

# 平行移動写像と弱鏡映部分多様体の アファイン微分幾何学

森本 真弘 (東京都立大学)\*

## 1 序論

1988 年, R. S. Palais と C.-L. Terng [10, 11] はヒルベルト空間の部分多様体論の研究を開始した. 彼らは, Palais-Smale の無限次元モース理論や微分トポロジーの結果を応用するのに適した, Proper Fredholm (PF) 部分多様体と呼ばれるクラスを導入した. その具体例として, 彼らはゲージ変換群作用の軌道を研究し, その過程において, **平行移動写像**と呼ばれる同変な沈め込み写像  $\Phi: V_{\mathfrak{g}} \rightarrow G$  を導入した. ここで  $G$  は両側不変リーマン計量を備えた連結コンパクト・リー群であり,  $V_{\mathfrak{g}} := L^2([0, 1], \mathfrak{g})$  は閉区間  $[0, 1]$  から  $G$  のリー代数  $\mathfrak{g}$  への  $L^2$  写像全体のなす可分ヒルベルト空間を表す.

1995 年, C.-L. Terng と G. Thorbergsson [12] は, 平行移動写像  $\Phi$  がリーマン沈め込みとなることを示した. 更に, コンパクト・リーマン対称空間  $G/K$  と射影  $\pi: G \rightarrow G/K$  に対して, リーマン沈め込み  $\Phi_{G/K} := \pi \circ \Phi: V_{\mathfrak{g}} \rightarrow G \rightarrow G/K$  を研究した. 今日, それは  $G/K$  上の平行移動写像と呼ばれる.  $G/K$  の部分多様体  $M$  に対して, 逆像  $\Phi_{G/K}^{-1}(M)$  は  $V_{\mathfrak{g}}$  の PF 部分多様体となる. 彼らは  $G/K$  の部分多様体幾何を,  $V_{\mathfrak{g}}$  の PF 部分多様体幾何に還元する画期的研究を行った.  $G/K$  が非コンパクト型の場合, 両側不変リーマン計量の非存在が問題となるが, 小池直之 [3] により, 平行移動写像  $\Phi, \Phi_{G/K}$  が擬リーマン沈め込みとなることが示され, 擬リーマン幾何学の枠組みで研究が行われている.

講演者 [5, 6] は最近, より一般にアファイン対称空間や reductive 等質空間上において, 平行移動写像が (計量に無依存に) 定義され, それが安部直人・長谷川和志 [1] が導入した「水平分布つきアファイン沈め込み」となることを示した. また, 弱鏡映部分多様体という特殊な部分多様体 (井川治・酒井高司・田崎博之 [2]) との関係について, 講演者の以前の結果が一般化されることも示した. 本講演では, これらの結果について発表する.

## 2 アファインはめ込みとアファイン沈め込み

等長はめ込みやリーマン沈め込みの一般化として, アファインはめ込みやアファイン沈め込みが定義される [1, 9]. 本節ではその基本事項を復習する. 本節で述べる事実は, 多様体が無限次元ヒルベルト多様体の場合においても成り立つ.

$M$  と  $N$  を  $C^\infty$  級多様体,  $\varphi: M \rightarrow N$  をはめ込みとする.  $\varphi$  の**横断束**とは, 引き戻し束  $\varphi^*TN$  の部分束  $\mathcal{W}$  であって, 条件  $\varphi^*TN = d\varphi(TM) \oplus \mathcal{W}$  を満たすものをいう.

---

\* 〒192-0397 東京都八王子市南大沢 1-1 東京都立大学 大学院理学研究科, 日本学術振興会特別研究員 PD  
e-mail: morimoto.mshr@gmail.com

本研究は特別研究員奨励費 (課題番号: 23KJ1793) の助成を受けたものである.

$(M, \nabla^M)$ ,  $(N, \nabla^N)$  をアファイン多様体,  $\varphi: M \rightarrow N$  をはめ込み,  $\mathcal{W}$  を  $\varphi$  の横断束とする.  $\varphi$  が**アファインはめ込み with 横断束**  $\mathcal{W}$  であるとは, 条件

$$d\varphi(\nabla_X^M Y) = (\nabla_X^{\varphi^*TN} d\varphi(Y))^\top, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

が成り立つことをいう. ここで  $\top$  は接成分への射影を表し,  $\mathfrak{X}(M)$  は  $M$  上の  $C^\infty$  級ベクトル場全体を表す. ガウス公式・ワインガルテン公式

$$\nabla_X^{\varphi^*TN} d\varphi(Y) = d\varphi(\nabla_X^M Y) \oplus \alpha^\varphi(X, Y), \quad \nabla_X^{\varphi^*TN} Z = -d\varphi(A_Z^\varphi(X)) \oplus \nabla_X^\mathcal{W} Z$$

を通して, **アファイン基本形式**  $\alpha^\varphi$ , **形作用素**  $A^\varphi$  及び**横断接続**  $\nabla^\mathcal{W}$  が定まる ( $Z \in \Gamma(\mathcal{W})$ ).  $\Gamma(\mathcal{W})$  は  $\mathcal{W}$  の  $C^\infty$  級切断全体を表す.

$M$  を  $C^\infty$  級多様体,  $(N, \nabla^N)$  をアファイン多様体,  $\varphi: M \rightarrow N$  をはめ込み,  $\mathcal{W}$  を  $\varphi$  の横断束とする. このとき  $M$  のアファイン接続  $\nabla^M$  がただ一つ存在して,  $\varphi: (M, \nabla^M) \rightarrow (N, \nabla^N)$  はアファインはめ込み with 横断束  $\mathcal{W}$  となる.

$\hat{N}$ ,  $N$  を  $C^\infty$  級多様体,  $\pi: \hat{N} \rightarrow N$  を沈め込みとする. このとき  $\pi$  の**垂直分布**  $\mathcal{V}$  が  $\mathcal{V}_u := \text{Ker}(d\pi)_u$  ( $u \in \hat{N}$ ) により定まる.  $\pi$  の**水平分布** とは,  $T\hat{N}$  の部分束  $\mathcal{H}$  であって  $T\hat{N} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{H}$  を満たすものをいう.

$(N, \nabla)$ ,  $(\hat{N}, \hat{\nabla})$  をアファイン多様体,  $\pi: \hat{N} \rightarrow N$  を沈め込み,  $\mathcal{H}$  を  $\pi$  の水平分布