変形の幾何学的性質

ここでは $S_1^\pm$ 特異点の変形に焦点をあてる. さらに, $SO(3)$ -normal form を用いることで, いくつかの幾何学的性質を述べる. $S_1^\pm$ 特異点の変形の条件を考慮すると, (2.1) 内の f_{32} と f_{33} は,

$$\begin{aligned} f_{32}(u, v, s) &= u f_{321}(u, v, s) + v f_{322}(u, v, s) + s f_{323}(u, v, s), \\ f_{33}(u, s) &= s + u s f_{331}(s) + u^2 f_{332}(s) + u^3 f_{333}(s) + u^4 f_{334}(u, s), \end{aligned}$$

と書きかえられる. さらに, $f_{332}(0) > 0$ を仮定し, $f_{332}(0) = f_{3320}^2$ とおく. $f_{332}(0) < 0$ の場合は $f_{332}(0) = -f_{3320}^2$ とおくことで同様に計算できる. さらに, $S(f_n^s) \neq \emptyset$ であることと $s \leq 0$ は同値であるため $s = -\tilde{s}^2$ とおく.

3.1 特異点の座標

定理 3.1. $(u, v) \in S(f_n^s)$ ならば $v = 0$ であり, さらに, u は $\tilde{s}$ に依存する. この u を $u(\tilde{s})$ と書く. と特異点の座標は,

$$\begin{aligned} u(\tilde{s}) = & \frac{1}{f_{3320}} \tilde{s} + \frac{1}{2f_{3320}^4} \left(f_{331}(0)f_{3320}^2 - f_{333}(0) \right) \tilde{s}^2 \\ & + \frac{1}{8f_{3320}^7} \left(f_{3320}^4 (f_{331}(0))^2 + 4f_{332}'(0) \right) \\ & - 2f_{3320}^2 (3f_{331}(0)f_{333}(0) + 2f_{334}(0, 0)) + 5f_{333}(0)^2 \tilde{s}^3 + O_{\tilde{s}}(4) \end{aligned} \quad (3.1)$$

となる.

$\tilde{s} \neq 0$ ならば f_n^s は点 $(u(\pm\tilde{s}), 0)$ でホイットニー傘である.

3.2 2 次の不変量と focal set

また, ホイットニーの傘の幾何学的不変量として以下が知られている.

定理 3.2. [3] 写像芽 $f : (\mathbf{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^3, 0)$ がホイットニーの傘であるとする. $\ker df_0 = \langle \partial_v \rangle$ である (u, v) に対して, $|f_u, f_{uv}, f_{vv}| > 0$ ならば (1.1) 内の不変量は以下のように書ける.

$$\begin{aligned} a_{20} &= \frac{|f_u \times f_{vv}|}{4|f_u|^3 |f_u, f_{uv}, f_{vv}|^2} (|f_u, f_{uu}, f_{vv}|^2 + 4|f_u, f_{uv}, f_{vv}| |f_u, f_{uv}, f_{uu}|) \\ a_{11} &= \frac{1}{2|f_u| |f_u, f_{uv}, f_{vv}|^2} \left(2|f_u, f_{uv}, f_{vv}| \begin{vmatrix} f_u \cdot f_u & f_u \cdot f_{uv} \\ f_{vv} \cdot f_u & f_{vv} \cdot f_{uv} \end{vmatrix} - |f_u \times f_{vv}|^2 |f_u, f_{uu}, f_{vv}| \right) \\ a_{02} &= \frac{|f_u| |f_u \times f_{vv}|^3}{|f_u, f_{uv}, f_{vv}|^2} \end{aligned}$$

点 $(u(\tilde{s}), 0)$ における a_{20}, a_{11}, a_{02} を考えると, これらは $\tilde{s}$ の関数とみなすことができる. これを $a_{20}(\tilde{s}), a_{11}(\tilde{s}), a_{02}(\tilde{s})$ と書く. ここで, $\lim_{\tilde{s} \rightarrow 0} |f_u, f_{uv}, f_{vv}|(u(\tilde{s}), 0) = 0$ となることに注意すると, これらの関数は一般には $S_1^\pm$ 特異点において発散する. したがって, 以下の定理を得る.

定理 3.3. (2.1) の変形にあらわれるホイットニーの傘の (3.1) における不変量 a_{20}, a_{11}, a_{02} は以下で

与えられる.

$$\begin{aligned} a_{20}(\tilde{s}) &= \frac{1}{\tilde{s}^2} \left(\frac{f_{31}^2(0)}{2f_{3320}^2} - \frac{2f_{31}(0)(f_{31}(0)f_{333}(0) - f_{3320}^2((f_{31})'(0) - f_{321}(0,0,0)f_{21}(0)))}{f_{3320}^5} \right) \tilde{s} + O_{\tilde{s}}(2) \\ a_{11}(\tilde{s}) &= \frac{1}{\tilde{s}^2} \left(\frac{f_{31}(0)}{2f_{3320}^2} - \frac{2f_{333}(0)f_{31}(0) - f_{3320}^2(3(f_{31})_u(0) - f_{321}(0,0,0)f_{21}(0))}{2f_{3320}^5} \right) \tilde{s} + O_{\tilde{s}}(2) \\ a_{02}(\tilde{s}) &= \frac{1}{\tilde{s}^2} \left(\frac{1}{2f_{3320}^2} + O_{\tilde{s}}(1) \right) \end{aligned}$$

定義 3.4. 写像芽 $f : (\mathbf{R}^2, (u_0, v_0)) \rightarrow \mathbf{R}^3$ は $\text{rank } df_{(u_0, v_0)} = 1$ とする. f の (u_0, v_0) における **focal set** とは, 距離 2 乗関数 $D^x(u, v) = \frac{1}{2}|x - f|^2$ に対して,

$$\{x \in \mathbf{R}^3 \mid D_u^x(u_0, v_0) = D_v^x(u_0, v_0) = 0, D_{uu}^x(u_0, v_0)D_{vv}^x(u_0, v_0) - D_{uv}^x(u_0, v_0)^2 = 0\}$$

のことである.

命題 3.5. [2] 写像芽 $f : (\mathbf{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^3, 0)$ がホイットニーの傘であるとする. これに対し f の focal conic は, 以下のようになる.

- (1) $a_{02}a_{20} < 0 \Leftrightarrow$ 楕円
- (2) $a_{02}a_{20} > 0 \Leftrightarrow$ 双曲線
- (3) $a_{20} = 0 \Leftrightarrow$ 放物線

$S_1^\pm$ 特異点の変形にあらわれる focal set について, 以下の系を得る.

系 3.6. $f_{31}(0) \neq 0$ である $S_1^\pm$ 特異点の変形において $\tilde{s} \rightarrow 0$ のとき focal set は全て双曲線である.

3.3 曲率線と 3 次の不変量

ここで, $s = 0$ のときを考える. すなわち, (2.1) において

$$f_n^0 = (u, u^2 f_{21}(u) + v^2, u^2 f_{31}(u) + v^2 f_{32}(u, v) + v f_{33}(u)) \quad (3.2)$$

と書ける. $f_{33}(0) = 0$ より, $f_{33}(u) = u f_{331}(u)$ とおく. [2] によって, $(u, v) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ とすると, (r, θ) の関数として特異点を越えて法線ベクトルが定義できることが知られているため, 以下のよう曲率線を考えることができる. E, F, G を第一基本量, L, M, N を第二基本量とし,

$$\omega_{lc} = (LF - EM)du^2 + (GL - EN)/2dudv + (MG - FN)dv^2,$$

を考える. $X = x\partial_u + y\partial_v$ とし $\omega_{lc}(X, X) = 0$ のとき X を ω_{lc} の解という. $\omega_{lc}(X, X) = 0$ と X が主方向であることは必要十分である. さらに, $a = LF - EM = a_0 + a_1 r + O_r(2)$ とおくと,

$$a_0 = -\cos \theta \sin \theta ((f'_{331}(0) - 3(f_{32})_v(0, 0)) \cos 2\theta + f'_{331}(0) + 3(f_{32})_v(0, 0) + 2(f_{32})_u(0, 0) \sin 2\theta)$$

と計算できる. このとき, $a_0 = 0$ となる θ 上で $r \rightarrow 0$ のとき, 主方向は $(\partial_r, \partial_\theta)$ であり, $a_0 \neq 0$ となる θ 上で $r \rightarrow 0$ のとき, 主方向は $(\partial_r, -4 \cos \theta f_{331}(0) \partial_r + a_0 \partial_\theta)$ である. ゆえに, 収束方向は a_0 が 0 が否かに依存する. また, $a_0 \neq 0$ のとき, f_n^0 の 3 次の量が意味をもつ.

ここでは、以下のように adapted, strongly adapted, most strongly adapted ベクトル場を取るの
が便利である。写像芽 f が $\xi f \times \eta \eta f$ を満たすとする。このとき、 $(\mathbf{R}^2, 0)$ 上のベクトル場の組 (ξ, η)
が adaptd とは、原点で以下の (a), (b) を満たすことをいい、strongly adapetd とは、原点で以下の
(a), (b), (c) を満たすことをいい、most strongly adapted とは、原点で以下の (a), (b), (c), (d) を満
たすことをいう。

(a) η が退化ベクトル場である

(b) ξ は η と横断的である

(c) $\xi f \cdot \eta \eta f = 0$ である

(d) $\eta \xi f = \xi \eta f$ である

このとき、

$$\widetilde{f_{32\eta}} = \frac{2^{\frac{1}{2}}}{3|f_\xi||f_{\eta\eta}|^{\frac{5}{2}}} \left(|f_\xi, f_{\eta\eta}, f_{\eta\eta\eta}| - \frac{3|f_\xi, f_{\eta\eta}, f_{\xi\eta}|(f_\xi \cdot f_{\eta\eta})}{|f_\xi|^2} \right)$$

は adapted ベクトル場の取り方に依らない。

$$\begin{aligned} \widetilde{f_{32\xi}} = & \frac{|f_\xi, f_{\eta\eta}, f_{\xi\eta}|}{|f_{\eta\eta}|^2|f_\xi|^{\frac{8}{3}}} \left(\frac{|f_\xi|^{\frac{2}{3}}|f_\xi, f_{\eta\eta}, f_{\xi\eta\eta}|}{|f_\xi, f_{\eta\eta}, f_{\xi\eta}|} - \frac{2f_\xi \cdot f_{\xi\eta}}{|f_\xi|^{\frac{4}{3}}} \right. \\ & + \frac{|f_\xi|^{\frac{2}{3}}|f_\xi, f_{\xi\eta}, f_{\eta\eta\eta}|}{3|f_\xi, f_{\eta\eta}, f_{\xi\eta}|} - \frac{2|f_\xi|^{\frac{2}{3}}|f_\xi, f_{\eta\eta}, f_{\xi\xi}||f_\xi, f_{\eta\eta}, f_{\eta\eta\eta}|}{3|f_\xi, f_{\eta\eta}, f_{\xi\eta}|^2} \\ & \left. + \frac{2|f_\xi, f_{\eta\eta}, f_{\eta\eta\eta}|}{3|f_\xi|^{\frac{4}{3}}|f_{\eta\eta}|^2|f_\xi, f_{\eta\eta}, f_{\xi\eta}|^2} X \right) \end{aligned}$$

は strongly adapted ベクトル場の取り方に依らない。

$$\begin{aligned} \widetilde{f_{331\xi}} = & \frac{2^{\frac{3}{2}}|f_\xi, f_{\eta\eta}, f_{\xi\eta}|}{|f_{\eta\eta}|^{\frac{3}{2}}|f_\xi|^3} \left(\frac{|f_\xi, f_{\eta\eta}, f_{\xi\xi\eta}|}{|f_\xi, f_{\eta\eta}, f_{\xi\eta}|} - \frac{|f_\xi, f_{\eta\eta}, f_{\xi\xi}||f_\xi, f_{\xi\eta}, f_{\eta\eta\eta}|}{2|f_\xi, f_{\eta\eta}, f_{\xi\eta}|^2} \right. \\ & - \frac{3|f_\xi, f_{\eta\eta}, f_{\xi\xi}||f_\xi, f_{\eta\eta}, f_{\xi\eta\eta}|}{2|f_\xi, f_{\eta\eta}, f_{\xi\eta}|^2} + \frac{(f_\xi \cdot f_{\xi\eta})|f_\xi, f_{\eta\eta}, f_{\xi\xi}|}{|f_\xi|^2|f_\xi, f_{\eta\eta}, f_{\xi\eta}|} \\ & + \frac{|f_\xi, f_{\eta\eta}, f_{\eta\eta\eta}||f_\xi, f_{\eta\eta}, f_{\xi\xi}|^2}{2|f_\xi, f_{\eta\eta}, f_{\xi\eta}|^3} + \frac{|f_\xi, f_{\xi\eta}, f_{\xi\eta\eta}|}{|f_\xi, f_{\eta\eta}, f_{\xi\eta}|} - \frac{f_\xi \cdot f_{\xi\xi}}{|f_\xi|^2} \\ & - \frac{|f_\xi, f_{\eta\eta}, f_{\eta\eta\eta}|}{2|f_\xi|^4|f_{\eta\eta}|^4|f_\xi, f_{\eta\eta}, f_{\xi\eta}|^3} X^2 \\ & + \frac{3}{|f_\xi|^{\frac{8}{3}}|f_{\eta\eta}|^2|f_\xi, f_{\eta\eta}, f_{\xi\eta}|} X \left(\frac{|f_\xi|^{\frac{2}{3}}|f_\xi, f_{\eta\eta}, f_{\xi\eta\eta}|}{|f_\xi, f_{\eta\eta}, f_{\xi\eta}|} - \frac{2f_\xi \cdot f_{\xi\eta}}{|f_\xi|^{\frac{4}{3}}} \right. \\ & + \frac{|f_\xi|^{\frac{2}{3}}|f_\xi, f_{\xi\eta}, f_{\eta\eta\eta}|}{3|f_\xi, f_{\eta\eta}, f_{\xi\eta}|} - \frac{2|f_\xi|^{\frac{2}{3}}|f_\xi, f_{\eta\eta}, f_{\xi\xi}||f_\xi, f_{\eta\eta}, f_{\eta\eta\eta}|}{3|f_\xi, f_{\eta\eta}, f_{\xi\eta}|^2} \\ & \left. \left. + \frac{2|f_\xi, f_{\eta\eta}, f_{\eta\eta\eta}|}{3|f_\xi|^{\frac{4}{3}}|f_{\eta\eta}|^2|f_\xi, f_{\eta\eta}, f_{\xi\eta}|^2} X \right) \right) \end{aligned}$$

は most strongly adapted ベクトル場の取り方に依らない。

ただし、

$$X = 2|f_\xi, f_{\xi\eta}, f_{\eta\eta}| \begin{vmatrix} |f_\xi|^2 & f_\xi \cdot f_{\xi\eta} \\ f_{\eta\eta} \cdot f_\xi & f_{\eta\eta} \cdot f_{\xi\eta} \end{vmatrix} - |f_\xi \times f_{\eta\eta}|^2 |f_\xi, f_{\xi\xi}, f_{\eta\eta}|$$

である.

写像芽 f が (3.2) の形で書かれていると,

$$\widetilde{f_{32\eta}} = (f_{32})_{\eta}(0, 0), \quad \widetilde{f_{32\xi}} = (f_{32})_{\xi}(0, 0), \quad \widetilde{f_{331\xi}} = (f_{331})_{\xi}(0)$$

が成り立つ.

参考文献

- [1] J. W. Bruce, and J. M. West, *Function on a cross cap*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **123** (1998), 19-39.
- [2] T. Fukui and M. Hasegawa, *Fronts of Whitney umbrella -a differential geometric approach via blowing up*, J. Singul. **4** (2012), 35-67.
- [3] M. Hasegawa, A. Honda, K. Naokawa, M. Umehara and K. Yamada, *Intrinsic invariants of cross caps*, Sel. Math. New Ser. **20** (2014), 769-785.
- [4] 泉屋周一, 石川剛郎, 応用特異点論, 共立出版株式会社, (1998)
- [5] D. Mond, *On the classification of germs of maps from $\mathbf{R}^2$ to $\mathbf{R}^3$* , Proc. London Math. Soc. **50**, (1985), 333-369.
- [6] 梅原雅顕, 佐治健太郎, 山田光太郎, 特異点をもつ曲線と曲面の微分幾何学, 丸善出版株式会社, (2017).

Gromov のピラミッドの直和と分解

宮本俊明（東北大学大学院理学研究科）*

概要

Gromov は、測度の集中現象をもとに測度距離空間（以下、mm 空間）の列のある種の仮想的な極限としてピラミッドを導入した。ピラミッドは、次元が無限大に発散するような mm 空間列の漸近的な挙動を研究する上で重要な概念である。本講演では、ピラミッドの新しい構成方法である直和について紹介する。mm 空間の不変量として、測度の集中の度合いを表すオブザーバブル直径が知られているが、ピラミッドの直和はオブザーバブル直径が無限大に発散する mm 空間列の極限を記述するために必要な概念である。主結果として、任意のピラミッドが最大ピラミッド $\mathcal{N}$ と有限なオブザーバブル直径をもつピラミッドたちの直和に分解されることを紹介する。本講演の内容はプレプリント [5] に基づく。

1 測度の集中現象

測度の集中現象は、標語的には「1-Lipschitz 関数の値がその中央値に集中していく」現象である。ここで、1-Lipschitz 関数とは、Lipschitz 定数が 1 以下の実数値関数である。まず、Lévy による球面に対する測度の集中現象を紹介する（詳しくは、[2, 4] を参照）。 $S^n(1)$ は n 次元単位球面で、標準的な Riemann 計量から定まる距離と、正規化された Riemann 体積測度 σ^n を備えているものとする。このとき、任意の 1-Lipschitz 関数 $f : S^n(1) \rightarrow \mathbb{R}$ と任意の $r > 0$ に対して、

$$\sigma^n(\{|f - m_f| \geq r\}) \leq 2e^{-(n-1)r^2/2} \quad (1.1)$$

が成り立つ（例えば、[2, 3 $\frac{1}{2}$, 19] を参照）。ここで、 m_f は $\sigma^n(\{f \geq m_f\}) \geq 1/2$ かつ $\sigma^n(\{f \leq m_f\}) \geq 1/2$ をみたす実数で、 f の中央値と呼ばれる。Gromov はこの測度の集中現象をもとに、測度距離空間の新たな収束理論を展開した。

2 測度距離空間、ピラミッド

本節で mm 空間やピラミッドの基本的な事実をまとめる。主な参考文献は [2, 8, 10] である。

完備かつ可分な距離空間（resp. 拡張距離空間） (X, d_X) と、その上の Borel 確率測度 μ_X の組 (X, d_X, μ_X) を **mm 空間**（resp. **拡張 mm 空間**）という。ここで、拡張距離空間とは、その距離関数が $[0, +\infty]$ に値をとるもののことを言う。

* miyamoto.toshiaki.s2@dc.tohoku.ac.jp

- 例 2.1.** (i) 閉 Riemann 多様体 M に対して, その Riemann 距離関数 d_M と正規化された Riemann 体積測度 $\mu_M := \text{vol}(M)^{-1} \text{vol}$ の組 (M, d_M, μ_M) は mm 空間である.
- (ii) $\mathbb{R}$ 上の 1 次元標準正規分布 γ に対して, $\Gamma := (\mathbb{R}, |\cdot|, \gamma)$ は 1 次元 **Gauss 空間** と呼ばれる mm 空間である. ここで, $|\cdot|$ は $\mathbb{R}$ 上の Euclid ノルムである.
- (iii) mm 空間 X, Y に対して, $X \times Y$ 上の ℓ^2 距離 $d_{X \times Y}$ と, μ_X と μ_Y の直積測度 $\mu_X \otimes \mu_Y$ の組 $(X \times Y, d_{X \times Y}, \mu_X \otimes \mu_Y)$ は mm 空間である. 以下, 単に $X \times Y$ で表す. さらに, mm 空間 X に対して, $X^n := X \times X^{n-1}$, $n \geq 2$, で X^n を定めると, これも mm 空間である.
- (iv) 総和が 1 の正の有限または無限数列全体を $\mathcal{A}_1$ で表す. $(a_n)_{n=1}^N \in \mathcal{A}_1$, $N \in \overline{\mathbb{N}} := \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, と mm 空間列 $\{X_n\}_{n=1}^N$ に対して, $\bigsqcup_{n=1}^N X_n$ 上の距離 d と測度 μ を,

$$d(x, x') := \begin{cases} d_{X_n}(x, x') & \text{if } x, x' \in X_n, n \in [N] \\ +\infty & \text{otherwise} \end{cases}, \quad \mu := \sum_{n=1}^N a_n(\iota_n)_* \mu_{X_n}$$

で定める. ここで, $\iota_n : X_n \hookrightarrow \bigsqcup_{n=1}^N X_n$ は包含写像で, $[N]$ は 1 以上 N 以下の整数全体 ($N = +\infty$ の場合は 1 以上の整数全体) を表す. このとき, $\sum_{n=1}^N X_n^{a_n} := (\bigsqcup_{n=1}^N X_n, d, \mu)$ は拡張 mm 空間であり, $(a_n)_{n=1}^N$ を重みとする $\{X_n\}_{n=1}^N$ の直和と呼ぶ.

2 つの mm 空間 X, Y に対して, 等長同型写像 $f : \text{supp } \mu_X \rightarrow \text{supp } \mu_Y$ であって, $f_* \mu_X = \mu_Y$ を満たすものが存在するとき, X と Y は **mm 同型** であるという. ここで, $\text{supp } \mu_X$ は μ_X の台, $f_* \mu_X$ は f による μ_X の押し出し測度である. mm 同型は mm 空間全体の集合上の同値関係であり, mm 同型類全体の集合を $\mathcal{X}$ で表す. mm 空間 X と mm 空間 $(\text{supp } \mu_X, d_X, \mu_X)$ は mm 同型であることに注意する. 以下, mm 空間 X に対して $X = \text{supp } \mu_X$ を仮定する.

Gromov は, mm 空間に対して次の不変量を導入した ([2]): mm 空間 X と $0 < \kappa < 1$ に対して,

$$\text{ObsDiam}(X; -\kappa) := \sup_{f \in \mathcal{L}ip_1(X)} \inf \{ \text{diam}(I) \mid I \subset \mathbb{R} \text{ with } f_* \mu_X(I) \geq 1 - \kappa \}$$

を X の κ -オブザーバブル直径という. ここで, $\mathcal{L}ip_1(X)$ は X から $\mathbb{R}$ への 1-Lipschitz 関数全体の集合である. オブザーバブル直径は, κ について単調非増加である.

球面に対する測度の集中現象 (1.1) から, 次が従う: 任意の $0 < \kappa < 1$ に対して,

$$\text{ObsDiam}(S^n(1); -\kappa) \leq 2 \sqrt{\frac{2}{n-1} \log \left(\frac{2}{\kappa} \right)}.$$

特に, $S^n(1)$ の κ -オブザーバブル直径は, $n \rightarrow \infty$ の極限で 0 に収束する. このように, すべての $0 < \kappa < 1$ で $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{ObsDiam}(X_n; -\kappa) = 0$ となる mm 空間列 $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ を **Lévy 族** という.

Gromov は, 2 つの mm 空間 X, Y の間のオブザーバブル距離 $d_{\text{conc}}(X, Y)$ を導入して, mm 空間の収束理論を展開した ([2]). ここでは Nakajima [6] による同値な定式化を紹介する:

$$d_{\text{conc}}(X, Y) = \inf_{\pi \in \Pi(\mu_X, \mu_Y)} (d_{\text{KF}}^\pi)_H(p_1^* \mathcal{L}ip_1(X), p_2^* \mathcal{L}ip_1(Y)).$$

ここで, $\Pi(\mu_X, \mu_Y)$ は μ_X と μ_Y の間のカップリング全体の集合, d_{KF}^π は測度 π に関する Ky Fan 距離, $(d_{\text{KF}}^\pi)_H$ は d_{KF}^π に関する Hausdorff 距離, $p_1 : X \times Y \rightarrow X$, $p_2 : X \times Y \rightarrow Y$ は射影, そして

$p_1^* \mathcal{L}ip_1(X), p_2^* \mathcal{L}ip_1(Y)$ はそれぞれ p_1, p_2 による $\mathcal{L}ip_1(X), \mathcal{L}ip_1(Y)$ の元の引き戻し全体を表している．詳しくは [10] も参照してほしい．簡単に言うと，この $d_{\text{conc}}(X, Y)$ は $\mathcal{L}ip_1(X)$ と $\mathcal{L}ip_1(Y)$ の近さを測っている． d_{conc} が $\mathcal{X}$ 上に誘導する位相を**集中位相**といい，集中位相での mm 空間列の収束を**集中**という．mm 空間列 $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ が 1 点 mm 空間 $*$ に集中することと， $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ が Lévy 族であることは同値である ([2]).

さらに Gromov は，集中位相のコンパクト化を得るためにピラミッドを導入した ([2]). ここで必要な概念を紹介する．2 つの mm 空間 X, Y に対して，1-Lipschitz 写像 $f: Y \rightarrow X$ であって $f_* \mu_Y = \mu_X$ をみたすものが存在するとき， $X \prec Y$ と表し， Y は X を**支配**するという．

定義 2.2. 集合族 $\mathcal{P} \subset \mathcal{X}$ が以下を満たすとき， $\mathcal{P}$ を**ピラミッド**という：

- (i) $\mathcal{P}$ は空でないボックス閉集合；
- (ii) $X \prec Y, Y \in \mathcal{P}$ ならば $X \in \mathcal{P}$ ；
- (iii) 任意の $X, Y \in \mathcal{P}$ に対して，ある $Z \in \mathcal{P}$ が存在して， $X \prec Z, Y \prec Z$.

ここで，ボックス閉集合とは，Gromov [2] により $\mathcal{X}$ 上に導入された**ボックス位相**に関する閉集合という意味である．この条件は，ピラミッド全体の空間に距離を入れるために必要な条件である（ボックス位相について，詳しくは [2, 10] を参照してほしい）．

例 2.3. (i) $\mathcal{X}$ はピラミッド

(ii) ([2, 7]) 拡張 mm 空間 X に対して， $\mathcal{P}_X := \{Y \in \mathcal{X} \mid Y \prec X\}$ はピラミッドで， X に付随したピラミッド，または， X を頂点とするピラミッドと呼ぶ．

(iii) ([1, 3]) 総和が 1 以下で単調非増加な正の有限または無限数列全体を $\mathcal{A}$ で表す． $A = (a_n)_{n=1}^N \in \mathcal{A}, N \in \mathbb{N}$ ，に対して，

$$\mathcal{P}_A := \left\{ X \in \mathcal{X} \mid \text{写像 } f: [N] \rightarrow X \text{ で, } \mu_X \geq \sum_{n=1}^N a_n \delta_{f(n)} \text{ をみたすものが存在する.} \right\}$$

はピラミッドで，**アトム A が生成するピラミッド**と呼ばれている．ここで，アトムとは，正の測度をもつ点のことである．

ピラミッドと集中の関係について，次の定理が重要である．

定理 2.4 ([8]). ピラミッド全体の集合 Π 上の距離 ρ で，次の (i), (ii) を満たすものが存在する：

- (i) (Π, ρ) はコンパクト距離空間；
- (ii) 写像 $\iota: (\mathcal{X}, d_{\text{conc}}) \ni X \mapsto \mathcal{P}_X \in (\Pi, \rho)$ は位相的埋め込みで， $\iota(\mathcal{X})$ は (Π, ρ) で稠密である．

すなわち， (Π, ρ) は集中位相のコンパクト化を与えている．ピラミッドの列が ρ に関して収束しているとき，**弱収束**するという．以下，特に断らない限り，写像 ι により X と $\mathcal{P}_X$ を同一視する．

例 2.5 ([2, 8]). mm 空間 X に対して， $\{X^n\}_{n=1}^\infty$ は弱収束列である．その極限を X^∞ と書く．例えば， Γ^∞ は**無限次元仮想標準 Gauss 空間**と呼ばれるピラミッドで， $\Gamma^\infty \notin \iota(\mathcal{X})$ ，つまり， Γ^∞

は頂点に mm 空間を持たないことが知られている ([8, Proposition 7.37], 他に [10, 系 6.41] も参照).

次に, 測度の集中現象と正反対の現象を紹介する. mm 空間列 $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ が $\mathcal{X}$ に弱収束するとき, $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ は**無限消散する**という. 例えば, 閉 Riemann 多様体 M と無限大に発散する正数列 $\{t_n\}_{n=1}^\infty$ に対して, $\{t_n M\}_{n=1}^\infty$ は無限消散列である (例えば, [10, 例 7.44 (1)] を参照). 無限消散は Gromov [2] により導入された概念で, 本来セパレーション距離を使って定義されるが, 上の定式化と同値であることが知られている ([2, 8]). $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ が無限消散することと, すべての $0 < \kappa < 1$ に対して, $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{ObsDiam}(X_n; -\kappa) = +\infty$ となることは同値である ([10, 定理 7.53]).

3 ピラミッドの直和とピラミッドの直和分解

ある κ について, κ -オブザーバブル直径が無限大に発散するような mm 空間列の弱収束極限を記述するには, 次のピラミッドの直和が必要である.

定義 3.1 ([5]). $(a_n)_{n=1}^N \in \mathcal{A}_1$ とピラミッドの列 $\{\mathcal{P}_n\}_{n=1}^N$ に対して, $(a_n)_{n=1}^N$ を**重みにもつ $\{\mathcal{P}_n\}_{n=1}^N$ の直和**を次で定義する:

$$\sum_{n=1}^N \mathcal{P}_n^{a_n} := \left\{ X \in \mathcal{X} \left| \begin{array}{l} \text{すべての } n \text{ に対して, ある } X_n \in \mathcal{P}_n \text{ とある 1-Lipschitz 写像} \\ f_n : X_n \rightarrow X \text{ が存在して, } \mu_X = \sum_{n=1}^N a_n (f_n)_* \mu_{X_n} \text{ が成り立つ.} \end{array} \right. \right\}$$

命題 3.2 ([5, Theorem 1.1]). $(a_n)_{n=1}^N \in \mathcal{A}_1$ とピラミッドの列 $\{\mathcal{P}_n\}_{n=1}^N$ に対して, $\sum_{n=1}^N \mathcal{P}_n^{a_n}$ はピラミッドである.

- 例 3.3.** (i) $(a_n)_{n=1}^N \in \mathcal{A}_1$ と mm 空間列 $\{X_n\}_{n=1}^N$ に対して, $\mathcal{P}_{\sum_{n=1}^N X_n^{a_n}} = \sum_{n=1}^N \mathcal{P}_{X_n}^{a_n}$.
(ii) $A = (a_n)_{n=1}^N \in \mathcal{A}$ に対して, $\mathcal{P}_A = \mathcal{X}^{1-\|A\|_1} + \sum_{n=1}^N \mathcal{P}_*^{a_n}$ が成り立つ. この関係から, ピラミッドの直和はアトムが生成するピラミッドの一般化といえる.
(iii) ([5, Corollary 4.5]) 二つの n -トーラス $T^n := S^1(1) \times S^1(1) \times \cdots \times S^1(1)$ を 1 点で貼り合わせた空間を $T^n \vee T^n$ とし, $\iota : (T^n)_1 \sqcup (T^n)_2 \rightarrow T^n \vee T^n$ を商写像とする. ただし, $(T^n)_i$ は T^n の二つのコピーである. $T^n \vee T^n$ は, 確率測度 $\iota_*(1/2\mu_{(T^n)_1} + 1/2\mu_{(T^n)_2})$ を入れることで mm 空間になり, $n \rightarrow \infty$ の極限で直和 $(T^\infty)^{1/2} + (T^\infty)^{1/2}$ に弱収束する. $\{T^n \vee T^n\}_{n=1}^\infty$ の κ -オブザーバブル直径は, $0 < \kappa < 1/2$ のとき無限大に発散する.

直和分解を紹介する前に, Ozawa-Shioya [7] により導入されたピラミッドのオブザーバブル直径について説明する. $0 < \kappa < 1$ とピラミッド $\mathcal{P}$ に対して,

$$\text{ObsDiam}(\mathcal{P}; -\kappa) := \sup_{X \in \mathcal{P}} \text{ObsDiam}(X; -\kappa)$$

を $\mathcal{P}$ の κ -オブザーバブル直径という. オブザーバブル直径は $\prec$ に関して単調増加であるため, mm 空間 X に対して $\text{ObsDiam}(X; -\kappa) = \text{ObsDiam}(\mathcal{P}_X; -\kappa)$ が成り立つ. 従って, ピラミッ

ドのオブザーバブル直径は mm 空間の場合の拡張になっている．すべての $0 < \kappa < 1$ に対して， $\text{ObsDiam}(\mathcal{P}; -\kappa) < +\infty$ が成り立つとき， $\mathcal{P}$ のオブザーバブル直径は**有限**と呼ぶことにする．

例 3.4. (i) mm 空間 X のオブザーバブル直径は有限である．

(ii) ([7, Example 3.13]) $\text{ObsDiam}(\Gamma^\infty; -\kappa) = \text{ObsDiam}(\Gamma; -\kappa)$ がすべての $0 < \kappa < 1$ で成り立つ．特に， Γ^∞ のオブザーバブル直径は有限である．

(iii) $0 < \alpha < 1$ に対して，ピラミッドの直和 $\mathcal{P}^\alpha + \mathcal{Q}^{1-\alpha}$ のオブザーバブル直径は有限ではない．

(iv) $\mathcal{X}$ のオブザーバブル直径は有限ではない．特に，すべての $0 < \kappa < 1$ に対して， $\text{ObsDiam}(\mathcal{X}; -\kappa) = +\infty$ ．

ピラミッドのオブザーバブル直径については，次の極限公式が知られている．

定理 3.5 ([7, 9]). ピラミッドの列 $\{\mathcal{P}_n\}_{n=1}^\infty$ がピラミッド $\mathcal{P}$ に弱収束しているとする．このとき，すべての $0 < \kappa < 1$ に対して，次が成り立つ：

$$\begin{aligned}\text{ObsDiam}(\mathcal{P}; -\kappa) &= \lim_{\delta \rightarrow 0+} \limsup_{n \rightarrow \infty} \text{ObsDiam}(\mathcal{P}_n; -(\kappa + \delta)) \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0+} \liminf_{n \rightarrow \infty} \text{ObsDiam}(\mathcal{P}_n; -(\kappa + \delta))\end{aligned}$$

弱収束する mm 空間列 $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ の κ -オブザーバブル直径がある $0 < \kappa < 1$ で無限大に発散しているとする，オブザーバブル直径の極限公式からその弱収束極限のオブザーバブル直径が有限でないと分かる．そのようなピラミッドについては，次の直和分解によりその構造が理解される．

定理 3.6 ([5, Theorem 1.2, Theorem 1.3]). 任意のピラミッド $\mathcal{P}$ に対して，ある $A = (a_n)_{n=1}^N \in \mathcal{A}$ と有限なオブザーバブル直径をもつピラミッドの列 $\{\mathcal{P}_n\}_{n=1}^N$ が存在して，次が成り立つ：

$$\mathcal{P} = \mathcal{X}^{1-\|A\|_1} + \sum_{n=1}^N \mathcal{P}_n^{a_n}.$$

さらに，この直和分解には適切な意味で一意性がある．

この直和分解は，オブザーバブル直径がある $0 < \kappa_0 < 1$ を境に無限大から有限に変わるようなピラミッドに対して本質的に意味があることに注意する．

最後に，定理 3.6 の証明の概略を紹介する．任意にピラミッド $\mathcal{P}$ をとる． $t > 0$ に対して， $t\mathcal{P} := \{(X, t d_X, \mu_X) \mid X \in \mathcal{P}\}$ により $\mathcal{P}$ のスケール変換を定義すると， $t \rightarrow 0+$ のとき $t\mathcal{P}$ はあるスケール不変なピラミッド $\mathcal{Q}$ に弱収束する ([5, Lemma 5.3])．ここで， $\mathcal{Q}$ が**スケール不変**であるとは，すべての $t > 0$ に対して $t\mathcal{Q} = \mathcal{Q}$ が成り立つときをいう ([1, 3])．スケール不変なピラミッドの構造については次が知られている：

定理 3.7 ([3, Theorem 1.7]). ピラミッド $\mathcal{P}$ がスケール不変である必要十分条件は，ある $A \in \mathcal{A}$ が存在して $\mathcal{P} = \mathcal{P}_A$ となることである．

よって，ある $A \in \mathcal{A}$ が存在して， $\mathcal{Q} = \mathcal{P}_A$ ．ここで次の事実 ([5, Lemma 5.6]) が重要である：ピラミッド $\mathcal{R}$ について，オブザーバブル直径が有限であることと， $t\mathcal{R}$ が $t \rightarrow 0+$ のとき $\mathcal{P}_*$ に弱

収束することは同値である。このことから、 $t\mathcal{P}$ の $t \rightarrow 0+$ での極限 $\mathcal{Q}$ に現れるアトムは、 $\mathcal{P}$ のオプザーバブル直径が有限な部分が 1 点空間 $*$ に潰れたものと考えられる。この 1 点に潰れた部分を復元することで、 $\mathcal{P}$ の直和分解が得られる。直和分解の一意性については [5] を参照してほしい。

参考文献

- [1] S. Esaki, D. Kazukawa, and A. Mitsuishi. Invariants for Gromov’s pyramids and their applications. *Adv. Math.*, 442:Paper No. 109583, 70, 2024.
- [2] M. Gromov. *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, english edition, 2007. Based on the 1981 French original, With appendices by M. Katz, P. Pansu and S. Semmes, Translated from the French by Sean Michael Bates.
- [3] D. Kazukawa, H. Nakajima, and T. Shioya. Principal bundle structure of the space of metric measure spaces. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics*, 156(3):870–900, 2026.
- [4] M. Ledoux. *The concentration of measure phenomenon*, Vol. 89 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.
- [5] T. Miyamoto. Direct sums and decompositions of Gromov’s pyramids, 2026. arXiv: 2604.12302.
- [6] H. Nakajima. Box distance and observable distance via optimal transport, 2022. arXiv: 2204.04893.
- [7] R. Ozawa and T. Shioya. Limit formulas for metric measure invariants and phase transition property. *Math. Z.*, 280(3-4):759–782, 2015.
- [8] T. Shioya. *Metric measure geometry*, Vol. 25 of *IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics*. EMS Publishing House, Zürich, 2016. Gromov’s theory of convergence and concentration of metrics and measures.
- [9] S. Yokota. A complete proof of the limit formula for observable diameter. *Geom. Dedicata*, 220(4):Paper No. 36, 2026.
- [10] 塩谷隆. 測度距離空間の幾何学への招待：高次元および無限次元空間へのアプローチ. SGC ライブラリ. サイエンス社, 2024.

5次元 SNC リー環の分類

須貝 遥 (東京理科大学)

1. 序文

すべての連結負曲率等質リーマン多様体は, ある左不変計量を持つ連結可解リー群と等長的になることが知られている. そこで, 負曲率内積を持つ連結可解リー群のリー環を **SNC リー環** と定義する. 3次元 SNC リー環についてはよく知られており, 4次元 SNC リー環については [1] で分類した. 最近, 5次元 SNC リー環の分類結果を得た [5]. また, Heintze [2] による, SNC リー環が対称空間になるための条件を用いて, 4次元及び5次元 SNC リー環の中で対称空間となるものを決定した. 更に, 4次元 SNC リー環の中で対称空間となるもののリーマン曲率テンソルを計算し, リー環として同型ではないがリーマン多様体として等長的になる4次元 SNC リー環の組を発見した.

2. 負曲率等質リーマン多様体

連結負曲率等質リーマン多様体については, Wolf[6] 及び Heintze[2] から次の事実が知られている.

Proposition 2.1 ([6],[2]). M を連結負曲率等質リーマン多様体とする. このとき, ある可解リー群 G とその上の左不変計量があって, M と G は等長的になる.

この命題から, 連結負曲率等質リーマン多様体の分類を考えると, 左不変計量を持つ可解リー群を考えれば十分であることが分かる. リー群 G 上の左不変計量はそのリー環 $\mathfrak{g}$ 上の内積によって定まるので, 左不変計量を持つ G が負曲率であるとき, 対応するリー環 $\mathfrak{g}$ が負曲率内積を持つと言う. そこで, 次のように定義する.

Definition 2.2 (SNC リー環). リー環 $\mathfrak{g}$ が負曲率内積を持つとき, **SNC リー環** (a Lie algebra of strictly negative curvature type) という.

注意としてリー環 $\mathfrak{g}$ が負曲率内積を持つとき, $\mathfrak{g}$ は可解となることが知られている. ここで Heintze の結果を SNC リー環を用いて述べる.

Theorem 2.3 (cf.[2]). 可解リー環 $\mathfrak{g}$ について, 次の (1), (2) は同値.

- (1) $\mathfrak{g}$ は SNC リー環である.
- (2) $\mathfrak{g}'$ を $\mathfrak{g}$ の導来環とすると次が成立する.
 - (2.1) $\dim \mathfrak{g}' = \dim \mathfrak{g} - 1$.
 - (2.2) $\text{ad} A_0|_{\mathfrak{g}'} : \mathfrak{g}' \rightarrow \mathfrak{g}'$ の固有値の実部がすべて正となる $A_0 \in \mathfrak{g}$ がある.

3. 4次元 SNC リー環の分類

この節では4次元 SNC リー環の分類結果 [1] を紹介する.

Theorem 3.1 ([1]). $\mathfrak{g}$ を4次元 SNC リー環で, $\mathfrak{n} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ が可換と仮定する. e_1, e_2, e_3 を $\mathfrak{n}$ の任意に固定した正規直交基底とする. このとき, e_1, e_2, e_3, e_4 が $\mathfrak{g}$ の正規直交基底となる $e_4 \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{n}$ を, 以下のいずれかひとつを満たすように定めることができる.

- (1) $[e_4, e_1] = xe_1$, $[e_4, e_2] = ye_2$, $[e_4, e_3] = e_3$, $0 < x \leq y \leq 1$.
- (2) $[e_4, e_1] = ze_1$, $[e_4, e_2] = e_2$, $[e_4, e_3] = e_2 + e_3$, $0 < z$.

2020 *Mathematics Subject Classification.* 53C30.

Key words and phrases. Homogeneous manifold, Lie algebra, negative curvature, Ricci curvature.

$$(3) [e_4, e_1] = e_1, [e_4, e_2] = e_1 + e_2, [e_4, e_3] = e_2 + e_3.$$

$$(4) [e_4, e_1] = \alpha e_1 + \beta e_2, [e_4, e_2] = -\beta e_1 + \alpha e_2, [e_4, e_3] = e_3, 0 < \alpha, \beta.$$

e_4 が, (1)~(4) のうち異なる条件を満たす場合は非同型であり, (1) において異なる x, y , (2) において異なる z , (4) において異なる α, β に対応する場合も非同型である.

Theorem 3.2 ([1]). $\mathfrak{g}$ を 4 次元 SNC リー環で, $\mathfrak{n} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ の正規直交基底 e_1, e_2, e_3 が $[e_1, e_2] = e_3, [e_2, e_3] = [e_3, e_1] = 0$ を満たすと仮定する. このとき, e_1, e_2, e_3, e_4 が $\mathfrak{g}$ の正規直交基底となる $e_4 \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{n}$ を, 以下のいずれかひとつを満たすように定めることができる.

$$(1) [e_4, e_1] = x e_1, [e_4, e_2] = (1 - x) e_2, [e_4, e_3] = e_3, 0 < x \leq \frac{1}{2}.$$

$$(2) [e_4, e_1] = \frac{1}{2} e_1, [e_4, e_2] = e_1 + \frac{1}{2} e_2, [e_4, e_3] = e_3.$$

$$(3) [e_4, e_1] = \frac{1}{2} e_1 + \alpha e_2, [e_4, e_2] = -\alpha e_1 + \frac{1}{2} e_2, [e_4, e_3] = e_3, 0 < \alpha.$$

e_4 が, (1)~(3) のうち異なる条件を満たす場合は非同型であり, (1) において異なる x , (3) において異なる α に対応する場合も非同型である.

4. 5 次元 SNC リー環の分類

$\mathfrak{g}$ が 5 次元 SNC リー環の場合, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{n}$ は 4 次元冪零リー環であり, 同型を除いて 3 種類に限ることが知られている. これより以下の結果を得た.

Theorem 4.1 ([5]). $\mathfrak{g}$ を 5 次元 SNC リー環で, $\mathfrak{n} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ が可換と仮定する. e_1, e_2, e_3, e_4 を $\mathfrak{n}$ の任意に固定した正規直交基底とする. このとき, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 が $\mathfrak{g}$ の正規直交基底となる $e_5 \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{n}$ を, 以下のいずれかひとつを満たすように定めることができる.

$$(1) [e_5, e_1] = x_1 e_1, [e_5, e_2] = x_2 e_2, [e_5, e_3] = x_3 e_3, [e_5, e_4] = e_4, 0 < x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq 1.$$

$$(2) [e_5, e_1] = y_1 e_1, [e_5, e_2] = y_2 e_2, [e_5, e_3] = e_3, [e_5, e_4] = e_3 + e_4, 0 < y_1 \leq y_2.$$

$$(3) [e_5, e_1] = y_1 e_1, [e_5, e_2] = y_2 e_2, [e_5, e_3] = e_3 + \beta e_4, [e_5, e_4] = -\beta e_3 + e_4, 0 < y_1 \leq y_2, 0 < \beta.$$

$$(4) [e_5, e_1] = z e_1, [e_5, e_2] = e_2, [e_5, e_3] = e_2 + e_3, [e_5, e_4] = e_3 + e_4, 0 < z.$$

$$(5) [e_5, e_1] = z e_1, [e_5, e_2] = e_1 + z e_2, [e_5, e_3] = e_3, [e_5, e_4] = e_3 + e_4, 0 < z.$$

$$(6) [e_5, e_1] = z e_1, [e_5, e_2] = e_1 + z e_2, [e_5, e_3] = e_3 + \beta e_4, [e_5, e_4] = -\beta e_3 + e_4, 0 < z, 0 < \beta.$$

$$(7) [e_5, e_1] = \alpha e_1 + \beta e_2, [e_5, e_2] = -\beta e_1 + \alpha e_2, [e_5, e_3] = e_3 + \beta' e_4, [e_5, e_4] = -\beta' e_3 + e_4, 0 < \alpha, \beta, \beta'.$$

$$(8) [e_5, e_1] = e_1, [e_5, e_2] = e_1 + e_2, [e_5, e_3] = e_2 + e_3, [e_5, e_4] = e_3 + e_4.$$

$$(9) [e_5, e_1] = e_1 + \beta e_2, [e_5, e_2] = -\beta e_1 + e_2, [e_5, e_3] = e_1 + e_3 + \beta' e_4, [e_5, e_4] = e_2 - \beta' e_3 + e_4, 0 < \beta, \beta'.$$

Theorem 4.2 ([5]). $\mathfrak{g}$ を 5 次元 SNC リー環で, $\mathfrak{n} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ の正規直交基底 e_1, e_2, e_3, e_4 が $[e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = e_4$, 他が 0 を満たすと仮定する. このとき, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 が $\mathfrak{g}$ の正規直交基底となる $e_5 \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{n}$ を, 以下のいずれかひとつを満たすように定めることができる.

$$(1) [e_5, e_1] = e_1, [e_5, e_2] = x e_2, [e_5, e_3] = (1 + x) e_3, [e_5, e_4] = (2 + x) e_4, 0 < x.$$

$$(2) [e_5, e_1] = e_1, [e_5, e_2] = e_1 + e_2, [e_5, e_3] = 2 e_3, [e_5, e_4] = 3 e_4.$$

$$(3) [e_5, e_1] = e_1 + \beta e_2, [e_5, e_2] = -\beta e_1 + e_2, [e_5, e_3] = 2 e_3, [e_5, e_4] = 3 e_4, 0 < \beta.$$

Theorem 4.3 ([5]). $\mathfrak{g}$ を 5 次元 SNC リー環で, $\mathfrak{n} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ の正規直交基底 e_1, e_2, e_3, e_4 が $[e_1, e_2] = e_4$, 他が 0 を満たすと仮定する. このとき, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 が $\mathfrak{g}$ の正規直交基底となる $e_5 \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{n}$ を, 以下のいずれかひとつを満たすように定めることができる.

$$(1) [e_5, e_1] = e_1, [e_5, e_2] = x_1 e_2, [e_5, e_3] = x_2 e_3, [e_5, e_4] = (1 + x_1) e_4, 0 < x_1, x_2.$$

$$(2) [e_5, e_1] = e_1, [e_5, e_2] = e_1 + e_2, [e_5, e_3] = x e_3, [e_5, e_4] = 2 e_4, 0 < x.$$

$$(3) [e_5, e_1] = e_1 + \alpha e_2, [e_5, e_2] = -\alpha e_1 + e_2, [e_5, e_3] = x e_3, [e_5, e_4] = 2 e_4, 0 < x, \alpha.$$

$$(4) [e_5, e_1] = e_1 + e_3, [e_5, e_2] = x e_2, [e_5, e_3] = e_3, [e_5, e_4] = (1 + x) e_4, 1 \leq x.$$

$$(5) [e_5, e_1] = e_1 + \alpha e_2 + e_3, [e_5, e_2] = -\alpha e_1 + e_2, [e_5, e_3] = e_3, [e_5, e_4] = 2 e_4, 0 < \alpha.$$

$$(6) [e_5, e_1] = x e_1, [e_5, e_2] = e_2 + e_3, [e_5, e_3] = e_3, [e_5, e_4] = (1 + x) e_4, 0 < x \leq 1.$$

- (7) $[e_5, e_1] = e_1 + \alpha e_2$, $[e_5, e_2] = -\alpha e_1 + e_2 + e_3$, $[e_5, e_3] = e_3$, $[e_5, e_4] = 2e_4$, $0 < \alpha$.
(8) $[e_5, e_1] = e_1 + e_3$, $[e_5, e_2] = e_1 + e_2$, $[e_5, e_3] = e_3$, $[e_5, e_4] = 2e_4$.
(9) $[e_5, e_1] = e_1$, $[e_5, e_2] = e_1 + e_2 + e_3$, $[e_5, e_3] = e_3$, $[e_5, e_4] = 2e_4$.
(10) $[e_5, e_1] = e_1 + e_3$, $[e_5, e_2] = e_1 + e_2 + e_3$, $[e_5, e_3] = e_3$, $[e_5, e_4] = 2e_4$.
(11) $[e_5, e_1] = xe_1$, $[e_5, e_2] = e_2$, $[e_5, e_3] = (x+1)e_3 + e_4$, $[e_5, e_4] = (x+1)e_4$, $0 < x$.
(12) $[e_5, e_1] = \frac{1}{2}e_1$, $[e_5, e_2] = e_1 + \frac{1}{2}e_2$, $[e_5, e_3] = e_3 + e_4$, $[e_5, e_4] = e_4$.
(13) $[e_5, e_1] = \frac{1}{2}e_1 + \alpha e_2$, $[e_5, e_2] = -\alpha e_1 + \frac{1}{2}e_2$, $[e_5, e_3] = e_3 + e_4$, $[e_5, e_4] = e_4$.

5. SNC リー環と対称空間

Heintze[2] によって次の定理が示された.

Theorem 5.1 ([2] Proposition 3). $\mathfrak{g}$ を SNC リー環とし, $A_0 \in \mathfrak{g}$ を Theorem 2.3 (2.2) の A_0 とする. このとき次の (1), (2) は同値.

- (1) $\nabla R = 0$
(2) a) $\mathfrak{g} = \mathbb{R}A_0 + \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2$ は直交直和分解で, $\mathfrak{g}' = \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2$, $[\mathfrak{g}', \mathfrak{g}'] = \mathfrak{a}_2$ 及び $[\mathfrak{g}', \mathfrak{a}_2] = 0$ を満たす.
b) $\text{ad}A_0|_{\mathfrak{g}'} = D_0 + S_0$ を対称部分と歪対称部分への分解とすると, $D_0|_{\mathfrak{a}_i} = i \cdot \lambda \cdot \text{id}$ ($i = 1, 2$) で S_0 は $\mathfrak{g}'$ の歪対称微分である.
c) $Z_1, \dots, Z_t$ を $\mathfrak{a}_2$ の正規直交基底とし, 歪対称写像 $J_i : \mathfrak{a}_1 \rightarrow \mathfrak{a}_1$, $i = 1, \dots, t$, が

$$[X, Y] = 2\lambda \sum_{i=1}^t \langle X, J_i Y \rangle Z_i \quad (X, Y \in \mathfrak{a}_1)$$

で定義されたとする. このとき,

- $\alpha)$ $J_i^2 = -\text{id}$,
 $\beta)$ $J_i J_k = -J_k J_i$ ($i \neq k$),
 $\gamma)$ $J_i J_k X \in \{J_1 X, \dots, J_t X\}$ ($X \in \mathfrak{a}_1$, $i \neq k$),
が成り立つ.

特に, SNC リー環の場合, 対称空間であること及び Theorem 5.1 (1) の条件を満たすことは同値であるので, 3節で分類した 4次元 SNC リー環の中で対称空間となるものを調べることができる.

4次元 SNC リー環で導来環が可換の場合, 仮定から, $A_0 = e_4$, $\mathfrak{a}_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$, $\mathfrak{a}_2 = 0$, $\mathfrak{g}' = \{e_1, e_2, e_3\}$ であり, Theorem 5.1 (2) a) を満たす. また, $\mathfrak{a}_2 = 0$ であるので c) を満たすことは自明である. よって, b) を満たすかを調べれば十分である. b) を満たすものは以下の 2通り存在する.

• Theorem 3.1 (1) で以下を満たす場合

- (i) $[e_4, e_1] = e_1$, $[e_4, e_2] = e_2$, $[e_4, e_3] = e_3$.

• Theorem 3.1 (4) で以下を満たす場合

- (ii) $[e_4, e_1] = e_1 + \beta e_2$, $[e_4, e_2] = -\beta e_1 + e_2$, $[e_4, e_3] = e_3$, $0 < \beta$.

(i) の場合, $\text{ade}_4|_{\mathfrak{g}'} = D_0|_{\mathfrak{a}_1} = D_0|_{\mathfrak{g}'} = \text{id}$ なので, $\lambda = 1$ に対して b) を満たす.

(ii) の場合, $\text{ade}_4|_{\mathfrak{g}'} = D_0 + S_0$ は, $D_0|_{\mathfrak{a}_1} = D_0|_{\mathfrak{g}'} = \text{id}$ なので, $\lambda = 1$ に対して b) を満たす.

次に 4次元 SNC リー環で導来環が非可換の場合, 仮定から, $A_0 = e_4$, $\mathfrak{a}_1 = \{e_1, e_2\}$, $\mathfrak{a}_2 = e_3$, $\mathfrak{g}' = \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2$, $[\mathfrak{g}', \mathfrak{a}_2] = 0$ であり, Theorem 5.1 (2) a) を満たす. b) を満たすものは以下の 2通り存在する.

• Theorem 3.2 (1) で以下を満たす場合

- (iii) $[e_4, e_1] = \frac{1}{2}e_1$, $[e_4, e_2] = \frac{1}{2}e_2$, $[e_4, e_3] = e_3$.

• Theorem 3.2 (3) で以下を満たす場合

- (iv) $[e_4, e_1] = \frac{1}{2}e_1 + \beta e_2$, $[e_4, e_2] = -\beta e_1 + \frac{1}{2}e_2$, $[e_4, e_3] = e_3$, $0 < \beta$.

(iii) の場合, $\text{ade}_4|\mathfrak{g}' = D_0$ であり, $D_0|\mathfrak{a}_1 = \frac{1}{2}\text{id}$, $D_0|\mathfrak{a}_2 = 2 \cdot \frac{1}{2}\text{id}$ なので, $\lambda = \frac{1}{2}$ に対して b) を満たす.
(iv) の場合, $\text{ade}_4|\mathfrak{g}' = D_0 + S_0$ であり, $D_0|\mathfrak{a}_1 = \frac{1}{2}\text{id}$, $D_0|\mathfrak{a}_2 = 2 \cdot \frac{1}{2}\text{id}$ なので, $\lambda = \frac{1}{2}$ に対して b) を満たす.

最後に c) を満たすことを確認する.

$\mathfrak{a}_1 = \{e_1, e_2\}$, $\mathfrak{a}_2 = e_3$ であるので, 歪対称写像 $J : \mathfrak{a}_1 \rightarrow \mathfrak{a}_1$ を e_1, e_2 に関する表現行列が以下を満たすように定める.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$t = 1$ なので β) 及び γ) を満たすことは自明であり, $J^2 = -\text{id}$ であるので α) を満たす. よって (iii), (iv) は対称空間である.

以上により次の定理を得る.

Theorem 5.2 ([5]). 4次元 SNC リー環の正規直交基底 e_1, e_2, e_3, e_4 を以下のいずれかを満たすように定めたとき対称空間となる.

- (1) $[e_4, e_1] = e_1$, $[e_4, e_2] = e_2$, $[e_4, e_3] = e_3$, 他が 0.
- (2) $[e_4, e_1] = e_1 + \beta e_2$, $[e_4, e_2] = -\beta e_1 + e_2$, $[e_4, e_3] = e_3$, $0 < \beta$, 他が 0.
- (3) $[e_4, e_1] = \frac{1}{2}e_1$, $[e_4, e_2] = \frac{1}{2}e_2$, $[e_4, e_3] = e_3$, $[e_1, e_2] = e_3$, 他が 0.
- (4) $[e_4, e_1] = \frac{1}{2}e_1 + \beta e_2$, $[e_4, e_2] = -\beta e_1 + \frac{1}{2}e_2$, $[e_4, e_3] = e_3$, $0 < \beta$, 他が 0.

特に, Heintze[2] の Proposition 4 から Theorem 5.2 の (1) と (2) で与えられる対称空間は $\mathbb{R}H^4$ であり, Theorem 5.2 の (3) と (4) で与えられる対称空間は $\mathbb{C}H^2$ である.

また, 5次元 SNC リー環の場合, Theorem 4.2 に分類される SNC リー環は条件 a) を満たさず, Theorem 4.3 に分類される SNC リー環は条件 c) を満たさないことから, Theorem 5.1(2) の条件を満たすものは導来環が可換の場合に限るので以下が成り立つ.

Theorem 5.3 ([5]). 5次元 SNC リー環の正規直交基底 e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 を以下のいずれかを満たすように定めたとき対称空間となる.

- (1) $[e_5, e_1] = e_1$, $[e_5, e_2] = e_2$, $[e_5, e_3] = e_3$, $[e_5, e_4] = e_4$, 他が 0.
- (2) $[e_5, e_1] = e_1$, $[e_5, e_2] = e_2$, $[e_5, e_3] = e_3 + \beta e_4$, $[e_5, e_4] = -\beta e_3 + e_4$, $0 < \beta$, 他が 0.
- (3) $[e_5, e_1] = e_1 + \beta e_2$, $[e_5, e_2] = -\beta e_1 + e_2$, $[e_5, e_3] = e_3 + \beta' e_4$, $[e_5, e_4] = -\beta' e_3 + e_4$, $0 < \beta, \beta'$, 他が 0.

特に, Heintze[2] の Proposition 4 から Theorem 5.3 で与えられる対称空間は $\mathbb{R}H^5$ である.

次に, Theorem 5.2 で与えられる対称空間のリーマン曲率テンソルについて考察する. Milnor[4] から Theorem 5.2 (1) で与えられる対称空間は曲率 -1 の定曲率となることが知られている. また, Theorem 5.2 (2) で与えられる対称空間の正規直交基底 e_1, e_2, e_3, e_4 に関して次が成り立つ.

$$\begin{aligned} R(e_1, e_2)e_3 &= R(e_2, e_3)e_1 = R(e_3, e_1)e_2 = R(e_1, e_2)e_4 = 0, \\ R(e_2, e_4)e_1 &= R(e_4, e_1)e_2 = R(e_1, e_4)e_3 = R(e_4, e_3)e_1 = 0, \\ R(e_3, e_1)e_4 &= R(e_4, e_2)e_3 = R(e_2, e_3)e_4 = R(e_3, e_4)e_2 = 0, \\ R(e_1, e_2)e_1 &= e_2, R(e_1, e_3)e_1 = e_3, R(e_1, e_4)e_1 = e_4, R(e_2, e_1)e_2 = e_1, \\ R(e_2, e_3)e_2 &= e_3, R(e_2, e_4)e_2 = e_4, R(e_3, e_1)e_3 = e_1, R(e_3, e_2)e_3 = e_2, \\ R(e_3, e_4)e_3 &= e_4, R(e_4, e_1)e_4 = e_1, R(e_4, e_2)e_4 = e_2, R(e_4, e_3)e_4 = e_3. \end{aligned}$$

特に, $R(X, Y)Z = -\{\langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y\}$ を満たすので曲率 -1 の定曲率対称空間となる. また, Cartan-Ambrose-Hicks theorem [3] より, Theorem 5.2 (1) 及び (2) の対称空間はリーマン多様体として等長的である.

次に Theorem 5.2 (3) 及び (4) で与えられる対称空間について考察する.

Theorem 5.2 (3) で与えられる対称空間の正規直交基底 e_1, e_2, e_3, e_4 に関して次が成り立つ.

$$\begin{aligned}
R(e_1, e_2)e_1 &= e_2, \quad R(e_1, e_3)e_1 = \frac{1}{4}e_3, \quad R(e_1, e_4)e_1 = \frac{1}{4}e_4, \quad R(e_2, e_1)e_2 = e_1, \\
R(e_2, e_3)e_2 &= \frac{1}{4}e_3, \quad R(e_2, e_4)e_2 = \frac{1}{4}e_4, \quad R(e_3, e_1)e_3 = \frac{1}{4}e_1, \quad R(e_3, e_2)e_3 = \frac{1}{4}e_2, \\
R(e_3, e_4)e_3 &= e_4, \quad R(e_4, e_1)e_4 = \frac{1}{4}e_1, \quad R(e_4, e_2)e_4 = \frac{1}{4}e_2, \quad R(e_4, e_3)e_4 = e_4, \\
R(e_1, e_2)e_3 &= -\frac{1}{2}e_4, \quad R(e_2, e_3)e_1 = \frac{1}{4}e_4, \quad R(e_3, e_1)e_2 = \frac{1}{4}e_4, \quad R(e_1, e_2)e_4 = \frac{1}{2}e_3, \\
R(e_2, e_4)e_1 &= -\frac{1}{4}e_3, \quad R(e_4, e_1)e_2 = -\frac{1}{4}e_3, \quad R(e_1, e_3)e_4 = \frac{1}{4}e_2, \quad R(e_3, e_4)e_1 = -\frac{1}{2}e_2, \\
R(e_4, e_1)e_3 &= -\frac{1}{4}e_2, \quad R(e_2, e_3)e_4 = -\frac{1}{4}e_1, \quad R(e_3, e_4)e_2 = \frac{1}{2}e_1, \quad R(e_4, e_2)e_3 = -\frac{1}{4}e_1.
\end{aligned}$$

Theorem 5.2 (4) で与えられる対称空間の正規直交基底 e_1, e_2, e_3, e_4 に関して次が成り立つ.

$$\begin{aligned}
R(e_1, e_2)e_1 &= e_2, \quad R(e_1, e_3)e_1 = \frac{1}{4}e_3, \quad R(e_1, e_4)e_1 = \frac{1}{4}e_4, \quad R(e_2, e_1)e_2 = e_1, \\
R(e_2, e_3)e_2 &= \frac{1}{4}e_3, \quad R(e_2, e_4)e_2 = \frac{1}{4}e_4, \quad R(e_3, e_1)e_3 = \frac{1}{4}e_1, \quad R(e_3, e_2)e_3 = \frac{1}{4}e_2, \\
R(e_3, e_4)e_3 &= e_4, \quad R(e_4, e_1)e_4 = \frac{1}{4}e_1, \quad R(e_4, e_2)e_4 = \frac{1}{4}e_2, \quad R(e_4, e_3)e_4 = e_4, \\
R(e_1, e_2)e_3 &= -\frac{1}{2}e_4, \quad R(e_2, e_3)e_1 = \frac{1}{4}e_4, \quad R(e_3, e_1)e_2 = \frac{1}{4}e_4, \quad R(e_1, e_2)e_4 = \frac{1}{2}e_3, \\
R(e_2, e_4)e_1 &= -\frac{1}{4}e_3, \quad R(e_4, e_1)e_2 = -\frac{1}{4}e_3, \quad R(e_1, e_3)e_4 = \frac{1}{4}e_2, \quad R(e_3, e_4)e_1 = -\frac{1}{2}e_2, \\
R(e_4, e_1)e_3 &= -\frac{1}{4}e_2, \quad R(e_2, e_3)e_4 = -\frac{1}{4}e_1, \quad R(e_3, e_4)e_2 = \frac{1}{2}e_1, \quad R(e_4, e_2)e_3 = -\frac{1}{4}e_1.
\end{aligned}$$

このことから, Theorem 5.2 (3) 及び (4) で与えられる対称空間は定曲率ではない. また各基底におけるリーマン曲率テンソルが等しいことから, Cartan-Ambrose-Hicks theorem [3] より, Theorem 5.2 (3) 及び (4) の対称空間はリーマン多様体として等長的である.

REFERENCES

- [1] T. Gotoh, H. Sugai, *SNC-algebras in dimension four*, Yokohama Mathematical Journal Vol. 68, 2022, 79-91.
- [2] E. Heintze, *On homogeneous manifolds of negative curvature*. Math. Ann. 211 (1974), 23-34.
- [3] N. Hicks, *A theorem on affine connexions*. Illinois J. Math. 3(2) (1959) 242-254.
- [4] J. Milnor, *Curvatures of left invariant metrics on Lie groups*. Advances in Math. 21 (1976), no. 3, 293-329.
- [5] H. Sugai, *Classification of SNC-algebras in dimension five*. arXiv: 2604. 24593v2 [math.DG]
- [6] J. Wolf, *Homogeneity and bounded isometries in manifolds of negative curvature*, Illinois Journal of Mathematics 8(1964), 14-18

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY, TOKYO UNIVERSITY OF SCIENCE,
NODA, CHIBA, 278-8510 JAPAN

Email address: 6125702@ed.tus.ac.jp

Almost splitting and quantitative stratification for super Ricci flow

櫻井 陽平 (埼玉大学理工学研究科)*

本講演ではRicci流の優解である優Ricci流 (super Ricci flow) の幾何解析についてお話しする. 特に國川慶太氏 (徳島大学) との共同研究 [30] で得られた, 優Ricci流に対するBamler [4] 型の概剛性定理を紹介する. 本予稿では, 優Ricci流の幾何解析の進展および主結果の設定 (Buzano [10] により導入された $\mathcal{D}$ -条件) の解説に重点を置く.

1. 導入

時間発展するRiemann計量を備えた滑らかな多様体 $(M, (g_t)_{t \in I})$ に対し, Hamilton [23] は **Ricci 流 (Ricci flow)** と呼ばれる計量に対する発展方程式

$$\partial_t g = -2 \operatorname{Ric}$$

を導入した. この幾何学流はPerelman [40], [41], [42] による3次元Poincaré予想の解決において中心的な役割を果たしたことで名高い. 以降もBrendle-Schoen [8] による可微分球面定理やBamler-Kleiner [5], [7] による一般化Smale予想といった, 幾何学における種々の問題の解決に貢献しており, 現在もなお発展を続けている.

Riemann計量がRicci流方程式の優解であるとき, すなわち不等式

$$\partial_t g \geq -2 \operatorname{Ric}$$

を満たすとき $(M, (g_t)_{t \in I})$ は **優Ricci流 (super Ricci flow)** と呼ばれる. 非負Ricci曲率の (時間に依存しない) Riemann多様体は優Ricci流であり, 特に優Ricci流はそのようなRiemann多様体の時間発展版としての側面を持つ. 優Ricci流の概念はMcCann-Topping [37] により導入された. 彼らはRicci流理論と最適輸送理論の関係性に着目し, 共役熱方程式に沿った L^2 -輸送評価により優Ricci流を特徴付けた. この結果はvon Renesse-Sturm [43] によるRicci曲率の非負性の特徴付けの時間依存版と見做せる. 彼らの研究を契機として, 優Ricci流は測度距離幾何, 特にSturm [44], [45], Lott-Villani [36], Ambrosio-Gigli-Savaré [1] らにより発展したRicci曲率の下からの有界性の概念を持つ測度付き距離空間 (以下, 測度距離空間) の理論における対象となっていくた.

一方, 優Ricci流はBamler [2], [3], [4] により確立されたRicci流に対する新たな収束理論においても重要な役割を果たす. 高次元Ricci流の特異点モデルを記述するという動機から, Bamler [3] はRicci流をより広い観点から研究する枠組みとして距離流, さらにその列に対する $\mathbb{F}$ -収束という概念を導入し, [4] において非崩壊Ricci流の列の $\mathbb{F}$ -極限の正則性を明らかにした. これはCheeger-Colding [14], [15], [16] の研究に端を発するRicci極限空間 (Ricci曲率が下に有界なRiemann多様体の列のGromov-Hausdorff極限空間) の構造理論の時間依存版としての側面を持っている.

2. 優Ricci流

本節では前節で述べた優Ricci流の幾何解析について, 前半では測度距離幾何の観点から, 後半では収束理論の観点から詳細を述べる.

* 〒338-8570 埼玉県さいたま市桜区下大久保255
e-mail: ysakurai@rimath.saitama-u.ac.jp

2.1. 測度距離幾何の観点

まず従来の（空間が時間依存でない場合の）測度距離幾何について簡潔に振り返る．Cheeger-Colding [14], [15], [16] による Ricci 極限空間の理論の確立以来，弱い意味での Ricci 曲率の下からの有界性の定式化は幾何解析における中心的話題の一つであった．Sturm [44], [45], Lott-Villani [36] は独立に最適輸送理論と呼ばれる手法を用いて，測度距離空間に対する**曲率次元条件** $\text{CD}(K, N)$ という性質を導入した．この性質は滑らかな Riemann 多様体上で通常の意味での Ricci 曲率の下からの有界性と同値であり，また測度付き Gromov-Hausdorff 収束下で安定という意味で適切な定式化を与えている．さらに Ambrosio-Gigli-Savaré [1] は，Finsler 空間を除外するという意味で，曲率次元条件に Sobolev 空間に対する**無限小 Hilbert 的**と呼ばれる性質を加味した **Riemann 的曲率条件** $\text{RCD}(K, N)$ という性質を導入した．現在では RCD 空間は Ricci 曲率の下からの有界性の概念を持つ測度距離空間としての適切な設定として広く認知されている．

前述の通り，McCann-Topping [37] は共役熱方程式に沿った L^2 -輸送評価により優 Ricci 流の特徴付けを与えた．その後，非負 Ricci 曲率に対して知られている種々の特徴付けが時間依存の場合に拡張され，時間発展する測度距離空間に対する優 Ricci 流の定式化の研究へと繋がっていった．ここで優 Ricci 流の特徴付けを述べるため，記号を導入する．時間発展する Riemann 計量を備えたコンパクト多様体 $(M, (g_t)_{t \in I})$ に対し，

$$h := -\frac{1}{2}\partial_t g, \quad \mathcal{H} := \text{tr } h$$

とおく．もし $(M, (g_t)_{t \in I})$ が Ricci 流ならば， h と $\mathcal{H}$ はそれぞれ Ricci テンソルとスカラー曲率である．また d_t, m_t, Δ_t をそれぞれ g_t に関する Riemann 距離関数，体積測度，ラプラシアンとする（添字 t は適宜省略する）．**熱作用素**および**共役熱作用素**が

$$\square := \partial_t - \Delta, \quad \square^* := -\partial_s - \Delta + \mathcal{H}$$

により定まる．時空の二点 $(x, t), (y, s) \in M \times I$ ($s < t$) に対し， $G(x, t; y, s)$ により**熱核**，すなわち第二変数 $(y, s) \in M \times I$ を固定したとき

$$\square G(\cdot, \cdot; y, s) = 0, \quad \lim_{t \searrow s} G(\cdot, t; y, s) = \delta_y$$

により決まるものを表す．ここで第一変数 $(x, t) \in M \times I$ を固定した場合， $G(x, t; \cdot, \cdot)$ は共役熱方程式の基本解であることに注意する：

$$\square^* G(x, t; \cdot, \cdot) = 0, \quad \lim_{s \nearrow t} G(x, t; \cdot, s) = \delta_x.$$

また時空の点 $(x, t) \in M \times I$ に対し，**共役熱核測度** $(\nu_{(x,t);s})_{s \in (-\infty, t] \cap I}$ は

$$\nu_{(x,t);s} := G(x, t; \cdot, s) m_s \quad (s < t), \quad \nu_{(x,t);t} := \delta_x$$

により定まる Borel 確率測度（の族）である．さらに関数 $u \in C^0(M)$ に作用する**熱流** $P_{t,s}$ および Borel 確率測度 $\mu \in \mathcal{P}(M)$ に作用する**共役熱流** $\hat{P}_{t,s}$ が

$$P_{t,s}u := \int_M u d\nu_{(\cdot,t);s}, \quad \int_M P_{t,s}u d\mu = \int_M u d(\hat{P}_{t,s}\mu)$$

により定まる．最適輸送理論における概念として， $p \in [1, \infty)$ に対し $\mathcal{P}(M)$ 上の（時刻 t における） L^p -Wasserstein 距離が

$$W_{p,t}(\mu, \nu) := \inf_{\pi} \left(\int_{M \times M} d_t^p(x, y) d\pi(x, y) \right)^{1/p}$$

により定まる．ここで下限は μ と ν の間のカップリング π 全体に渡ってとる．Borel 確率測度 $\mu \in \mathcal{P}(M)$ に対し，Boltzmann エントロピーが以下で定まる：

$$\text{Ent}_t(\mu) := \begin{cases} \int_{\{\rho>0\}} \rho \log \rho dm_t & \text{if } \mu = \rho m_t; \\ +\infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

優 Ricci 流の特徴付けの一部を以下に纏める：

定理 1 ([37], [46]). 以下は同値である：

(SRF 1) $(M, (g_t)_{t \in I})$ は優 Ricci 流；

(SRF 2) 勾配評価：任意の $s, t \in I$ ($s \leq t$) および $u \in C^\infty(M)$ に対し，

$$|\nabla P_{t,s} u|^2 \leq P_{t,s} |\nabla u|^2;$$

(SRF 3) 輸送評価：任意の $s, t \in I$ ($s \leq t$) および $\mu, \nu \in \mathcal{P}(M)$ に対し，

$$W_{2,s}(\hat{P}_{t,s}\mu, \hat{P}_{t,s}\nu) \leq W_{2,t}(\mu, \nu);$$

(SRF 4) エントロピーの凸性：任意の $t \in I$ および $W_{2,t}$ -測地線 $(\mu_\eta)_{\eta \in [0,1]}$ に対し，

$$\partial_\eta^+ \text{Ent}_t(\mu_{1-}) - \partial_\eta^- \text{Ent}_t(\mu_{0+}) \geq -\frac{1}{2} \partial_t^- W_{2,t-}^2(\mu_0, \mu_1).$$

特徴付け (SRF3) は McCann-Topping [37] による．Sturm [46] は $\mathcal{P}(M)$ 上のエントロピーの動的凸性による特徴付け (SRF4) を得ている．これは von Renesse-Sturm [43] による Ricci 曲率の非負性のエントロピーの凸性による特徴付けの時間依存版と見做せる．また Haslhofer-Naber [24], Li-Li [34] は勾配評価による特徴付け (SRF2) や log-Sobolev 不等式，Poincaré 不等式といった関数不等式による特徴付けを与えている．

特徴付け (SRF4) に基づき，Sturm [46] は時間発展する測度距離空間 $(X, (d_t)_{t \in I}, (\mathbf{m}_t)_{t \in I})$ に対して優 Ricci 流の概念を定義した．ここで X は Polish 空間， $(d_t)_{t \in I}$ は X 上の時間発展する測地的距離関数で X の位相を生成するもの， $(\mathbf{m}_t)_{t \in I}$ は X 上の時間発展する Borel 測度で互いに絶対連続であるものを表す．さらに Kopfer-Sturm [28] は $(X, (d_t)_{t \in I}, (\mathbf{m}_t)_{t \in I})$ に対し，以下の正則性に関する仮定のもとで，熱流 $P_{t,s}$ および共役熱流 $\hat{P}_{t,s}$ の存在性と一意性を証明し，上記の定理 1 を測度距離空間の枠組みにまで拡張している：

- $(d_t)_{t \in I}$ および $(\mathbf{m}_t)_{t \in I}$ が “一様 log-Lipschitz 評価” を満たす；
- 各時刻スライス $(X, d_t, \mathbf{m}_t)$ が $\text{RCD}(K, N)$ 条件を満たす．

同様の設定のもと [29], [27] では, log-Sobolev 不等式, Poincaré 不等式, Harnack 不等式, 後ろ向き Brown 運動の収縮評価による特徴付けも与えられている. また特徴付けに関する研究のほか, Li [33] により時間発展する測度距離空間において, Perelman [40], Ni [39] 型の $\mathcal{W}$ -エントロピー公式が得られている.

最近では上述の優 Ricci 流の研究を基に, 時間発展する測度距離空間に対して Ricci 流の概念を定式化する試みが為されている (サーベイ [19] を参照). まず Haslhofer-Naber [24] は時間発展する Riemann 多様体に対し, 確率解析における Wiener 測度を備えた道の空間上の関数不等式により Ricci 流の特徴付けを与えている. Erbar-Li-Schultz [18] は時間発展する測度距離空間に対し, **弱 Ricci 流** を優 Ricci 流かつ劣 Ricci 流という条件により定めている. ここで劣 Ricci 流は Ricci 流の劣解を意味し, 時間発展する測度距離空間においてはエントロピーの動的概凹性により定義される. 彼らは時間発展する Riemann 多様体において, 弱 Ricci 流と通常の Ricci 流の同値性を示している. 一方, Flaim-Hupp-Sturm [21] は同じく時間発展する測度距離空間に対し, **極小優 Ricci 流** という異なる定式化を与えている. 優 Ricci 流が極小であるとは, とある Gaussian 積分量の初期スロープが非正といった条件である. これは閉 Riemann 多様体上で Ricci 平坦性が非負 Ricci 曲率かつスカラー曲率積分の非正性と同値であり, スカラー曲率積分は Gaussian 積分量の初期スロープで表されるという考察に基づく. 彼らは同じく時間発展する Riemann 多様体において, 極小優 Ricci 流と通常の Ricci 流の同値性を示し, また球面懸垂上で極小優 Ricci 流の例を構成している. 優 Ricci 流の定義が若干異なるが, Lakzian [31] も同様に Ricci 流の定式化の一つを与えている.

Kleiner-Lott [26], Bamler-Kleiner [6] は 3 次元の場合に Perelman の手術付き Ricci 流のある種の改良版と見做せる **特異 Ricci 流 (singular Ricci flow through singularity)** を構成し (例えば初期計量に対する一意性や連続性が成立), 前節の冒頭で挙げた一般化 Smale 予想の解決等に応用している. 特異空間に対する Ricci 流の概念の定式化を試みることで, 高次元 Ricci 流を用いた位相幾何的結果の導出等への還元が期待される.

2.2. 収束理論の観点

次に Bamler [2], [3], [4] による収束理論を概観する. まず $I \subset \mathbb{R}$ 上の **距離流 (metric flow)** とは四つ組 $(\mathcal{X}, \mathbf{t}, (d_t)_{t \in I}, (\nu_{\mathbf{x};s})_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}, s \in (-\infty, \mathbf{t}(\mathbf{x})] \cap I})$ で, 以下を満たすものである:

- $\mathcal{X}$ は集合, $\mathbf{t} : \mathcal{X} \rightarrow I$ は写像であり **時刻関数** と呼ばれる. また各 $t \in I$ に対し $\mathcal{X}_t := \mathbf{t}^{-1}(t)$ は **時刻スライス** と呼ばれる;
- 各 $t \in I$ に対し $(\mathcal{X}_t, d_t)$ は完備可分距離空間である;
- 任意の $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ および $s \in (-\infty, \mathbf{t}(\mathbf{x})] \cap I$ に対して $\nu_{\mathbf{x};s} \in \mathcal{P}(\mathcal{X}_s)$ かつ $\nu_{\mathbf{x};\mathbf{t}(\mathbf{x})} = \delta_{\mathbf{x}}$ であり **共役熱核測度** と呼ばれる;
- 任意の $t_1, t_2, t_3 \in I$ ($t_1 \leq t_2 \leq t_3$), $\mathbf{x} \in \mathcal{X}_{t_3}$ に対し, 次の **再生公式** が成り立つ:

$$\nu_{\mathbf{x};t_1} = \int_{\mathcal{X}_{t_2}} \nu_{\cdot;t_1} d\nu_{\mathbf{x};t_2};$$

- 勾配評価: 任意の $s, t \in I$ ($s < t$), $T > 0$ および $u_s : \mathcal{X}_s \rightarrow (0, 1)$ である $T^{-1/2}$ -Lipschitz 関数 $\phi_s : \mathcal{X}_s \rightarrow \mathbb{R}$ により $u_s = \Phi \circ \phi_s$ と表せるものに対し, 次が成立:

$$u_t : \mathcal{X}_t \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} \longmapsto \int_{\mathcal{X}_s} u_s d\nu_{\mathbf{x};s}$$

はある $(t - s + T)^{-1/2}$ -Lipschitz 関数 $\phi_t : \mathcal{X}_t \rightarrow \mathbb{R}$ により $u_t = \Phi \circ \phi_t$ と表せる．ここで $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow (0, 1)$ は Gaussian の分布関数である．

さらに $H \geq 0$ に対し，距離流 $\mathcal{X}$ は任意の $s, t \in I$ ($s \leq t$) および $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{X}_t$ に対し

$$\text{Var}(\nu_{\mathbf{x};s}, \nu_{\mathbf{y};s}) \leq d_t^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + H(t - s)$$

を満たすとき **H -集中**であるという．左辺は確率測度 $\nu_{\mathbf{x};s}$ と $\nu_{\mathbf{y};s}$ の間の**分散**を表す．この H -集中性により，例えば任意の $\mathbf{x} \in \mathcal{X}_t$ に対し過去の時刻 s における共役熱核測度の **H -中心点**の存在が保証される．

Bamler [3] は優 Ricci 流について次を示した：

定理 2 ([3]). n 次元コンパクト優 Ricci 流 $(M, (g_t)_{t \in I})$ は H_n -集中距離流と見做せる．ただし $H_n := ((n - 1)\pi^2)/2 + 4$ である．

注意 1. 定理 2 では，次のようにおくことで $(M, (g_t)_{t \in I})$ を距離流と見做している：

$$\mathcal{X} := M \times I, \quad \mathbf{t} := \text{proj}^I, \quad d_t := d_t, \quad \nu_{(x,t);s} := G(x, t; \cdot, s) m_s.$$

また [2] では n 次元コンパクト優 Ricci 流に対し，距離流の定義における熱方程式の解に対する勾配評価と H_n -集中性が示されており，定理 2 はそれらより直ちに従う．

次に $\mathbb{F}$ -収束について述べる．区間 $I \subset \mathbb{R}$ で最大値 $t_0 := \max I$ を持つものに対し，組 $(\mathcal{X}, (\mu_t)_{t \in J})$ は以下の条件を満たすとき I 上の**距離流ペア**という：

- $J \subset I$ は $|I \setminus J| = 0$ を満たす；
- $\mathcal{X}$ は J 上の距離流である；
- $(\mu_t \in \mathcal{P}(\mathcal{X}_t))_{t \in J}$ は**共役熱流**，すなわち任意の $s, t \in J$ ($s \leq t$) に対し次を満たす：

$$\mu_s = \int_{\mathcal{X}_t} \nu_{\mathbf{x};s} d\mu_t(\mathbf{x}).$$

共役熱流 $(\mu_t \in \mathcal{P}(\mathcal{X}_t))_{t \in J}$ は $\mathbb{F}$ -収束において“基点”としての役割を果たす．区間 I 上の距離流ペアの“等長”類全体からなる集合を $\mathbb{F}_I$ で表す（最終時刻 t_0 では一様に定義されているとする）．Bamler [3] は $\mathbb{F}_I$ 上に $\mathbb{F}$ -距離 $d_{\mathbb{F}}$ を導入し， $(\mathbb{F}_I, d_{\mathbb{F}})$ が完備距離空間となることを示した（ $d_{\mathbb{F}}$ は無限大も許容する）．距離 $d_{\mathbb{F}}$ の詳細は割愛するが，この距離に関する収束がほとんど全ての時刻の時刻スライス $(\mathcal{X}_t, d_t, \mu_t)$ の **L^1 -Gromov-Wasserstein 収束**を導くように定式化される（測度距離幾何の文脈で“ L^2 ”-Wasserstein 距離が用いられるのとは対照的である）．さらに [3] では $(\mathbb{F}_I, d_{\mathbb{F}})$ 内の適切なコンパクト集合が導入された．実数 $H, V \geq 0, r > 0$ および $b : (0, 1] \rightarrow (0, 1]$ に対し，以下を満たす距離流ペア $(\mathcal{X}, (\mu_t)_{t \in J})$ に代表される“等長”類全体からなる集合を $\mathbb{F}_I(H, V, b, r) \subset \mathbb{F}_I$ で表す：

- $\mathcal{X}$ は H -集中である；
- $(\mathcal{X}_{t_0}, d_{t_0}, \mu_{t_0}) \in \mathbb{M}_r(V, b)$ (i.e., $\text{Var}(\mu_{t_0}) \leq Vr^2$ かつ $b_r^{(\mathcal{X}_{t_0}, d_{t_0}, \mu_{t_0})} \geq b$)．

ここで $b_r^{(\mathcal{X}_{t_0}, d_{t_0}, \mu_{t_0})} : (0, 1] \rightarrow (0, 1]$ は測度距離空間 $(\mathcal{X}_{t_0}, d_{t_0}, \mu_{t_0})$ のスケール $r > 0$ の**測度分布関数**と呼ばれるものであり， $\mathbb{M}_r(V, b)$ は L^1 -Gromov-Hausdorff 距離を備えた（確率）測度距離空間の等長類全体からなる集合内のコンパクト集合である．

Bamler [3] は次のコンパクト性定理を証明した：

定理 3 ([3]). $\mathbb{F}_I(H, V, b, r)$ は $(\mathbb{F}_I, d_{\mathbb{F}})$ のコンパクト部分集合である.

定理 2 と 3 を組み合わせることで, 優 Ricci 流に対するプレコンパクト性が得られる.

プレコンパクト性に基づき, Bamler [4] は非崩壊 Ricci 流の列の $\mathbb{F}$ -極限の正則性を明らかにした. 非崩壊性は Nash エントロピーの言葉で定式化される. 時間発展する計量を備えた n -次元コンパクト多様体 $(M, (g_t)_{t \in I})$ に対し, 時空の点 $(x_0, t_0) \in M \times I$ を固定する. 正の数 $\tau > 0$ で $[t_0 - \tau, t_0] \subset I$ を満たすものに対し, **Nash エントロピー** が

$$\mathcal{N}_{(x_0, t_0)}(\tau) := \int_M f d\nu_{(x_0, t_0); t_0 - \tau} - \frac{n}{2}$$

で定まる. ここで $f \in C^\infty(M \times ((-\infty, t_0) \cap I))$ は熱核の密度関数として以下で定まる:

$$G(x_0, t_0; \cdot, t) = (4\pi(t_0 - t))^{-n/2} e^{-f(\cdot, t)}.$$

基点付き n -次元コンパクト Ricci 流の列 $(M^i, (g_t^i)_{t \in (-T^i, 0]}, (x_0^i, 0))$ ($T^i \rightarrow T^\infty$) を考える. さらにある $\theta > 0$ および $\kappa > 0$ に対し, 非崩壊条件 $\mathcal{N}_{(x_0^i, 0)}(\theta) \geq -\kappa$ を仮定する. 定理 3 より部分列をとることで, ある H_n -集中距離流 $\mathcal{X}$ に対し

$$\left(M^i, (g_t^i)_{t \in (-T^i, 0]}, (\nu_{(x_0^i, 0); t})_{t \in (-T^i, 0]} \right) \xrightarrow[i \rightarrow +\infty]{\mathbb{F}} (\mathcal{X}, (\nu_{\mathbf{x}_0; t})_{t \in (-T^\infty, 0]})$$

としてよい. 極限 $\mathcal{X}$ の構造定理の一部を以下に纏める:

定理 4 ([4]). 上記の設定のもと, $\mathcal{X}$ に対し正則集合 $\mathcal{R}$ および特異集合 $\mathcal{S}$ による分解 $\mathcal{X} = \mathcal{R} \sqcup \mathcal{S}$ が存在し, 以下が成り立つ:

- $\mathcal{R}$ は Ricci 流時空の構造を持ち, また $\mathcal{X}$ 上の自然な位相に関して稠密である;
- 任意の接流は距離ソリトンである;
- $\dim_{\mathcal{H}} \mathcal{S} \leq (n - 4) + 2$;
- $\mathcal{S}$ に対し階層構造が存在する: $\mathcal{S}^0 \subset \mathcal{S}^1 \subset \dots \subset \mathcal{S}^{n-2} = \mathcal{S}$, $\dim_{\mathcal{H}} \mathcal{S}^k \leq k$.

注意 2. 定理 4 は Ricci 極限空間に対する諸性質のアナロジーと見做せる. 第一項目について, **Ricci 流時空 (Ricci flow spacetime)** は Kleiner-Lott [26], Bamler-Kleiner [6] により導入された概念で, 先述の特異 Ricci 流のベースとなる. 第二項目について, **接流 (tangent flow)** は放物型リスケーリングに関するブローアップ $\mathbb{F}$ -極限を意味し, **距離ソリトン (metric soliton)** は距離流の枠組みにおける縮小 Ricci ソリトンの一般化概念である. 第三項目について, $\dim_{\mathcal{H}}$ は**放物版 Hausdorff 次元**を表す.

3. 優 Ricci 流のとあるクラス

本節では Buzano [10] により導入された優 Ricci 流のとあるクラスを紹介する.

3.1. $\mathcal{D}$ -条件

時間発展する計量を備えたコンパクト多様体 $(M, (g_t)_{t \in I})$ に対し, Buzano [10] は微分量

$$\mathcal{D}(V) := \partial_t \mathcal{H} - \Delta \mathcal{H} - 2|h|^2 + 4 \operatorname{div} h(V) - 2 \langle \nabla \mathcal{H}, V \rangle + 2 \operatorname{Ric}(V, V) - 2h(V, V)$$

を導入し、条件 $\mathcal{D} \geq 0$ を満たす幾何学流の性質を調べた．例えば Ricci 流に対し、スカラー曲率の発展方程式と縮約版第二 Bianchi 恒等式より $\mathcal{D}$ は消える．また条件 $\mathcal{D} \geq 0$ を満たすならば優 Ricci 流である．実際 $\lambda > 0$ に対し、 $\mathcal{D}$ の非斉次性に注意すると

$$\begin{aligned} 0 \leq \lambda^{-2} \mathcal{D}(\lambda V) &= \lambda^{-2} (\partial_t \mathcal{H} - \Delta \mathcal{H} - 2|h|^2) \\ &\quad + \lambda^{-1} (4 \operatorname{div} h(V) - 2\langle \nabla \mathcal{H}, V \rangle) + 2 \operatorname{Ric}(V, V) - 2h(V, V) \end{aligned}$$

であり、 $\lambda \rightarrow \infty$ とすると優 Ricci 流の不等式が得られる．纏めると包含関係

$$\{\{\text{Ricci 流}\} \cup \{(\text{時間依存でない}) \operatorname{Ric} \geq 0\}\} \subset \{\mathcal{D} \geq 0\} \subset \{\text{優 Ricci 流}\}$$

が得られる．条件 $\mathcal{D} \geq 0$ を満たす幾何学流の例として、非負 Ricci 曲率の Riemann 多様体および Ricci 流以外では以下が知られている：

- Ricci 流と熱方程式の混合流 (List [32])；
- Ricci 流と調和写像流の混合流 (Buzano [11])；
- 非負断面曲率の Lorentz 多様体内の空間的超曲面に対する平均曲率流；
- 捩れ Kähler-Ricci 流．

Perelman [40] は Ricci 流に沿った $\mathcal{W}$ -汎関数および簡約体積に対する単調性や Harnack 評価を開発したが、[10], [23], [22], [13] 等において条件 $\mathcal{D} \geq 0$ を満たす幾何学流に拡張された．また Topping [47], Lott [35] は Perelman [40] の L -距離をコストとする $\mathcal{L}$ -最適輸送を導入した．Ricci 流に対し [47] では $\mathcal{L}$ -Wasserstein 距離の単調性、[35] ではエントロピーの凸性が示されている．これらも [23] でより一般の幾何学流に拡張された．

最近 Flaim-Hupp [20] は条件 $\mathcal{D} \geq 0$ に関する包括的研究を行い、この条件の幾何学的解釈と定理 1 に類する種々の特徴付けを与えている．本小節の残りでそれらを紹介していくが、(例えば Perelman [40] の $\mathcal{L}$ -幾何と同様に) ここでは逆向き時間パラメーター τ を採用する．時間発展する計量を備えた n 次元コンパクト多様体 $(M, (g_\tau)_{\tau \in (\tau_1, \tau_2) \subset [0, \infty)})$ に対し、Perelman [40] は次の $(n+1+L)$ -次元 Riemannian 多様体 $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ を導入した：

$$\widetilde{M} := M \times (\tau_1, \tau_2) \times \mathbb{S}^L, \quad \widetilde{g} := (g_\tau)_{ij} dx^i dx^j + \left(\mathcal{H} + \frac{L}{2\tau} \right) d\tau^2 + \tau (g_{\mathbb{S}^L})_{\alpha\beta} dy^\alpha dy^\beta.$$

さらに $(M, (g_\tau)_{\tau \in (\tau_1, \tau_2)})$ が逆向き Ricci 流の場合、 $L \rightarrow \infty$ として $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ は漸近的に Ricci 平坦であることを指摘している．この考察および $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ 上の Bishop-Gromov の単調性を念頭に、Perelman [40] は簡約体積の単調性を導出している．

条件 $\mathcal{D} \geq 0$ について、[20] では“無限次元”Riemann 多様体 $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ 上の Ricci 曲率の漸近的非負性という解釈が与えられている：

命題 5 ([20]). 以下は同値である：

- $(M, (g_\tau)_{\tau \in (\tau_1, \tau_2)})$ は $\mathcal{D} \geq 0$ を満たす；
- $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ は $\operatorname{Ric} \geq O(L^{-1})$ を満たす ($L \rightarrow \infty$) ．

注意 3. “無限次元” Riemann 多様体 $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ については, 近年いくつかの興味深い研究が行われている. Cavezas-Rivas-Haslhofer [12] は $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ に対して Naber [38] による Ricci 曲率の両側有界性の特徴付けを適用することにより, 先述の Haslhofer-Naber [24] による Ricci 流の特徴付けを導出している. また Bustamante-Reiris [9] は $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ に対して, 非負 Ricci 曲率の Riemann 多様体上の Green 関数に対する Colding [17] の単調性を適用することにより, $\mathcal{W}$ -汎函数の単調性を導出している.

特徴付けであるが, 先述の $\mathcal{L}$ -最適輸送の言葉で与えられる. $\mathcal{L}$ -最適輸送に関する用語を手短に振り返る. 時間発展する計量を備えた n 次元コンパクト多様体 $(M, (g_\tau)_{\tau \in J \subset [0, \infty)})$ を考える. 曲線 $\gamma: [\tau, \sigma] \rightarrow M$ に対し, $\mathcal{L}$ -弧長は次で与えられる:

$$\mathcal{L}(\gamma) := \int_{\tau}^{\sigma} \sqrt{\eta} (|\dot{\gamma}|^2 + \mathcal{H}) d\eta.$$

時空の二点 $(x, \tau), (y, \sigma) \in M \times J$ ($\tau < \sigma$) に対し, その L -距離が

$$L^{\tau, \sigma}(x, y) := \inf_{\gamma} \mathcal{L}(\gamma)$$

により定義される. ただし下限は曲線 $\gamma: [\tau, \sigma] \rightarrow M$ で $\gamma_\tau = x$ および $\gamma_\sigma = y$ をみすもの全体に渡ってとる. さらに確率測度 $\mu, \nu \in \mathcal{P}(M)$ に対し, $\mathcal{L}$ -Wasserstein 距離が

$$W_{L^{\tau, \sigma}}(\mu, \nu) := \inf_{\pi} \int_{M \times M} L^{\tau, \sigma}(x, y) d\pi(x, y)$$

により定義される. ここで下限は μ と ν の間のカップリング π 全体に渡ってとる.

定理 1 に対応する形で, Flaim-Hupp [20] は条件 $\mathcal{D} \geq 0$ に対し次の特徴付けを示した:

定理 6 ([20]). 以下は同値である:

(D1) $(M, (g_\tau)_{\tau \in J})$ は $\mathcal{D} \geq 0$ を満たす;

(D2) 勾配評価: 任意の $\tau, \sigma \in J$ ($\tau \leq \sigma$) および $u \in C^\infty(M)$ に対し,

$$|\nabla P_{\tau, \sigma} u|^2 - 2\tau \Delta P_{\tau, \sigma} u - \tau^2 \mathcal{H} \leq P_{\tau, \sigma} (|\nabla u|^2 - 2\sigma \Delta u - \sigma^2 \mathcal{H}) + \frac{n}{2}(\sigma - \tau);$$

(D3) 輸送評価: 任意の $\tau, \sigma \in J$ ($\tau < \sigma$), $\mu, \nu \in \mathcal{P}(M)$ および $\alpha > 1$ に対し,

$$\sqrt{\alpha} W_{L^{\alpha\tau, \alpha\sigma}}(\widehat{P}_{\tau, \alpha\tau} \mu, \widehat{P}_{\sigma, \alpha\sigma} \nu) \leq W_{L^{\tau, \sigma}}(\mu, \nu) + n(\alpha - 1)(\sqrt{\sigma} - \sqrt{\tau});$$

(D4) エントロピーの凸性: 任意の $\tau, \sigma \in J$ ($\tau < \sigma$), $\mu_\tau, \mu_\sigma \in \mathcal{P}(M)$ および $W_{L^{\tau, \sigma}}$ -測地線 $(\mu_\eta)_{\eta \in [\tau, \sigma]}$ に対し, 以下は変数 $\eta^{-1/2}$ について凸である:

$$\eta \mapsto \text{Ent}_\eta(\mu_\eta) - \text{Ent}_\tau(\mu_\tau) + \frac{1}{2\sqrt{\eta}} W_{L^{\tau, \eta}}(\mu_\tau, \mu_\eta) + \frac{n}{2} \log \left(\frac{\eta}{\tau} \right).$$

3.2. 主結果の概要

Bamler [4] による非崩壊 Ricci 流の列の $\mathbb{F}$ -極限の正則性の証明の要点の一つは, Nash エントロピーの単調性に関する概剛性を調べることである. 國川氏との共同研究 [30] では, それらの概剛性定理を条件 $\mathcal{D} \geq 0$ を満たす幾何学流に対して拡張した. また [4] における議論を精査する中で, Ricci 流に対しても新しい知見として, スカラー曲率に纏わるとある積分量の概恒等定理を得た. これは [4] においてアприオリに得られるか不明と言及されていた主張である. 講演ではこれらの詳細を述べる予定である.

参考文献

- [1] L. Ambrosio, N. Gigli and G. Savaré, *Metric measure spaces with Riemannian Ricci curvature bounded from below*, Duke Math. J. **163** (2014), no. 7, 1405–1490.
- [2] R. H. Bamler, *Entropy and heat kernel bounds on a Ricci flow background*, preprint arXiv:2008.07093v3.
- [3] R. H. Bamler, *Compactness theory of the space of Super Ricci flows*, Invent. Math. **233** (2023), no. 3, 1121–1277.
- [4] R. H. Bamler, *Structure theory of non-collapsed limits of Ricci flows*, preprint arXiv:2009.03243v2.
- [5] R. H. Bamler and B. Kleiner, *Ricci flow and contractibility of spaces of metrics*, preprint arXiv:1909.08710.
- [6] R. H. Bamler and B. Kleiner, *Uniqueness and stability of Ricci flow through singularities*, Acta Math. **228** (2022), no. 1, 1–215.
- [7] R. H. Bamler and B. Kleiner, *Ricci flow and diffeomorphism groups of 3-manifolds*, J. Amer. Math. Soc. **36** (2023), no. 2, 563–589.
- [8] S. Brendle and R. Schoen, *Manifolds with $1/4$ -pinched curvature are space forms*, J. Amer. Math. Soc. **22** (2009), no. 1, 287–307.
- [9] I. Bustamante and M. Reiris, *Deriving Perelman’s entropy from Colding’s monotonic volume*, J. Reine Angew. Math. **826** (2025), 23–43.
- [10] R. Buzano, *Monotone volume formulas for geometric flows*, J. Reine Angew. Math. **643** (2010), 39–57.
- [11] R. Buzano, *Ricci flow coupled with harmonic map flow*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **45** (2012), no. 1, 101–142.
- [12] E. Cabezas-Rivas and R. Haslhofer, *Brownian motion on Perelman’s almost Ricci-flat manifold*, J. Reine Angew. Math. **764** (2020), 217–239.
- [13] X. Cao, H. Guo and H. Tran, *Harnack estimates for conjugate heat kernel on evolving manifolds*, Math. Z. **281** (2015), no. 1-2, 201–214.
- [14] J. Cheeger and T. H. Colding, *On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below. I*, J. Differential Geom. **46** (1997), no. 3, 406–480.
- [15] J. Cheeger and T. H. Colding, *On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below. II*, J. Differential Geom. **54** (2000), no. 1, 13–35.
- [16] J. Cheeger and T. H. Colding, *On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below. II*, J. Differential Geom. **54** (2000), no. 1, 37–74.
- [17] T. H. Colding, *New monotonicity formulas for Ricci curvature and applications. I*, Acta Math. **209** (2012), no. 2, 229–263.
- [18] M. Erbar, Z. Li and T. Schultz, *Synthetic notions of Ricci flow for metric measure spaces*, preprint arXiv:2501.07175.
- [19] M. Erbar, M. Flaim, E. Hupp, Z. Li, T. Schultz and K.-T. Sturm, *Synthetic approaches to Ricci flows*, preprint arXiv:2511.11477.
- [20] M. Flaim and E. Hupp, *On a parabolic curvature lower bound generalizing Ricci flows*, preprint arXiv:2507.05032v2.
- [21] M. Flaim, E. Hupp and K.-T. Sturm, *Gaussian volume functional, integral scalar curvature, and minimal super-Ricci flows*, preprint arXiv:2603.18942.
- [22] H. Guo, R. Philipowski and A. Thalmaier, *Entropy and lowest eigenvalue on evolving manifolds*, Pacific J. Math. **264** (2013), no. 1, 61–81.
- [23] R. S. Hamilton, *Three-manifolds with positive Ricci curvature*, J. Differential Geometry **17** (1982), no. 2, 255–306.

- [24] R. Haslhofer and A. Naber, *Characterizations of the Ricci flow*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **20** (2018), no. 5, 1269–1302.
- [25] H. Huang, *Optimal transportation and monotonic quantities on evolving manifolds*, Pacific J. Math. **248** (2010), no. 2, 305–316.
- [26] B. Kleiner and J. Lott, *Singular Ricci flows I*, Acta Math. **219** (2017), no. 1, 65–134.
- [27] E. Kopfer, *Super-Ricci flows and improved gradient and transport estimates*, Probab. Theory Related Fields **175** (2019), no. 3-4, 897–936.
- [28] E. Kopfer and K.-T. Sturm, *Heat flow on time-dependent metric measure spaces and super-Ricci flows*, Comm. Pure Appl. Math. **71** (2018), no. 12, 2500–2608.
- [29] E. Kopfer and K.-T. Sturm, *Functional inequalities for the heat flow on time-dependent metric measure spaces*, J. Lond. Math. Soc. (2) **104** (2021), no. 2, 926–955.
- [30] K. Kunikawa and Y. Sakurai, *Almost splitting and quantitative stratification for super Ricci flow*, Comm. Anal. Geom. **34** (2026), no. 1, 115–183.
- [31] S. Lakzian, *On weak formulations of (super) Ricci flows*, Comm. Anal. Geom. **34** (2026), no. 1, 233–260.
- [32] B. List, *Evolution of an extended Ricci flow system*, Comm. Anal. Geom. **16** (2008), no. 5, 1007–1048.
- [33] X.-D. Li, *On Perelman’s W -entropy and Shannon entropy power for super Ricci flows on metric measure spaces*, preprint arXiv:2505.03202.
- [34] S. Li and X.-D. Li, *W -entropy, super Perelman Ricci flows, and (K, m) -Ricci solitons*, J. Geom. Anal. **30** (2020), no. 3, 3149–3180.
- [35] J. Lott, *Optimal transport and Perelman’s reduced volume*, Calc. Var. Partial Differential Equations **36** (2009), no. 1, 49–84.
- [36] J. Lott and C. Villani, *Ricci curvature for metric-measure spaces via optimal transport*, Ann. of Math. (2) **169** (2009), no. 3, 903–991.
- [37] R. J. McCann and P. M. Topping, *Ricci flow, entropy and optimal transportation*, Amer. J. Math. **132** (2010), no. 3, 711–730.
- [38] A. Naber, *Characterizations of Bounded Ricci Curvature on Smooth and NonSmooth Spaces*, preprint arXiv:1306.6512v4.
- [39] L. Ni, *The entropy formula for linear heat equation*, J. Geom. Anal. **14** (2004), no. 1, 87–100.
- [40] G. Perelman, *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*, preprint arXiv:math/0211159.
- [41] G. Perelman, *Ricci flow with surgery on three-manifolds*, preprint arXiv:math/0303109.
- [42] G. Perelman, *Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds*, preprint arXiv:math/0307245.
- [43] M.-K. von Renesse and K.-T. Sturm, *Transport inequalities, gradient estimates, entropy, and Ricci curvature*, Comm. Pure Appl. Math. **58** (2005), no. 7, 923–940.
- [44] K.-T. Sturm, *On the geometry of metric measure spaces. I*, Acta Math. **196** (2006), no. 1, 65–131.
- [45] K.-T. Sturm, *On the geometry of metric measure spaces. II*, Acta Math. **196** (2006), no. 1, 133–177.
- [46] K.-T. Sturm, *Super-Ricci flows for metric measure spaces*, J. Funct. Anal. **275** (2018), no. 12, 3504–3569.
- [47] P. Topping, *$\mathcal{L}$ -optimal transportation for Ricci flow*, J. Reine Angew. Math. **636** (2009), 93–122.

On the Classification of Vaisman Manifolds with Vanishing First Basic Chern Class

Lucas H. S. Gomes

大阪大学理学研究科

1 導入

(M, J, ω) をコンパクトかつ連結なエルミート多様体とし、 $\dim_{\mathbb{C}} M \geq 2$ を仮定する。ある 1 次閉微分形式 θ (Lee 形式という) で $d\omega = \theta \wedge \omega$ をみたすものが存在するときは、 (J, ω, θ) が LCK (locally conformally Kähler の略) 構造と呼ばれる。

非完全 Lee 形式付きのコンパクトな LCK 多様体はケーラー計量を持たないことが知られている。したがって非ケーラー幾何学の一部である。 $\nabla^g \theta = 0$ であるとき、LCK 構造は Vaisman 構造と呼ばれる。この場合は M が自然な foliation 構造をもつ。 $U := \theta^\#$ と $V = JU$ をとると、 U と V は正則リーマン foliation Σ を定めることが分かる。この foliation は基本形式 ω を横断成分と接成分に分解する。その横断成分は横断的なケーラー形式であることが知られているので、foliation 版を考えることでケーラー幾何学より様々な手段が Vaisman 多様体に応用できる。Vaisman 多様体の典型的な例としては Hopf と小平-Thurston 多様体がある。

ケーラー多様体上では、Calabi-Yau 条件が 1 次 Chern 類 $c_1(M)$ の消滅として表現できる。この条件より Beauville と Bogomolov ([1, 2]) は分解定理を得た。その定理によると、Calabi-Yau 多様体に関して、複素トーラスと単連結な多様体の積である有限正則な被覆空間が存在する。特に、十分大きな 1 次 Betti 数 b_1 に対して、Calabi-Yau 多様体は複素トーラスに双正則であることが示せる。非ケーラー多様体において、 $c_1(M) = 0$ の条件はそのような分解結果を得るのに、十分ではない。Vaisman 多様体において、Istrati ([4]) は多様体の 1 次 Bott-Chern

Chern 類が消滅することを考えて、同様の分解結果を示した。特に、 b_1 が十分大きいとき、Vaisman 多様体は小平-Thurston 多様体と双正則である。

この講演では横断的な 1 次 Chern 類 $c_{1,B}(M)$ (basic 1 次 Chern 類という) が消滅する Vaisman 多様体を考えることにする。Istrati と異なる手法を用いて、次の結果を得た ([3])。

Theorem 1. (M, J, ω, θ) を $\dim_{\mathbb{R}} M = 2n + 2$ であり、 $b_1(M) = 2n + 1$ かつ $c_{1,B}(M) = 0$ を満たす Vaisman 多様体とする。このとき、 M は小平-Thurston 多様体と微分同相であり、 J は左不変である。さらに、標準 foliation Σ はレギュラーであり、次のように M は M の Albanese トーラス上のファイバー束であることが分かる。

$$T^2 \longrightarrow M \xrightarrow{\alpha_{x_0}} \text{Alb}(M)$$

このとき、ファイバーが Σ の葉 (複素トーラスと双正則) である写像 α_{x_0} は Albanese 写像である。

$c_{1,B}(M) = 0$ の条件の下で、foliation のコホモロジー上のある制約によって、1 次 Betti 数が $2n + 1$ で抑えられる。

次の三つの段階に分けて、主定理を証明する。

まずは、一般的な Vaisman 多様体の Albanese トーラスと Albanese 写像を考える。Albanese 写像が任意の点に対して最大ランクをもつとき、標準 foliation Σ はレギュラーであり、 M は上記のようなファイバー束となることが示せる。

次に、 M と小平-Thurston 多様体との微分同相写像を得るために、 $b_1 = 2n + 1$ かつ M のすべての 1 次 basic 調和形式が一定の長さをもつ場合を考える。1 次 basic 調和空間の双対空間を考えて、その空間の特別な基底をとれば、仮定から生じる foliation 構造への強い制約により、ベクトル場の流れを用いて、その小平-Thurston 多様体との同相写像が得られる。その仮定の下で、Albanese 写像は任意の点に対して最大ランクをもつことが示せる。

最後に、横断的な Calabi-Yau 定理と $c_{1,B}(M) = 0$ の条件を用いて、すべての 1 次 basic 調和形式が一定の長さをもつ Vaisman 構造になるように、最初の構造を変形する。そこで、[5] で Ornea と Slesar が紹介した Vaisman 変形理論を応用する。

2 標準 foliation から誘導される basic コホモロジー

この節では、本稿を通して用いる basic コホモロジーについて説明する。このコホモロジー論は Vaisman 多様体の標準 foliation Σ によって誘導されるコホモロジーで、この設定に最も適切なコホモロジーである。次に、basic 微分形式空間を定義する。

$$\mathcal{A}_B^*(M) := \{\omega \in \mathcal{A}^*(M) \mid \iota_X \omega = 0 \text{ and } \mathcal{L}_X \omega = 0 \forall X \in T\Sigma\}$$

$d_B := d|_{\mathcal{A}_B^*}$ を定義すれば、 $(\mathcal{A}_B^*(M), d_B)$ がコチェイン複体となることが分かる。そのコチェイン複体のコホモロジー $H_B^*(M) := \frac{\ker d_B}{\text{Im } d_B}$ が basic コホモロジーと呼ばれる。

リーマン多様体の Hodge 理論のように basic Laplacian Δ_B が定義できる。その場合は、 $\mathcal{H}_B^*(M) := \ker \Delta_B$ を basic 調和微分形式空間という。同様に、basic Dolbeault 微分形式空間なども定まる。Vaisman 多様体上で、 $H_B^*(M) = \mathcal{H}_B^*(M)$ が成立し、basic な Hodge 分解定理も成り立つことが知られている。特に、 $\mathcal{H}_B^1(M) = \mathcal{H}_B^{1,0}(M) \oplus \mathcal{H}_B^{0,1}(M)$ が成立する。

M の Chern 接続より、 M の Chern-Ricci 形式 ρ を考える。そのとき、 ω と ρ は次の横断成分と接成分に分かれることが分かる。 $\omega = \omega_0 + \theta \wedge J\theta$, $\rho = \rho_0 + \rho_\Sigma$ 。このとき、 $\rho_0, \omega_0 \in \mathcal{A}_B^2(M)$ となり、 ρ_0 は横断的なケーラー形式 ω_0 に関する横断的な Chern-Ricci 形式と呼ばれる。 ρ_0 は閉形式なので、次の定義ができる。

Definition 2. M を Vaisman 多様体とする。 $c_{1,B}(M) := [\rho_0]_B \in H_B^2(M)$ を M の 1 次 basic Chern 類と呼ぶ。

3 Vaisman 多様体の Albanese トーラス

M を Vaisman 多様体とする。 $\Omega^p(M)$ を M 上の p 次正則形式空間とし、群準同型 $\varphi : H_1(M) \rightarrow (\Omega^1(M))^*$ を次のように定義する。

$$\varphi([\gamma]) = \int_\gamma \Big|_{\Omega^1(M)}.$$

Definition 3. 位相空間 $\text{Alb}(M) := (\Omega^1(M))^* / \varphi(H_1(M))$ を M の Albanese トーラスという。

$\text{Alb}(M)$ が複素トーラスを定めることは定義から明らかではない。実ベクトル空間としての $(\Omega^1(M))^*$ に $\varphi(H_1(M))$ が格子を定めることを示せばよい。 M がコンパクトなケーラー多様体の場合、 $\text{Alb}(M)$ は実次元が $b_1(M)$ の複素トーラスであることが知られている。Vaisman 多様体に対しても、同様な結果が得られる。柏田と Vaisman が Vaisman 多様体上で、 $H^1(M) = H_B^1(M) \oplus \mathbb{R}[\theta]$ が成り立つことを証明した。さらに、塚田がすべての 1 次正則形式が basic 調和形式であることを示した。これにより、次の結果が得られる。

Theorem 4. M を Vaisman 多様体とする。そのとき、 $\text{Alb}(M)$ は $\dim_{\mathbb{R}} \text{Alb}(M) = b_1 - 1$ を満たす複素トーラスである。

その -1 の部分は上記の柏田-Vaisman の 1 次コホモロジー群の分解より、Lee 形式由来のものである。

$\text{Alb}(M)$ が複素トーラスであることを用いて、Albanese 写像が定義できる。

Definition 5. $x_0 \in M$ を固定する。以下のように定義される写像 $\alpha_{x_0} : M \rightarrow \text{Alb}(M)$ は well-defined で M の Albanese 写像と呼ばれる。

$$\alpha_{x_0}(x) := \left[\int_{x_0}^x \right]$$

ケーラー多様体の Albanese 写像と同様に、他の点 $x_1 \in M$ をとると、 $\text{Alb}(M)$ 上のある左移動 L で、 $\alpha_{x_1} = L \circ \alpha_{x_0}$ が成り立つ。

Theorem 6. M を Vaisman 多様体とする。 $b_1(M) = \dim_{\mathbb{R}} M - 1$ が成立するかつ Albanese 写像 α_{x_0} が任意の点に対して最大ランクをもつことを仮定する。そのとき、標準 foliation Σ はレギュラーであり、次のように M は Albanese トーラス上のファイバー束である。

$$T^2 \longrightarrow M \xrightarrow{\alpha_{x_0}} \text{Alb}(M)$$

このとき、 α_{x_0} のファイバーが Σ の葉（複素トーラスと双正則）である。

4 長さが一定の 1 次 basic 調和形式をもつ Vaisman 多様体

まずは、小平-Thurston 多様体の定義とスタンダード Vaisman 構造を思い出しておく。 $2n+1$ 次元の Heisenberg リー群 H_{2n+1} を次の行列のリー群として定義する。

$$H_{2n+1} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{x} & z \\ & \text{Id}_n & \mathbf{y}^T \\ & & 1 \end{pmatrix} \mid \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R} \right\}$$

これは格子が存在するような 2-ステップ冪零リー群である。可解多様体 $M = \Gamma \backslash G$ とは連結かつ単連結な可解リー群の格子 Γ によるコンパクトな商多様体のことである。 G が冪零である場合、 M を冪零多様体と呼ぶ。 $G = \mathbb{R} \times H_{2n+1}$ のときは、 M を小平-Thurston 多様体という。

小平-Thurston 多様体 $M = \Gamma \backslash (\mathbb{R} \times H_{2n+1})$ を考える。 $\mathfrak{g}$ を $\mathbb{R} \times H_{2n+1}$ のリー代数とする。このとき、 $[X_i, Y_i] = Z$ かつ T と Z が中心の元となるようなベクトル X_i, Y_i, T, Z が存在し、 $\mathfrak{g} = \mathbb{R}T \oplus \text{span}_{\mathbb{R}} \{X_i, Y_i, Z\}_i$ が成り立つ。 $JX_i := Y_i$ 、 $JZ = -T$ とすると、 M 上で、左不変な複素構造 J が定義できる。さて、次のように M 上で定義される左不変形式を考える。

$$\omega := \sum_i X_i^* \wedge Y_i^* - T^* \wedge Z^* \quad \theta := T^*.$$

(J, ω, θ) の組は M のスタンダード Vaisman 構造と呼ばれる Vaisman 構造を定める。

Definition 7. 任意の basic 形式 α は $|\alpha|_g$ が定数関数のとき、長さが一定であるという。 (M, Σ, g) はすべての $\alpha \in \mathcal{H}_B^1(M)$ に対し、長さが一定であるとき、長さ一定の 1 次 basic 調和形式をもつという。

ある Vaisman 多様体が長さ一定の 1 次 basic 調和形式をもつと仮定すれば、極化恒等式によって、任意の二つの 1 次 basic 調和形式の各点内積が一定である。したがって、 $\mathcal{H}_B^1(M)$ の正規直交基底を考えて、その基底の双対をとると、ノーマル束 $N = (T\Sigma)^\perp$ の各点で線形独立な大域切断の集合となる。 $H^1(M) = H_B^1(M) \oplus \mathbb{R}[\theta]$ であるから、 $b_1 > \dim_{\mathbb{R}} M - 1$ が成り立つとき、 $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{H}_B^1(M) = \dim_{\mathbb{R}} H_B^1(M) > \dim_{\mathbb{R}} M - 2$ となるが、 $\dim_{\mathbb{R}} N \leq 2n$ より、それはあり得ない。 $b_1 = \dim_{\mathbb{R}} M - 1$ となるときは、その大域切断の集合が N の基底であることが分かる。その集合のベクトル場と U と V の流れを用いて、次の結果が得られる。

Theorem 8 ([3]). (M, J, ω, θ) を長さ一定の 1 次 basic 調和形式をもつ実次元 $2n+2$ の Vaisman 多様体とする。 $b_1(M) = 2n+1$ と仮定する。そのとき、 M は小平-Thurston 多様体と微分同相であり、 J はスタンダード左不変な複素構造となる。

5 Vaisman 変形

横断的な Calabi-Yau 定理を思い出しておく。

Theorem 9. $(M, \mathcal{F}, \omega_0)$ を横断的なケーラー *foliated* 多様体とする。そのとき、任意の $\rho \in c_{1,B}(M)$ に対して、一意に横断的なケーラー形式 $\omega_1 \in [\omega_0]_B$ が存在し、 ρ は ω_1 の横断的な Chern-Ricci 形式となる。

この研究の設定では、 $c_{1,B}(M) = 0$ なので横断的な Ricci フラットな横断的なケーラー形式が見つけれられる。Bochner 手法の foliation 版を用いて、次の結果が示せる。

Proposition 10. $(M, \mathcal{F}, g)$ を横断的な Ricci フラットなリーマン *foliated* 多様体とする。そのとき、すべての 1 次 basic 調和形式は横断平行である。特に、長さは一定である。

定理 9 を用いてとった ω_1 が M 上のある Vaisman 構造の横断的なケーラー形式となることを確認する必要がある。そのために、Ornea-Slesar([5]) の Vaisman 構造変形を紹介する。

(M, J, ω, θ) を Vaisman 多様体として、以下のベクトル束の完全列を考える。

$$0 \rightarrow T\Sigma \rightarrow TM \rightarrow Q := \frac{TM}{T\Sigma} \rightarrow 0$$

J は Q 上の複素構造 $\bar{J}$ に射影される。 次の集合を定義する。

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(J, \omega, \theta) &:= \{\text{Vaisman 構造 } (J', \omega', \theta') \mid \theta' = \theta, U' = U, V' = V \text{ and } \bar{J}' = \bar{J}\} \\ C(M, J, \omega_0) &:= \{\zeta \in \mathcal{A}_B^1(M) \mid \omega_0(X, JX) - d\zeta(X, JX) > 0 \text{ for all } X \in N\}.\end{aligned}$$

$\mathcal{V}(J, \omega, \theta)$ の元を Vaisman 変形と呼ぶ。その二つの集合の元は 1 対 1 に対応することが示せる。

Theorem 11 ([3]). 以下のように $C(M, J, \omega_0)$ と $\mathcal{V}(J, \omega, \theta)$ の間の全単射が定義できる。

$$\begin{aligned}C(M, J, \omega_0) &\longleftrightarrow \mathcal{V}(J, \omega, \theta) \\ \zeta &\mapsto \begin{cases} J' := J - \zeta \otimes U - (\zeta \circ J) \otimes V \\ \omega' := -dJ'\theta + \theta \wedge J'\theta \end{cases} \\ \zeta &:= J'\theta - J\theta \leftarrow (J', \omega', \theta)\end{aligned}$$

特に、上の対応を用いて、任意の $\omega_1 \in [\omega_0]_B$ がほかの Vaisman 構造の基本形式の横断成分となることが示せる。さらに、次の結果が証明できる。

Theorem 12 ([3]).

- (1) Vaisman 構造 (J_0, g, θ) の Vaisman 変形より得られた複素構造 J は J_0 の複素構造の大域変形である。
- (2) M を小平-Thurston 多様体とし、 (J, ω, θ) を M 上における左不変な J をもつ Vaisman 構造とする。そのとき、 (J, ω, θ) の Vaisman 変形より得られた複素構造は左不変である。

上の結果と横断的な Calabi-Yau 定理を用いて、主定理が証明できる。横断的な Ricci フラットな計量を得たあと、上のように Vaisman 構造を変形すると、長さが一定の 1 次 basic 調和形式をもつ Vaisman 構造を得る。定理 8 によって、その構造より小平-Thurston 多様体との微分同相ができて、定理 12 より、最初の J が左不変となる。最後に、Albanese 写像が各点に最大ランクをもつことを示す必要がある。左不変な複素構造をもつ小平-Thurston 多様体で、Dolbeault コホモロジー版の野水定理が使える。そうすると、各点に対して、 M 上の 1 次正則形式の基底を得て、その基底の双対を用いて、 α_{x_0} の微分を直接計算すると、すべての点に対して最大ランクをもつことが示せる。

References

- [1] A. Beauville. “Variétés Kähleriennes dont la première classe de Chern est nulle”. *J. Differential Geom.* 18.4 (1983), pp. 755–782.
- [2] F. A. Bogomolov. “The decomposition of Kähler manifolds with a trivial canonical class”. *Mat. Sb. (N.S.)* 93(135) (1974), pp. 573–575, 630.
- [3] L. H. S. Gomes. *On the Classification of Vaisman Manifolds with Vanishing First Basic Chern Class and Large First Betti Number*. 2026. arXiv: 2604.04134 [math.DG].
- [4] N. Istrati. “Vaisman manifolds with vanishing first Chern class”. *J. Eur. Math. Soc.* (2025), Published online first. DOI: 10.4171/JEMS/1633.
- [5] L. Ornea and V. Slesar. “Deformations of Vaisman manifolds”. *Differential Geom. Appl.* 85 (2022), Paper No. 101940, 13.

甘中–東條によって一般化された Hurwitz–Radon 数の 幾何学的な意味付け

宮地 宗人 (広島大学大学院先進理工系科学研究科)*

1 研究の背景

Hurwitz–Radon 数は、二次形式の合成問題に起源を持つ整数であり、正の整数 N を

$$N = 2^{4a+b}(2c+1) \quad (a, c \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, 0 \leq b \leq 3)$$

と表すとき、

$$\rho(N) = 8a + 2^b$$

で定義される。Adams は、球面 S^{N-1} 上の各点で一次独立なベクトル場の最大本数が $\rho(N) - 1$ であることを示すことで Hurwitz–Radon 数を幾何学的に特徴付けた [1].

近年、甘中–東條 は Hurwitz–Radon 数を、実簡約リー代数とその忠実表現の枠組みで一般化した [3]. 以下、 $(\mathfrak{g}, \iota)$ を実簡約リー代数 $\mathfrak{g}$ とその忠実表現 $\iota: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(N, \mathbb{C})$ の組とする。 $\iota(\mathfrak{g})$ は、ある $\mathbb{C}^N$ 上の正定値エルミート形式に関する随伴で閉じていると仮定する。このとき、対合自己同型 $\theta: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ であって

$$\langle \iota(X)v, w \rangle = -\langle v, \iota(\theta(X))w \rangle \quad (X \in \mathfrak{g}, v, w \in \mathbb{C}^N)$$

を満たすものが存在する。 θ の固有空間分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ と書く。ここで、 $\mathfrak{k}$ と $\mathfrak{p}$ はそれぞれ固有値 1 と -1 に対応する固有空間である。 $\mathfrak{g}$ が半単純ならば、 $\mathfrak{g}$ とその任意の忠実表現は上記の仮定を満たし、 θ はカルタン対合である。

定義 1 (甘中–東條 [3]). 上記の設定のもとで、整数 $\rho^{(i)}(\mathfrak{g}, \iota)$ ($i = 1, 2$) を、次を満たす $\mathbb{R}$ -線形写像 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathfrak{p}$ が存在するような最大の n として定義する。

- $\rho^{(1)}(\mathfrak{g}, \iota)$: 任意の $v \in \mathbb{R}^n$ に対して、 $\iota(f(v))^2 = \|v\|^2 I_N$ が成り立つ。
- $\rho^{(2)}(\mathfrak{g}, \iota)$: 任意の $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ に対して $\iota(f(v))$ が可逆である。

明らかに

$$\rho^{(1)}(\mathfrak{g}, \iota) \leq \rho^{(2)}(\mathfrak{g}, \iota)$$

が成り立つ。

例 2. $\iota: \mathfrak{so}(N, N) \rightarrow \mathfrak{gl}(2N, \mathbb{C})$ を標準表現とする。このとき、

$$\rho^{(1)}(\mathfrak{so}(N, N), \iota) = \rho^{(2)}(\mathfrak{so}(N, N), \iota) = \rho(N)$$

*e-mail: miyajimuneto@hiroshima-u.ac.jp

This work was supported by JST SPRING, Grant Number JPMJSP2132.

2020 Mathematics Subject Classification: 57R25, 22E46

キーワード: Hurwitz–Radon number, fundamental vector field, G -manifold

が成り立つ.

したがって, $\rho^{(1)}(\mathfrak{g}, \iota)$ および $\rho^{(2)}(\mathfrak{g}, \iota)$ は Hurwitz–Radon 数の一般化とみなすことができる. 甘中–東條は古典型リー代数 $\mathfrak{g}$ とその標準表現 ι に対してこれらの値を決定しており, $\mathfrak{g} \neq \mathfrak{sl}(2N+1, \mathbb{D})$ ($\mathbb{D} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, N \geq 1$) ならば,

$$\rho^{(1)}(\mathfrak{g}, \iota) = \rho^{(2)}(\mathfrak{g}, \iota)$$

が成り立つ.

さらに, 甘中–東條は, 特定の対称空間 G/H と表現 $\iota : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(N, \mathbb{C})$ に対して, $Spin(n, 1)$ が G/H に proper に作用できるような最大の n が $\rho^{(1)}(\mathfrak{g}, \iota)$ であることを示した.

Hurwitz–Radon 数は球面上のベクトル場によって特徴付けられた. さらに, 甘中–東條は表現論の枠組みで Hurwitz–Radon 数を一般化した. そこで自然な問題として, より幾何学的な枠組みで $\rho^{(1)}(\mathfrak{g}, \iota)$ と $\rho^{(2)}(\mathfrak{g}, \iota)$ を再定式化できないかという問題が考えられる.

本講演では, この問題を G -多様体の枠組みで考える. まず, G -多様体上の各点で一次独立な基本ベクトル場の最大本数を表す不変量 $\rho_{G, \mathfrak{s}}(M, \sigma)$ を導入し, $\rho^{(2)}(\mathfrak{g}, \iota)$ がこの不変量の特別な場合であることを紹介する. これにより, $\rho^{(2)}(\mathfrak{g}, \iota)$ は各点で一次独立な基本ベクトル場の最大本数として意味付けられる.

次に, アフィン接続を備えた G -多様体に対して, 不変量 $\rho_{G, \mathfrak{s}}^{\pm}(M, \sigma, \nabla)$ を導入し, $\rho^{(1)}(\mathfrak{g}, \iota)$ が $\rho_{G, \mathfrak{s}}^{-}(M, \sigma, \nabla)$ の特殊な場合であることを紹介する. さらに, $\rho_{G, \mathfrak{s}}^{\pm}(M, \sigma, \nabla)$ と複素構造や四元数構造の一般化として知られているリーマン多様体上のクリフォード構造との関係について説明する.

2 $\rho^{(2)}(\mathfrak{g}, \iota)$ の幾何学的な意味付け

この節では, G -多様体に対して整数 $\rho_{G, \mathfrak{s}}(M, \sigma)$ を定義し, $\rho_{G, \mathfrak{s}}(M, \sigma)$ が甘中–東條によって定義された $\rho^{(2)}(\mathfrak{g}, \iota)$ の拡張であることを紹介する. これにより, $\rho^{(2)}(\mathfrak{g}, \iota)$ の幾何学的な意味付けが与えられる.

G をリー群, M を G -多様体, σ をその群作用とする. また, $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ を部分ベクトル空間とする.

定義 3. $A \in \mathfrak{g}$ に対して, ベクトル場 $X_A \in \mathfrak{X}(M)$ を

$$X_A : M \rightarrow TM, \quad p \mapsto (d\sigma_p)_e(A)$$

で定義し, A に対応する基本ベクトル場と呼ぶ. ここで, $\sigma_p : G \rightarrow M, g \mapsto \sigma(g, p)$ である. 特に, $A \in \mathfrak{s}$ のときは, X_A を $(G, \mathfrak{s})$ -基本ベクトル場と呼ぶ.

G -多様体に対して次の整数を定義する.

定義 4.

$$\rho_{G,\mathfrak{s}}(M, \sigma) := \max \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \begin{array}{l} M \text{ 上の各点で一次独立な } n \text{ 本の} \\ (G, \mathfrak{s})\text{-基本ベクトル場が存在する} \end{array} \right\}.$$

以下, $N \geq 2$ とし, $\varphi : SL(N, \mathbb{R}) \rightarrow GL(N, \mathbb{R})$ を標準表現とする.

例 5.

$$\rho_{SL(N, \mathbb{R}), \mathfrak{sl}(N, \mathbb{R})}(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}, \varphi) = \rho(N).$$

このように, $\rho_{G,\mathfrak{s}}(M, \sigma)$ は Hurwitz–Radon 数を特殊な場合として含む. 他にもいくつかの例を紹介する.

例 6. $\mathfrak{sl}(N, \mathbb{R}) = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ をカルタン分解とする. このとき,

$$\rho_{SL(N, \mathbb{R}), \mathfrak{p}}(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}, \varphi) = \rho\left(\frac{N}{2}\right) + 1.$$

ここで, N が奇数のときは $\rho\left(\frac{N}{2}\right) = 0$ としている.

例 7.

$$\rho_{SL(N, \mathbb{R}), \mathfrak{sl}(N, \mathbb{R})}(\mathbb{RP}^{N-1}, \varphi) = \rho(N) - 1.$$

例 8. $\mathfrak{sl}(N, \mathbb{R}) = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ をカルタン分解とする. このとき,

$$\rho_{SL(N, \mathbb{R}), \mathfrak{p}}(\mathbb{RP}^{N-1}, \varphi) = 0.$$

主結果の一つとして以下を得る.

定理 9. G を実簡約リー群, $\varphi : G \rightarrow GL(N, \mathbb{C})$ をリー群準同型とし, $\iota = (d\varphi)_e$ が単射であるとする. また, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を ι から定まる固有空間分解とする. このとき,

$$\rho_{G,\mathfrak{p}}(\mathbb{C}^N \setminus \{0\}, \varphi) = \rho^{(2)}(\mathfrak{g}, \iota)$$

が成り立つ.

系 10. 上の定理の仮定のもとで, $n \in \mathbb{N}$ に対し, 次は同値である.

- (1) $n \leq \rho^{(2)}(\mathfrak{g}, \iota).$
- (2) $\mathbb{C}^N \setminus \{0\}$ 上の各点で一次独立な n 本の $(G, \mathfrak{p})$ -基本ベクトル場が存在する.

したがって, $\rho^{(2)}(\mathfrak{g}, \iota)$ は各点で一次独立な基本ベクトル場の枠組みによって意味付けられる.

3 $\rho^{(1)}(\mathfrak{g}, \iota)$ の幾何学的な意味付け

この節では, G -多様体とそのアフィン接続に対して整数 $\rho_{G,\mathfrak{s}}^\pm(M, \sigma, \nabla)$ を定義し, ρ^- が甘中–東條によって定義された $\rho^{(1)}(\mathfrak{g}, \iota)$ の拡張であることを紹介する.

G をリー群, $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{g}$ を部分ベクトル空間, M を G -多様体, σ をその群作用とする. また, $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ を M 上のアフィン接続とする. さらに,

$$\nabla^M \mathfrak{s} := \{\nabla X_A \mid A \in \mathfrak{s}\} \subset \text{End}_{C^\infty(M)}(\mathfrak{X}(M))$$

とおく.

G -多様体とそのアフィン接続に対して次のように整数を定義する.

定義 11. $\epsilon \in \{\pm 1\}$ に対し, $\rho_{G,\mathfrak{s}}^\epsilon(M, \sigma, \nabla)$ を, 次を満たす $\mathbb{R}$ -代数準同型 $f : Cl_n^\epsilon \rightarrow \text{End}_{C^\infty(M)}(\mathfrak{X}(M))$ が存在するような最大の n として定義する.

- $f(e_i) \in \nabla^M \mathfrak{s} \quad (i = 1, \dots, n).$

ここで, $Cl_n^+ = Cl_n$, $Cl_n^- = Cl_{0,n}$ とする.

主結果の一つとして以下を得る.

定理 12. G を実簡約リー群, $\varphi : G \rightarrow GL(N, \mathbb{C})$ をリー群準同型とし, $\iota = (d\varphi)_e$ が単射であるとする. また, $\nabla : \mathfrak{X}(\mathbb{C}^N \setminus \{0\}) \times \mathfrak{X}(\mathbb{C}^N \setminus \{0\}) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathbb{C}^N \setminus \{0\})$ を $\mathbb{C}^N \setminus \{0\}$ 上の標準平坦アフィン接続とし, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を ι から定まる固有空間分解とする. このとき,

$$\rho_{G,\mathfrak{p}}^-(\mathbb{C}^N \setminus \{0\}, \varphi, \nabla) = \rho^{(1)}(\mathfrak{g}, \iota)$$

が成り立つ.

系 13. 上の定理の仮定のもとで, $n \in \mathbb{N}$ に対し, 次は同値である.

- (1) $n \leq \rho^{(1)}(\mathfrak{g}, \iota).$
- (2) ある $\mathbb{R}$ -代数準同型 $f : Cl_{0,n} \rightarrow \text{End}_{C^\infty(\mathbb{C}^N \setminus \{0\})}(\mathfrak{X}(\mathbb{C}^N \setminus \{0\}))$ が存在して, 各 $i \in \{1, \dots, n\}$ に対して, $f(e_i) \in \nabla^{\mathbb{C}^N \setminus \{0\}} \mathfrak{p}$ が成り立つ.

したがって, $\rho^{(1)}(\mathfrak{g}, \iota)$ は G -多様体とそのアフィン接続の枠組みによって意味付けられる.

4 クリフォード構造との関係

この節では, 前節で定義した $\rho_{G,\mathfrak{s}}^+(M, \sigma, \nabla)$ とクリフォード構造との関係を紹介する.

(M, g) をリーマン多様体とする. $A \in \text{End}(TM)$ は, 任意の $p \in M$, $v, w \in T_p M$ に対して,

$$g_p(Av, w) = -g_p(v, Aw)$$

を満たすときに歪対称であると呼ぶ. $\text{End}(TM)$ の歪対称な元全体を $\text{End}^-(TM)$ とかく.

定義 14 ([5]). (M, g) 上のランク r のクリフォード構造 (E, h, φ) とは, M 上の向き付けられたランク r のユークリッドベクトル束 (E, h) とクリフォード写像と呼ばれるゼロ写

像でない代数束準同型 $\varphi : Cl(E, h) \rightarrow \text{End}(TM)$ の組であって, $\varphi(E) \subset \text{End}^-(TM)$ を満たすものを言う.

G をリー群, M を G -多様体とし, その群作用を σ とする. また, g を M 上の G -不変なリーマン計量とし, ∇ を g の Levi-Civita 接続とする.

主結果の一つとして以下を得る.

定理 15. $n \in \mathbb{N}$ に対して, 以下は同値である.

- (1) $n \leq \rho_{G, \mathfrak{s}}^+(M, \sigma, \nabla)$.
- (2) あるランク n のクリフォード構造 (E, h, φ) が存在して, 次を満たす.
 - E は自明束である.
 - ある h -正規直交枠 $s_1, \dots, s_n \in \Gamma(E)$ が存在して, 各 $i \in \{1, \dots, n\}$ に対して, $\varphi \circ s_i \in \nabla^M \mathfrak{s}$ を満たす.

したがって, $\rho_{G, \mathfrak{s}}^+(M, \sigma, \nabla)$ はある種のクリフォード構造の存在を決定する.

参考文献

- [1] J. F. Adams, Vector fields on spheres, Bull. Amer. Math. Soc. 68 (1962), 39–41.
- [2] Y. Au-Yeung, On matrices whose nontrivial real linear combinations are nonsingular, Proc. Amer. Math. Soc. 29 (1971), 17–22.
- [3] K. Kannaka and K. Tojo, Hurwitz–Radon numbers and proper actions of semisimple Lie groups, arXiv:2602.04544.
- [4] M. Miyaji, A Geometric Interpretation of Generalized Hurwitz–Radon Numbers Defined by Kannaka–Tojo, arXiv:2605.00704.
- [5] A. Moroianu and U. Semmelmann, Clifford structures on Riemannian manifolds, Adv. Math. 228 (2011), 940–967.

The Iwasawa factorization with rotationally symmetric parts and the Lamé equation

Tadashi Udagawa

Department of Applied Mathematics, Waseda University

1 Introduction

The Iwasawa factorization of loop groups has been applied in the DPW method for obtaining a harmonic map into symmetric spaces. The DPW method was introduced by J. Dorfmeister, F. Pedit and H. Wu (1998 [4]). For a certain $(\Lambda\mathfrak{sl}_n\mathbb{C})_\sigma$ -valued 1-form ξ on $\mathbb{C}$, the Iwasawa factorization of a solution ϕ to $d\phi = \phi\xi$ leads to a lift of a harmonic map into the symmetric space, and also provides a method for constructing constant mean curvature (CMC) surfaces and a solution to the sinh-Gordon equation

$$w_{z\bar{z}} = e^{2w} - e^{-2w}.$$

A fundamental difficulty in this theory is that the Iwasawa factorization is generally not globally defined. In the compact case, the factorization exists globally [4], whereas in the noncompact case it is defined only locally near the identity. For $n = 2$, J. Dorfmeister, M. Guest, and W. Rossman showed that a global radial solution of the sinh-Gordon equation is obtained from a Smyth-type DPW potential [3]. In [2], D. Brander, W. Rossman, and N. Schmitt [2] studied the Delaunay-type DPW potential

$$\xi = \begin{pmatrix} c & \lambda^{-1}a + \lambda b \\ -\lambda^{-1}b - \lambda a & -c \end{pmatrix} dz, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \lambda \in S^1. \quad (1)$$

and showed that the corresponding solution admits a local Iwasawa factorization near $z=0$. Moreover, the associated CMC surface in $\mathbb{R}^{2,1}$ has rotational symmetry.

In this talk, we discuss translationally invariant solutions of the sinh – Gordon equation obtained in [11]. Since the solution depends only on the real part x of $z = x + iy$, it cannot be defined smoothly on all of $\mathbb{C}$. Consequently, there is no smooth Iwasawa factorization on all of $\mathbb{C}$. Nevertheless, the solution admits a meromorphic extension, and the Iwasawa factorization exists on $\mathbb{C}$ away from countably many lines. The main result is as follows.

Theorem 1 *Let $\wp, \zeta, \sigma$ be the Weierstrass functions with the periods $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ satisfying*

$$\begin{aligned} (\wp')^2 &= 4\wp^3 - \frac{64}{3}(4E^2 - 3)a^2b^2\wp - \frac{512}{27}(9 - 8E^2)Ea^3b^3, \\ \wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right) &= \frac{8}{3}abE =: e_1, \quad \wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right) = \frac{4ab}{k} + \frac{8}{3}abE =: e_2, \\ \wp\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) &= -(e_1 + e_2) =: e_3, \quad E = \frac{1}{2}\left(\frac{c^2}{ab} - \frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right), \\ k^2 + 2Ek + 1 &= 0, \quad |k| \leq 1, \end{aligned} \quad (2)$$

and $z_0 \in \mathbb{C}$ a solution to $\wp(z_0) = 4a^2 + \frac{8}{3}abE$. Then, ϕ admits the Iwasawa factorization

$$\phi = \exp\left(z \begin{pmatrix} c & \lambda^{-1}a + \lambda b \\ -\lambda^{-1}b - \lambda a & -c \end{pmatrix}\right) = FB,$$

on $\mathbb{C} \setminus \{z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}, x + z_0 \in \frac{\omega_1}{2}\mathbb{Z} + \omega_2\mathbb{Z}\}$, where $F \in (\Lambda \text{SU}_{1,1})_\sigma$ and $B \in (\Lambda^+ \text{SL}_2\mathbb{C})_\sigma$ is given by

$$\begin{aligned} B &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2a}}{(\wp(x+z_0)-e_1)^{\frac{1}{4}}} & 0 \\ 0 & \frac{(\wp(x+z_0)-e_1)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2a}} \end{pmatrix} \hat{B}, \\ \hat{B} &= \begin{pmatrix} L(x, \lambda) & 2\lambda b \tilde{L}(x, \lambda) \\ \frac{\lambda^{-1}}{2}b^{-1} \left(L'(x, \lambda) - \frac{\wp'(x+z_0)L(x, \lambda)}{2(\wp(x+z_0)-e_1)} \right) & \tilde{L}'(x, \lambda) - \frac{\wp'(x+z_0)\tilde{L}(x, \lambda)}{2(\wp(x+z_0)-e_1)} \end{pmatrix}, \\ L(x, \lambda) &= \frac{\sigma(z_0)}{2\sigma(x+z_0)} \left\{ \frac{\sigma(x+z_0-\mu_\lambda)}{\sigma(z_0-\mu_\lambda)} e^{\zeta(\mu_\lambda)x} + \frac{\sigma(x+z_0+\mu_\lambda)}{\sigma(z_0+\mu_\lambda)} e^{-\zeta(\mu_\lambda)x} \right\} \\ &\quad + \frac{16\lambda^2 abc}{\wp'(\mu_\lambda)} \frac{\sigma(z_0)}{2\sigma(x+z_0)} \left\{ \frac{\sigma(x+z_0-\mu_\lambda)}{\sigma(z_0-\mu_\lambda)} e^{\zeta(\mu_\lambda)x} - \frac{\sigma(x+z_0+\mu_\lambda)}{\sigma(z_0+\mu_\lambda)} e^{-\zeta(\mu_\lambda)x} \right\}, \\ \tilde{L}(x, \lambda) &= \frac{\wp(z_0) - \wp(\mu_\lambda)}{\wp'(\mu_\lambda)} \frac{\sigma(z_0)}{\sigma(x+z_0)} \left\{ \frac{\sigma(x+z_0-\mu_\lambda)}{\sigma(z_0-\mu_\lambda)} e^{\zeta(\mu_\lambda)x} - \frac{\sigma(x+z_0+\mu_\lambda)}{\sigma(z_0+\mu_\lambda)} e^{-\zeta(\mu_\lambda)x} \right\}, \\ \text{and } \wp(\mu_\lambda) &= \frac{8}{3}abE - 4\lambda^2 ab. \end{aligned}$$

The B -factor in the Iwasawa factorization $\phi = FB$ is governed by the Lamé equation. The fundamental solutions of the Lamé equation are explicitly described in terms of the Weierstrass functions $\wp, \zeta$, and σ [5]. Since these functions are meromorphic on $\mathbb{C}$, it follows that the Iwasawa factorization exists on $\mathbb{C}$ away from the set $\{z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}, x + z_0 \in \frac{\omega_1}{2}\mathbb{Z} + \omega_2\mathbb{Z}\}$ which is a union of countably many isolated lines.

By substituting the F -factor in the Iwasawa factorization $\phi = FB$, we obtain an explicit parametrization $\Psi(F) = (x_1, x_2, x_3)$ of the resulting CMC surfaces associated with the Delaunay potential. From this parametrization, we see that the surface (x_1, x_2, x_3) can be described in terms of a family of isometries R_t of $\mathbb{R}^{2,1}$. The function $R(x)$ has singularities along the lines $z = \frac{\omega_1}{2}m + \omega_2n + iy$ ($y \in \mathbb{R}, m, n \in \mathbb{Z}$).

Corollary 1 *For any $t \in \mathbb{R}$, we have*

$$\Psi(F)(x, y + t) - \frac{R(x)}{2H}(a + b, 0, c) = \left(\Psi(F)(x, y) - \frac{R(x)}{2H}(a + b, 0, c) \right) R_t,$$

where $R_t \in \text{SO}(2, 1)$ is given by

$$R_t = \frac{1}{\kappa_1^2} \begin{pmatrix} c^2 \cos t - (a + b)^2 & c \sin t & (a + b)c(\cos t - 1) \\ -c \sin t & \cos t & -(a + b) \sin t \\ -(a + b)c(\cos t - 1) & -(a + b) \sin t & c^2 - (a + b)^2 \cos t \end{pmatrix}.$$

We can compute that $\Psi(F) = (x_1, x_2, x_3)$ satisfies

$$\left(x_1 - \frac{(a + b)}{2H} R(x) \right)^2 + x_2^2 - \left(x_3 - \frac{c}{2H} R(x) \right)^2 = \frac{L(x)^2}{4H^2 \kappa_1^2}. \quad (\text{H})$$

Hence, for any fixed (x) , the resulting surface $\Psi(F)$ lies in the plane passing through the point $\frac{R(x)}{2H}(a + b, 0, c)$ with normal vector $\mathbf{n} = (a + b, 0, -c)$, and the corresponding curve $\Psi(F)$ in this plane is an ellipse or a hyperbola. We illustrate this below.

If time permits, we will also discuss a higher-rank generalization corresponding to the $n = 3$ Delaunay-type potential [11]. In this case, the Gauss – Codazzi equation reduces to the Tzitzeica equation, whose solutions can be described explicitly in terms of Weierstrass elliptic functions. As an application, we obtain translationally invariant hyperbolic affine spheres and classify them according to their slice curves.

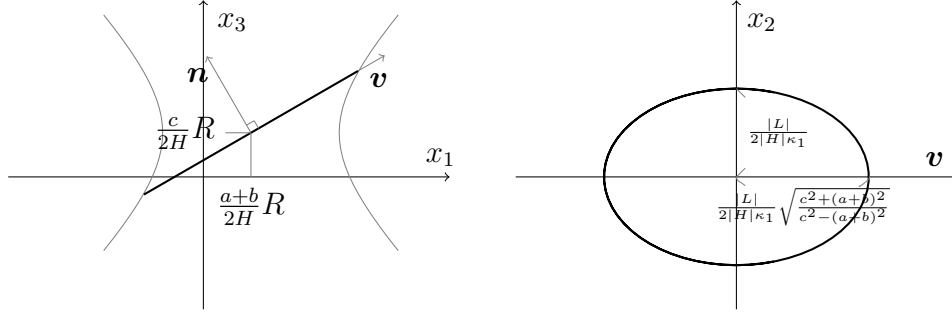


Figure 1: The intersection of the plane and $\Psi(F)$ ($c^2 > (a+b)^2$), where $\mathbf{v} = (a+b, 0, c)$.

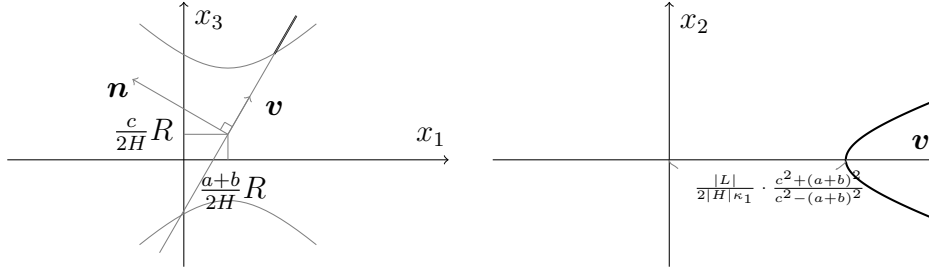


Figure 2: The intersection of the plane and $\Psi(F)$ ($c^2 < (a+b)^2$), where $\mathbf{v} = (a+b, 0, c)$.

References

- [1] V. BALAN AND J. DORFMEISTER, Birkhoff decomposition and Iwasawa decomposition for loop groups, Tôhoku Math. J. (2) 53 (2010), 593–615.
- [2] D. BRANDER, W. ROSSMAN AND N. SCHMITT, Holomorphic representation of constant mean curvature surfaces in Minkowski space: consequence of non-compactness in loop group methods, Adv. Math. 223 (2010), 949–986.
- [3] J. DORFMEISTER, M. GUEST AND W. ROSSMAN, The tt^* -structure of the quantum cohomology of $\mathbb{CP}^1$ from the viewpoint of differential geometry, Asian J. Math., 14 (2010), 417–437.

- [4] J. DORFMEISTER, F. PEDIT AND H. WU, Weierstrass type representation of harmonic maps into symmetric spaces, *Comm. Anal. Geom.* 6 (1998), 633–668.
- [5] G. PASTRAS, The Weierstrass elliptic function and applications in classical and quantum mechanics—a primer for advanced undergraduates, *Springer Briefs Phys*, Springer, 2020.
- [6] A. PRESSLEY AND G. SEGAL, *Loop Groups*, Oxford Univ. Press., 1986.
- [7] N. SCHMITT, M. KILIAN, S.-P. KOBAYASHI AND W. ROSSMAN, Unitarization of monodromy representations and constant mean curvature trinoids in 3-dimensional space forms, *J. Lond. Math. Soc.* (2) 75 (2007), 563–581.
- [8] F. TORRALBO, A geometrical correspondence between maximal surfaces in anti-de Sitter space-time and minimal surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, *J. Math. Anal. Appl.* 432 (2015), 1660–1670.
- [9] T. UDAGAWA, Globality of the DPW construction for Smyth potentials in the case of $SU_{1,1}$, *Differential Geom. Appl.* 97 (2024), Paper No. 102211, 30 pp.
- [10] T. UDAGAWA, The Iwasawa factorization with rotationally symmetric parts and the Lamé equation, *Tohoku Math. J.*, to appear.
- [11] T. UDAGAWA, Noncompact Iwasawa factorization and translationally invariant hyperbolic affine spheres, in preparation.
- [12] E. WHITTAKER AND G. WATSON, *A course of modern analysis*. Reprint of the fourth (1927) edition, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996.

コンパクト等質空間の組合せ論的一般化と調和解析

中田 彬文 (広島大学)

1 導入

有限等質空間やその一般化であるコンパクト等質空間では調和解析が展開でき、Peter–Weyl の定理や Plancherel の定理、畳み込み定理といった重要な命題が成り立つ [3]. また、有限等質空間の別の一般化である有限アソシエーションスキームでも同様に調和解析が展開できる [1, 2]. 本講演では、これらの良く知られた事実について振り返った後、これら 2 方向の一般化を統一的に扱える枠組みとしてコンパクトアソシエーションスキームを定める. さらに、可換なコンパクトアソシエーションスキームの上で Peter–Weyl の定理や Plancherel の定理、畳み込み定理が成り立つことなどを紹介する. 本稿ではコンパクトアソシエーションスキームの定義と、対応する Bose–Mesner 代数の構成および基本的な性質までを述べる. なお、本講演の内容は小川健翔氏 (広島大学)、奥田隆幸氏 (広島大学) との共同研究に基づくものである.

2 振り返り

2.1 コンパクト等質空間上の調和解析

この小節ではコンパクト等質空間上の調和解析における基礎的な事実を紹介する.

G をコンパクト Hausdorff 位相群とする. 本稿を通して、空でないコンパクト Hausdorff 空間であって連続かつ推移的な G 作用を備えるものを **コンパクト等質 G 空間** と呼ぶ.

X をコンパクト等質 G 空間とする. このとき、 X 上の G 不変確率 Radon 測度 μ_X が一意に存在し、 G 上の確率 Haar 測度の標準的な押し出しと一致する. さらに、 X 上の μ_X に関する複素数値 L^2 関数全体の成す Hilbert 空間 $L^2(X)$ は G のユニタリ正則表現となる. ここで、 X の Hecke 代数 (正則表現の自己絡作用素全体の成す代数) の $L^2(X)$ への作用を既約分解することを考える.

以下 Hecke 代数が可換な場合のみ考える. また本稿では、Hecke 代数が可換なとき、コンパクト等質空間 X は **可換** であると言う. 可換コンパクト等質 G 空間 X に対して、次の Peter–Weyl の定理と Plancherel 型の定理が成り立つ. Hecke 代数が可換なので、 $L^2(X)$ への作用の既約分解と同時固有空間分解は同じであることに注意する. $\mathcal{I}$ を同時固有値の集合とする. すなわち、Hecke

本研究は JSPS 科研費 23KJ1641 の助成を受けたものである.

代数 $\mathfrak{A}$ からの代数準同型 $j: \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{C}$ に対して,

$$L_j^2(X) := \left\{ v \in L^2(X) \mid \forall T \in \mathfrak{A}, Tv = j(T) \cdot v \right\}$$

と定め, $\mathcal{J} := \left\{ j: \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{C} \mid j: \text{代数準同型}, L_j^2(X) \neq 0 \right\}$ と定める.

事実 2.1 (Peter–Weyl の定理) 可換コンパクト等質空間 X に対して, 次が成り立つ.

1. $j \neq j'$ なる $j, j' \in \mathcal{J}$ に対して, $L_j^2(X)$ と $L_{j'}^2(X)$ は $L^2(X)$ の部分空間として互いに直交する.
2. 任意の $j \in \mathcal{J}$ に対して $\dim L_j^2(X) < \infty$ と $L_j^2(X) \subset C(X)$ が成り立つ.
3. $\sum_{j \in \mathcal{J}} L_j^2(X) \subset C(X)$ は一様ノルムに関して稠密である.

X^2 への対角 G 作用を考え, その軌道空間 $X^2/\text{diag } G$ を $\mathcal{I}$ と書き, 商写像を $R: X^2 \rightarrow \mathcal{I}$ と書く. このとき, $\mathcal{I}$ はコンパクト Hausdorff 空間であり, $\mathcal{I}$ 上の測度 $\mu_{\mathcal{I}}$ を積測度 $\mu_X \otimes \mu_X$ の R による押し出しを用いて $\mu_{\mathcal{I}} := R_*(\mu_X \otimes \mu_X)/\mu_X(X)$ と定める. また, $\mathcal{J}$ 上の測度 $\mu_{\mathcal{J}}$ を $\mu_{\mathcal{J}}(\{j\}) := m_j := \dim L_j^2(X)$ で定める. さらに, 各 $j \in \mathcal{J}$ に対して, $L_j^2(X)$ の再生核 $\mathcal{K}_j \in C(X^2)$ が定まる. 以上を用いて Plancherel 型の定理を述べる.

事実 2.2 (Plancherel 型の定理) 可換コンパクト等質空間 X に対して, 次が成り立つ.

1. 各 $j \in \mathcal{J}$ に対して, $Q_j \circ R = \mathcal{K}_j$ なる $Q_j \in C(\mathcal{I})$ が一意に存在する.
2. $\left\{ Q_j/\sqrt{m_j} \right\}_{j \in \mathcal{J}}$ は $L^2(\mathcal{I})$ の完全正規直交系を成す.
3. 各 $f \in L^2(\mathcal{I})$ に対して, $\mathcal{J}$ 上の関数 $\hat{f}$ を

$$\hat{f}: \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{C}, j \mapsto \frac{1}{m_j} \langle Q_j | f \rangle_{L^2(\mathcal{I})}$$

と定める. このとき, $\hat{f} \in L^2(\mathcal{J})$ である.

4. (Plancherel 型の定理) Fourier 変換 $L^2(\mathcal{I}) \rightarrow L^2(\mathcal{J})$, $f \mapsto \hat{f}$ は等長同型写像である.

2.2 有限なアソシエーションスキーム

この小節ではアソシエーションスキームの定義と基礎的な事実を紹介する. アソシエーションスキームとは「有限等質空間から群作用を忘れつつ, 対称性は憶えている空間」であり, 具体的な定義は次で与えられる.

定義 2.3 $X, \mathcal{I}$ を有限集合とし, $R: X^2 \rightarrow \mathcal{I}$ を商写像とする. ここで次の 3 つが成り立つとき, R を **アソシエーションスキーム (AS)** と呼ぶ.

- (AS1) $R^{-1}(i_0) = \{(x, x) \in X^2 \mid x \in X\}$ なる $i_0 \in \mathcal{I}$ が存在する.
- (AS2) 任意の $i_1, i_2, k \in \mathcal{I}$ に対して, ある $p_{i_1, i_2}^k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在して, 任意の $(x, z) \in R^{-1}(k)$ に対して

$$p_{i_1, i_2}^k = \# \{ y \in X \mid R(x, y) = i_1, R(y, z) = i_2 \}$$

が成り立つ. この p_{i_1, i_2}^k を **交差数** と呼ぶ.

(AS3) 任意の $i \in \mathcal{I}$ に対して, $R^{-1}(i^\top) = R^{-1}(i)^\top := \{(y, x) \in X^2 \mid (x, y) \in R^{-1}(i)\}$ なる $i^\top \in \mathcal{I}$ が存在する.

さらに, 次の (AS4) (resp. (AS5)) が成り立つとき, R は可換 (resp. 対称) であると言う.

(AS4) 任意の $i_1, i_2, k \in \mathcal{I}$ に対して $p_{i_1, i_2}^k = p_{i_2, i_1}^k$ が成り立つ.

(AS5) 任意の $i \in \mathcal{I}$ に対して, $i^\top = i$ が成り立つ.

注意 2.4 対称な AS は可換である.

例 2.5 AS の例を図にしたものを 3 つ挙げる. それぞれ, $\mathcal{I}$ を色の集合とみなし, $R: X^2 \rightarrow \mathcal{I}$ を用いて X^2 を分割・彩色した図である.

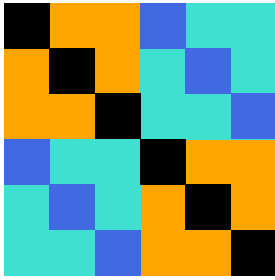


図 1 対称な AS

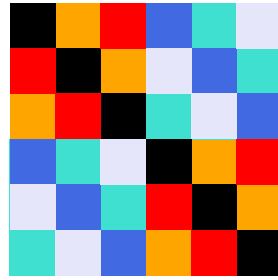


図 2 対称でない可換な AS

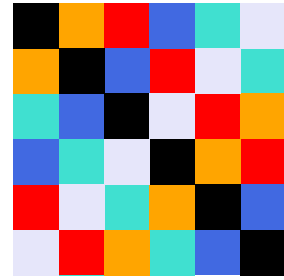


図 3 可換でない AS

続いて, AS $R: X^2 \rightarrow \mathcal{I}$ についての Hecke 代数である Bose–Mesner 代数を定義する. X^2 上の複素数値関数全体の成す空間を $\text{Mat}(X)$ と書く. この空間の元は X で添え字付けられた正方行列とみなせる. 各 $i \in \mathcal{I}$ に対して, $R^{-1}(i) \subset X^2$ の指示関数を $A_i \in \text{Mat}(X)$ と書く. このとき, $\{A_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ は一次独立である. そこで, $\{A_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ が張る $\text{Mat}(X)$ の部分空間を AS R の Bose–Mesner 代数 (BMA) と呼び, $\mathfrak{A}$ と書く. Bose–Mesner 代数 $\mathfrak{A}$ は次の性質を満たす.

1. (a) A_{i_0} は単位行列 I に等しい.
(b) $\sum_{i \in \mathcal{I}} A_i$ はすべての成分が 1 の行列 J に等しい.
2. $\mathfrak{A}$ は行列積で閉じる.
3. $\mathfrak{A}$ は転置で閉じる.

さらに, AS R が可換 (resp. 対称) なら, 次の 4 (resp. 5) が成り立つ.

4. $\mathfrak{A}$ 上の行列積は可換である.
5. 任意の $A \in \mathfrak{A}$ に対して $A^\top = A$ が成り立つ.

さらに AS R が可換な場合, $\mathfrak{A}$ には行列積に関する原始冪等元から成る基底 $\{E_j\}_{j \in \mathcal{J}}$ が一意に存在し, 次が成り立つ.

1. $\#XE_{j_0} = J$ なる $j_0 \in \mathcal{J}$ が存在する.
2. $\sum_{j \in \mathcal{J}} E_j = I$ である.
3. 任意の $j \in \mathcal{J}$ に対して, $E_{\bar{j}} = \overline{E_j}$ なる $\bar{j} \in \mathcal{J}$ が存在する.
4. 任意の $j \in \mathcal{J}$ に対して, $E_j^* = E_j$ が成り立つ.

また, Peter–Weyl 型の定理と Plancherel 型の定理が成り立つ.

定理 2.6 (Peter–Weyl 型の定理) X 上の複素数値関数全体の成す空間を $\text{Vec}(X)$ と書く．また, 各 $j \in \mathcal{J}$ に対して, $\text{Vec}_j(X)$ と m_j を $\text{Vec}_j(X) := \{E_j v \mid v \in \text{Vec}(X)\}$ と $m_j := \dim \text{Vec}_j(X)$ で定める．このとき, 相異なる $j, j' \in \mathcal{J}$ に対して, $\text{Vec}_j(X)$ と $\text{Vec}_{j'}(X)$ は標準内積について互いに直交する．

定理 2.7 (Plancherel 型の定理) $\{E_j\}_{j \in \mathcal{J}}$ から $\{A_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ への基底変換行列を指標表と呼び, P と書く．つまり $A_i = \sum_{j \in \mathcal{J}} P(j, i) E_j$ が成り立つように指標表 P を定める．このように定義すると, 第一直交関係と第二直交関係

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} \frac{1}{k_i} \overline{P(j_1, i)} P(j_2, i) = \frac{\#X}{m_{j_1}} \delta_{j_1, j_2}, \quad \sum_{j \in \mathcal{J}} m_j \overline{P(j, i_1)} P(j, i_2) = \#X k_{i_1} \delta_{i_1, i_2}$$

が成り立つ．

3 コンパクトアソシエーションスキーム

この節ではコンパクトアソシエーションスキームとその Bose–Mesner 代数を定め, それらの重要な性質や例を紹介する．まず, コンパクトアソシエーションスキームを定義する．基本的なアイデアは交差数を $p: k \mapsto ((i_1, i_2) \mapsto p_{i_1, i_2}^k)$ という $\mathcal{I}^2$ 上の分布を与える写像とみなし, $\mathcal{I}^2$ 上の測度を与える写像 $p: \mathcal{I} \rightarrow \text{Meas}(\mathcal{I}^2)$ に一般化することである．

定義 3.1 $X, \mathcal{I}$ をコンパクト Hausdorff 空間とし, $R: X^2 \rightarrow \mathcal{I}$ を商写像とする．ここで次の 3 つが成り立つとき, R をコンパクトアソシエーションスキームと呼ぶ．

(CAS1) $R^{-1}(i_0) = \{(x, x) \in X^2 \mid x \in X\}$ なる $i_0 \in \mathcal{I}$ が存在する．

(CAS2) ある X 上の狭義正 Radon 測度 μ_X が存在して, 任意の Borel 集合 $W_1, W_2 \subset \mathcal{I}$ と任意の $k \in \mathcal{I}$ に対して, ある $p_{W_1, W_2}^k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ が存在して, 任意の $(x, z) \in R^{-1}(k)$ に対して

$$p_{W_1, W_2}^k = \mu_X(\{y \in X \mid R(x, y) \in W_1, R(y, z) \in W_2\})$$

が成り立つ．

(CAS3) 任意の $i \in \mathcal{I}$ に対して, $R^{-1}(i^\top) = R^{-1}(i)^\top$ なる $i^\top \in \mathcal{I}$ が存在する．

さらに, 次の (CAS4) (resp. (CAS5)) が成り立つとき, R は可換 (resp. 対称) であると言う．

(CAS4) 任意の Borel 集合 $W_1, W_2 \subset \mathcal{I}$ と任意の $k \in \mathcal{I}$ に対して, $p_{W_1, W_2}^k = p_{W_2, W_1}^k$ が成り立つ．

(CAS5) 任意の $i \in \mathcal{I}$ に対して, $i^\top = i$ が成り立つ．

注意 3.2 各コンパクト AS において, (CAS2) を満たす μ_X は正の定数倍を除いて一意である．

注意 3.3 対称なコンパクト AS は可換である．

次に, コンパクト AS $R: X^2 \rightarrow \mathcal{I}$ の Bose–Mesner 代数を定める． X^2 上の複素数値連続関数全体が成す空間 $\text{Mat}(X)$ も行列代数と同様に, 行列積 $*$ や各点積 $\circ$, 転置 ${}^\top$, 複素共役 $\bar{}$ の演算を

備えている。ただし、行列積 $*$ は

$$A * B(x, z) := \int_y A(x, y) \cdot B(y, z) d\mu_X$$

と定めている。ここで、 $C(\mathcal{I})$ の R による引き戻し $\mathfrak{A} := R^*(C(\mathcal{I}))$ を R の Bose–Mesner 代数と呼ぶ。 $\mathfrak{A}$ は $(\text{Mat}(X), \circ, \bar{\cdot}, \|\cdot\|_\infty)$ の単位的 C^* 部分代数であり、次の性質を満たす。

(BMA1) (a) あるネット $(I_N)_N \subset \mathfrak{A}$ が存在して、 $(I_N)_N$ は Banach 代数 $(\text{Mat}(X), *, \|\cdot\|_\infty)$ の近似単位元である。

(b) $\mathfrak{A} * J \subset \mathbb{C}J$ である。ただし、 J は値 1 の定数関数である。

(BMA2) $\mathfrak{A}$ は行列積で閉じる。

(BMA3) $\mathfrak{A}$ は転置で閉じる。

さらに、コンパクト AS R が可換 (resp. 対称) なら、次の (BMA4) (resp. (BMA5)) が成り立つ。

(BMA4) $\mathfrak{A}$ 上の行列積は可換である。

(BMA5) 任意の $A \in \mathfrak{A}$ に対して、 $A^\top = A$ が成り立つ。

ここではコンパクト AS に対して BMA を定めたが、実はコンパクト AS を与えることと BMA を与えることは等価である。さらに、コンパクト AS の可換性 (resp. 対称性) と、対応する BMA の可換性 (resp. 対称性) は同値である。これは有限 AS の場合と同様の結果である。

以上の定義により、コンパクト AS は有限 AS とコンパクト等質空間の共通の一般化となる。

例 3.4 (有限なアソシエーションスキーム) 有限 AS はコンパクト AS である。より正確に述べると、有限 AS はコンパクト AS $R: X^2 \rightarrow \mathcal{I}$ であって、 X と $\mathcal{I}$ が有限集合であるものにちょうど対応する。また、可換性や対称性も整合的に定義されている。

例 3.5 (コンパクト等質空間) X をコンパクト等質 G 空間とする。このとき、軌道分解 $R: X^2 \rightarrow X^2/\text{diag } G$ はコンパクト AS である。また、BMA は Hecke 代数と同型である。

参考文献

- [1] E. Bannai, E. Bannai, T. Ito, and R. Tanaka. Algebraic combinatorics, volume 5. Walter de Gruyter GmbH & Co KG, 2021.
- [2] P. Delsarte. An algebraic approach to the association schemes of coding theory. Philips Res. Rep. Suppl., (10):vi+97, 1973.
- [3] M. Takeuchi. Modern spherical functions, volume 135 of Translations of Mathematical Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI, 1994. Translated from the 1975 Japanese original by Toshinobu Nagura.

波面の D_4 特異点の幾何

佐治健太郎*

1 波面の $D_4^\pm$ 特異点と $SO(3)$ 標準形

定義 1.1. 微分可能写像芽 $f : (\mathbf{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^3, 0)$ がフロンタルであるとは写像 $\nu : (\mathbf{R}^2, 0) \rightarrow \mathbf{R}^3$ が存在して

$$|\nu| = 1, \quad df_p(X) \cdot \nu(p) = 0$$

が任意の $p \in (\mathbf{R}^2, 0)$, $X \in T_p \mathbf{R}^2$ に対して成り立つときをいう. ここで ν を f の単位法線ベクトルという. フロンタル $f : (\mathbf{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^3, 0)$ が波面 (フロント) であるとは単位法線ベクトル ν に対して写像 $(f, \nu) : (\mathbf{R}^2, 0) \rightarrow \mathbf{R}^3 \times S^2$ がはめこみであるときをいう. ここで $S^2 = \{x \in \mathbf{R}^3 \mid |x| = 1\}$ である.

はめこみ $f : (\mathbf{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^3, 0)$ は単位法線ベクトル ν をとれば波面であることがわかる. はめこみでなくても単位法線ベクトル ν がとれる場合があるので, フロンタル・波面は一般に特異点をもつ.

定義 1.2. 式 $(u, v) \mapsto (u, v^2, v^3)$ で定義される写像の原点における写像芽に定義域の微分同相写像芽・像域の微分同相写像芽でうつりあう ($\mathcal{A}$ -同値という) ものをカスパ辺 (cuspidal edge) といい, $(u, v) \mapsto (u, 4v^3 + 2uv, 3v^4 + uv^2)$ に $\mathcal{A}$ -同値なものをものをツバメの尾 (swallowtail) という.

これらの特異点の集合はそれぞれ $\{(u, v) \mid v = 0\}$, $\{(u, v) \mid 6v^2 + u = 0\}$ であり, 原点で $\text{rank } df_0 = 1$ である (余階数 1 という). Cuspidal edge は関数 $h : t \mapsto t^3$ に対してその 3 変数の Morse 関数族

$$H(t, x, y, z) = t^3 + x + ty$$

の判別集合

$$\mathcal{D}_H = \{(x, y, z) \mid \text{ある } t \text{ が存在して } H(t, x, y, z) = H_t(t, x, y, z) = 0\}$$

のパラメーター表示である. Swallowtail は関数 $h(t) = t^4$ の Morse 関数族

$$H(t, x, y, z) = t^4 + x + ty + t^2 z$$

本研究にあたり, 科研費 22KK0034, 25K07001 の支援を受けた.

* 神戸大学・大学院理学研究科, saji@math.kobe-u.ac.jp

の判別集合 $\mathcal{D}_H$ のパラメーター表示である．波面に対してジェネリックな特異点 (その特異点のみをもつ波面は波面全体の中で稠密・開である) は cuspidal edge と swallowtail であり, 1-パラメーターで変形する波面に対してジェネリックな特異点はこれらと他のいくつかの余階数 1 の特異点と以下で述べる $D_4^\pm$ 特異点である．

定義 1.3. 式

$$\begin{aligned}(u, v) &\mapsto (u^2 - v^2, u^2 + v^2, u^3 + v^3) \quad (+ \text{ のとき}), \\(u, v) &\mapsto (u^2 - v^2, uv, u^3 - 3uv^2) \quad (- \text{ のとき})\end{aligned}$$

に $\mathcal{A}$ -同値であるものを $D_4^\pm$ 特異点という．

これらは変数 (u, v) の $D_4^\pm$ 関数

$$\frac{u^3}{6} \pm \frac{uv^2}{2}$$

の Morse 関数族

$$H(u, v, x, y, z) = \frac{u^3}{6} \pm \frac{uv^2}{2} + xu + yv + z$$

の判別集合 $\mathcal{D}_H$ のパラメーター表示である (図 1)．近年, 特異点をもつ曲線・曲面の幾何学の研究

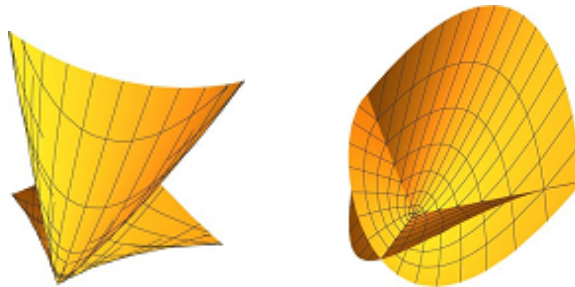


図 1 D_4^+ 特異点 (左) と D_4^- 特異点 (右)

が盛んに行われているが, 余階数 1 の場合が中心である．式をみればわかるように $D_4^\pm$ 特異点は余階数 2 である．余階数 2 の特異点に対してはどの方向から入射する曲線も正則曲線にならず, 曲面論や余階数 1 の場合に有効であった手法が使いにくい．このような特異点周辺の微分幾何的性質を調べたい場合, $\mathcal{A}$ -同値は微分幾何的性質を保存しないため, 次のような $SO(3)$ 標準形と呼ばれる表示を用いて研究する方法がある．

定義 1.4. 写像芽 $f, g : (\mathbf{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^3, 0)$ が $\text{Diff}_+(2) \times SO(3)$ -同値であるとは向きを保つ微分同相写像芽 $s : (\mathbf{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^2, 0)$, $A \in SO(3)$ が存在して

$$A \circ f \circ s^{-1} = g$$

が成り立つときをいう．

定義から $\text{Diff}_+(2) \times SO(3)$ -同値な写像芽は微分幾何的に同じである. ある写像芽の $\text{Diff}_+(2) \times SO(3)$ -同値に関する代表元で性質の良いものをその写像芽の $SO(3)$ 標準形 (または標準形) という.

2 $D_4^\pm$ 特異点の $SO(3)$ 標準形

次が成り立つ.

補題 2.1. (1) D_4^+ 特異点 $f : (\mathbf{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^3, 0)$ に対して座標 (u, v) と $\varphi_1(0, 0)$ と $\varphi_2(0, 0)$ が一次独立であるような $\varphi_1, \varphi_2 : (\mathbf{R}^2, 0) \rightarrow \mathbf{R}^3$ が存在して

$$f_u = u\varphi_1(u, v), \quad f_v = v\varphi_2(u, v)$$

が成り立つ.

(2) D_4^- 特異点 $f : (\mathbf{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^3, 0)$ に対して座標 (u, v) と $\varphi_1(0, 0)$ と $\varphi_2(0, 0)$ が一次独立であるような $\varphi_1, \varphi_2 : (\mathbf{R}^2, 0) \rightarrow \mathbf{R}^3$ が存在して

$$f_u = u\varphi_1(u, v) + v\varphi_2(u, v), \quad f_v = -v\varphi_1(u, v) + u\varphi_2(u, v)$$

が成り立つ.

これらを用いると次が示せる.

定理 2.2 ([4, 5]). (1) 補題 2.1 の (1) の結論をみたすようなフロンタル芽 $f : (\mathbf{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^3, 0)$ に対して $a \in \mathbf{R}$, $b_1, b_3, c_1, c_3 \in C^\infty(1, 1)$, $b_2, c_2 \in C^\infty(2, 1)$, $s \in \text{Diff}_+(2)$, $A \in SO(3)$ が存在して

$$A \circ f(s^{-1}(u, v)) = \left(u^2 - v^2, a(u^2 + v^2) + u^3b_1(u) + u^2v^2b_2(u, v) + v^3b_3(v), \right. \\ \left. u^3c_1(u) + u^2v^2c_2(u, v) + v^3c_3(v) \right) \quad (2.1)$$

が成り立つ. ただし $a > 0$, $c_1(0) \geq 0$, $c_3(0) \geq 0$ である.

(2) 補題 2.1 の (2) の結論をみたすようなフロンタル芽 $f : (\mathbf{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^3, 0)$ に対して $a \in \mathbf{R}$, $a, b, c \in C^\infty(2, 1)$, $s \in \text{Diff}_+(2)$, $A \in SO(3)$ が存在して

$$f(u, v) = \left((u^2 - v^2)/2 + a(u, v), auv + b(u, v), c(u, v) \right), \quad (2.2) \\ j^2a(0) = j^2b(0) = j^2c(0) = 0$$

が成り立つ. ただし

$$a(u, v) = a_1(u^2, v^2) + ua_2(u^2, v^2) + va_3(u^2, v^2) + uva_4(u^2, v^2), \\ b(u, v) = b_1(u^2, v^2) + ub_2(u^2, v^2) + vb_3(u^2, v^2) + uvb_4(u^2, v^2), \\ c(u, v) = c_1(u^2, v^2) + uc_2(u^2, v^2) + vc_3(u^2, v^2) + uvc_4(u^2, v^2)$$

とおくと,

$$(d_1)_u + (d_1)_v \Big|_{(u,v)=(t,-t)} = 0, \quad (2.3)$$

$$d_2 - 2v((d_2)_u + (d_2)_v) \Big|_{(u,v)=(t,-t)} = 0, \quad (2.4)$$

$$d_3 + 2v((d_3)_u + (d_3)_v) \Big|_{(u,v)=(t,-t)} = 0, \quad (2.5)$$

$$(d_4)_u + (d_4)_v \Big|_{(u,v)=(t,-t)} = 0 \quad (2.6)$$

をみたす. ただし, $d = a, b, c$.

これらは一意性をみたさないが 3-jet までの標準形で一意性をみたすものが作れる.

定理 2.3 ([4, 5]). 写像芽 $f : (\mathbf{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^3, 0)$ は $D_4^\pm$ 特異点とする. このとき, 局所座標 (u, v) と $A \in SO(3)$, $a > 0$, $b_{30}, b_{03}, c_{30}, c_{03} \in \mathbf{R}$ $c_{30} > 0$, $c_{03} > 0$ が存在して

$$j^3(A \circ f)(0, 0) = \begin{cases} (u^2 - v^2, a(u^2 + v^2) + b_{30}u^3 + b_{03}v^3, c_{30}u^3 + c_{03}v^3) & (+) \\ (u^2 - v^2, auv + b_{30}u^3 - b_{03}u^2v - b_{30}uv^2 + b_{03}v^3, \\ c_{30}u^3 - c_{03}u^2v - c_{30}uv^2 + c_{03}v^3) & (-) \end{cases}$$

となる.

この式の右辺を $f_{(a, b_{30}, b_{03}, c_{30}, c_{03})}$ と書くことにするとさらに次が成り立つ. $D_4^\pm$ 特異点 $f_{(a, b_{30}, b_{03}, c_{30}, c_{03})}$, $f_{(a', b'_{30}, b'_{03}, c'_{30}, c'_{03})}$ が定義域の座標変換と像域の $SO(3)$ による変換で 3-jet までが一致するようにできるならば

$$(a, b_{30}, b_{03}, c_{30}, c_{03}) = (a', b'_{30}, b'_{03}, c'_{30}, c'_{03})$$

となる. ここに現れた係数はすべて微分幾何的不変量であり, 与えられた写像芽に対して一意的に定まるので, 写像の性質を言い表すための言葉として用いることができる.

3 $D_4^\pm$ 特異点の幾何学

ここでは定理 2.3 により分かる $D_4^\pm$ 特異点の性質を述べる.

3.1 D_4^+ 特異点

写像芽 f を D_4^+ 特異点とし, そのパラメーター表示を定理 2.3 のものとする. このとき f の特異点集合は $\{uv = 0\}$ であり, ガウス曲率 K は

$$K = \frac{1}{uv} \left(\frac{c_{03}c_{30}}{16a^2} + O(1) \right)$$

となり, 自己交差曲線 $i(t)$ は

$$i(t) = \left(1, - \left(\frac{c_{03}}{c_{30}} \right)^{1/3} \right) t + O(2)$$

となる．ゆえに，自己交差のある領域はガウス曲率が常に負である．さらに $\{v = 0\}$ 上の特異曲率 $\kappa_s(u)$ (測地曲率に符号を適切につけたもの) は

$$\kappa_s(u) = \frac{1}{u} \left(\frac{b_{30}}{2(1+a^2)^{3/2}} + O(u) \right)$$

となる．特異曲率の幾何学的意味 [7, Theorem 1.17] から, $b_{30}b_{03}$ の符号により特異点の近辺での cuspidal edge の曲がり方は図 2 のようになることがわかる．

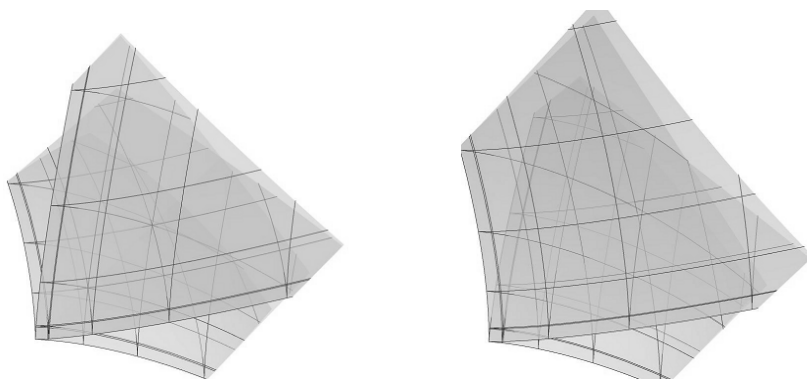


図 2 $b_{30}b_{03} > 0$ のとき

$b_{30}b_{03} < 0$ のとき

ベクトル ν を f の単位法線ベクトルとする．原点を通る平面 $\nu^\perp$ を接平面という．また, $\hat{\gamma}_1(v) = f(0, v)$, $\hat{\gamma}_2(u) = f(u, 0)$ とおくとこれらは特異点集合のパラメーター表示であり, $\hat{\gamma}_i''(0)$ ($i = 1, 2$) は一次独立であることがわかる．これらで生成される直線を特異曲線の接線といい (図 4), 曲面のある部分のこれらの二等分線を中心線という．中心線の法平面で原点を通るものを法平面という．中心線と $\nu(0)$ で生成される平面を主平面という (図 3)．次がわかる．

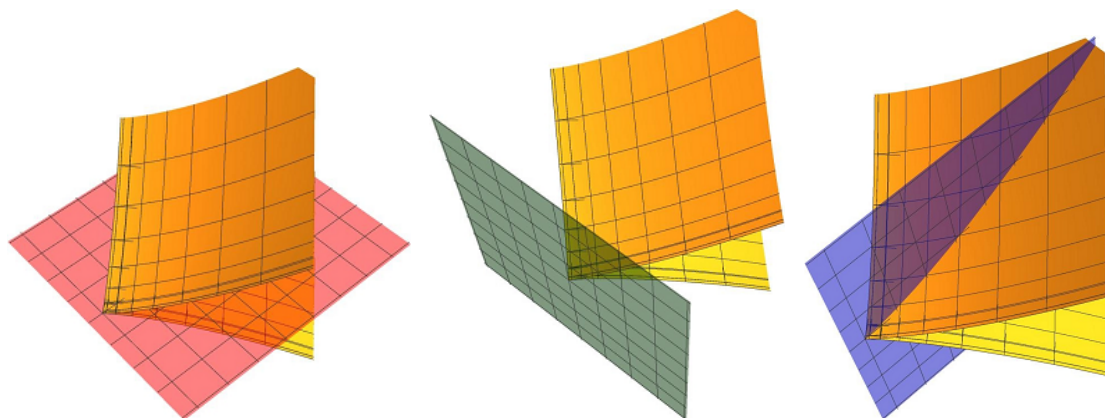


図 3 接平面, 法平面, 主平面

定理 3.1. 写像芽 $f : (\mathbf{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^3, 0)$ は D_4^+ 特異点とする．直交行列 $T \in O(2)$ が存在して $0 \in \mathbf{R}^3$ の集合芽として $T \circ f(U) = f(U)$ をみたし, T が恒等写像でないとき, T は

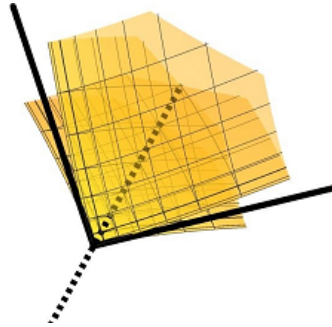


図4 中心線 (点線) と特異曲線の接線 (実線)

- (1) 接平面に関する折り返し,
- (2) 主平面に関する折り返し,
- (3) 中心線に関する π 回転

のどれかである. さらに f が定理 2.3 の形であり, 解析的であれば,

- (4) 上記の (1) の必要十分条件は $b(u, v) = b(-u, -v)$, $c(u, v) = -c(-u, -v)$ である.
- (5) 上記の (2) の必要十分条件は $b(u, v) = b(v, u)$, $c(u, v) = c(v, u)$ である.
- (6) 上記の (3) の必要十分条件は $b(u, v) = b(-v, -u)$, $c(u, v) = -c(-v, -u)$ である.

他の特異点の対称性については [2] を参照.

3.2 D_4^- 特異点

写像芽 f を D_4^- 特異点とし, そのパラメーター表示を定理 2.3 のものとする. このとき f の特異点集合は原点のみであり, ガウス曲率 K と平均曲率 H は

$$K = \frac{1}{u^2 + v^2} \left(-\frac{c_{30}^2 + c_{03}^2}{4a^2} + O(1) \right),$$

$$H = \frac{1}{u^2 + v^2} \left(\frac{a^2 - 1}{2a} (c_{30}u + c_{03}v) + O(2) \right)$$

である. また, この式から特異点付近でガウス曲率は負の無限大に発散することがわかる. さらに平均曲率が発散しないためには $a = 1$ である必要があることから, Weierstrass 型表現公式

$$k = \operatorname{Re} \int \begin{pmatrix} (1 - g^2)h \\ i(1 + g^2)h \\ 2gh \end{pmatrix} dz.$$

で与えられた極小曲面 k は $g_z h_z \neq 0$ のとき D_4^- 特異点をもつことが知られている [3] が, この極小曲面の定理 2.3 にあられる不変量 a の値は $a = 1$ であることがわかる. 一方 k の式の 2-jet を変形して直接 $a = 1$ を示すこともできる. 特異点付近でガウス曲率が常に負であることから,

D_4^- 特異点付近には漸近線が存在する. 単位法線ベクトルを ν とし, ν から定まる第二基本形式の係数を

$$L = f_{uu} \cdot \nu, \quad M = f_{uv} \cdot \nu, \quad N = f_{vv} \cdot \nu$$

とし, $(0, 2)$ 対称形式

$$w_{as} = L du^2 + 2M dudv + N dv^2$$

を考える. ベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(\mathbf{R}^2, 0)$ が $w_{as} = 0$ の解であるとは $w_{as}(X, X) = 0$ のときと定義し, $w_{as} = 0$ が定める模様とは $w_{as} = 0$ の解の積分曲線のこととする. 次がわかる.

定理 3.2. 写像芽 f は D_4^- 特異点とする. このとき座標 (u, v) が存在して w_{as} は

$$j^1(\Phi^* w_{as}) = -v du^2 - 2u dudv + v dv^2.$$

をみtas.

ここに現れた $(0, 2)$ 対称形式に対して $-v du^2 - 2u dudv + v dv^2 = 0$ が定める模様は [1] によって与えられており, 図 5 のようになる. ここで, w_{as} は X の方向に関する二次方程式となってお

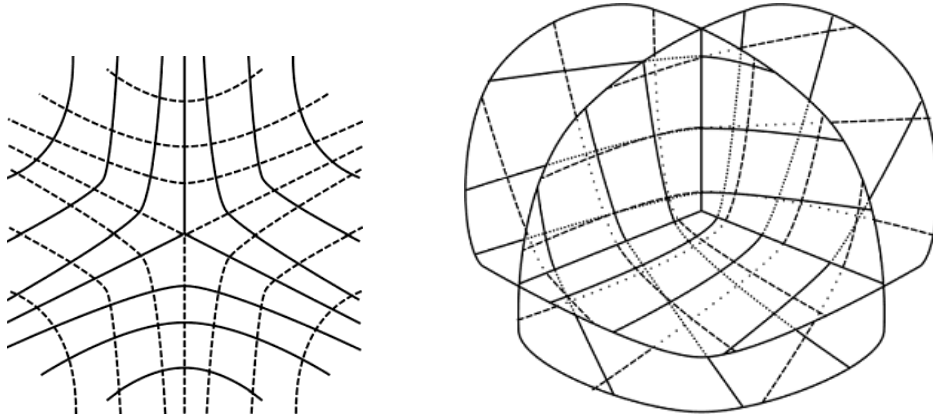


図 5 D_4^- 特異点付近の漸近線, 定義域 (左) と像 (右)

り, その判別式が原点以外では正であるため, 原点以外では一次独立な 2 つの方向が $w_{as} = 0$ の解となる. その 2 つの方向の線種を分けて描いてある.

補題 2.1 の性質を取り出して抽象的な設定下で $D_4^\pm$ 特異点を調べることができる.

4 大域的な公式

M を向き付けられた閉曲面とする.

定義 4.1. 写像 $f : M \rightarrow \mathbf{R}^3$ が余向き付可能な波面であるとは

$$\nu : M \rightarrow S^2 \quad (S^2 = \{x \in \mathbf{R}^3 \mid |x| = 1\})$$

が存在して任意の $p \in M$, $X \in T_p M$ に対して

$$df_p(X) \cdot \nu(p) = 0 \quad \text{かつ} \quad (f, \nu) : \text{はめこみ}$$

が成り立つときをいう.

波面とは局所的に単位法線ベクトルが特異点を越えて拡張可能なものをいう. 余向き付可能な波面とはその単位法線ベクトルが M 全体に拡張可能なものである. 余向き付可能な波面 $f : M \rightarrow \mathbf{R}^3$ に対して $p \in M \setminus S(f)$ が **+** の正則点であるとは ν が M の向き付けに対して正の方向であるときをいい **-** の正則点であるとは ν が M の向き付けに対して負の方向であるときをいう. $M_{\pm}$ を $\pm$ の正則点の集合とする.

定理 4.2. 余向き付け可能波面 $f : M \rightarrow \mathbf{R}^3$ は特異点として $\text{rank} = 1$ であり, 高々 peak であるものと $D_4^{\pm}$ 特異点のみを持つとする. このとき

$$\begin{aligned} 2\pi\chi(M) = \int_M K dA + 2 \int_{S(f)} \kappa_s ds \\ + \sum_{P_i \in S_{D_4^+}(f)} (4\angle_{D_4^+}(P_i) - 2\pi) + 2\pi\sharp(S_{D_4^-}(f)) \end{aligned}$$

$$2 \deg(\nu) = \chi(M_+) - \chi(M_-) + \sharp(P_+) - \sharp(P_-) + \sharp((D_4^-)_+) - \sharp((D_4^-)_-)$$

が成り立つ. ここで, $S_{D_4^{\pm}}(f)$ は f の $D_4^{\pm}$ 特異点の集合, $(D_4^{\pm})_{\pm}$ は周囲が $\pm$ の正則点であるような $D_4^{\pm}$ 特異点を表す. また, $\angle_{D_4^+}(p)$ は D_4^+ 特異点 p に対して, 特異曲線の接線のなす角を表す.

これは $D_4^{\pm}$ 特異点がない場合の同様の公式 [6, 7] に $D_4^{\pm}$ 特異点の寄与が加わった形をしている ([5]). ここで $\text{rank } df = 1$ である特異点についての記号は κ_s は特異曲率であり, $P_{\pm}$ は $\pm$ の peak を表す. ただし peak の定義を含めた詳細は [6, 7] を参照されたい.

参考文献

- [1] J. W. Bruce and D. L. Fidal, *On binary differential equations and umbilics*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **111** (1989), no. 1-2, 147–168.
- [2] A. Honda, K. Naokawa, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Symmetries of cross caps*, Tohoku Math. J. (2) **75** (2023), no. 1, 131–141.
- [3] Y. Ogata and K. Teramoto, *Constant mean curvature surfaces with D_4 -singularities*, Adv. Stud. Pure Math., **78** (2018), 345–363.
- [4] K. Saji, *Normal form of D_4^+ -singularities of fronts and its applications*, Michigan Math. J. Advance Publication 1-16 (2025). DOI: 10.1307/mmj/20236470.
- [5] K. Saji, *Geometry of D_4^- -front singularities and a Gauss-Bonnet type formula*, arXiv:2606.29491.

- [6] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Behavior of corank-one singular points on wave fronts*, Kyushu J. Math. **62** (2008), no. 1, 259–280.
- [7] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *The geometry of fronts*, Ann. of Math. (2) **169** (2009), no. 2, 491–529.

第73回幾何学シンポジウム

2026

福岡大学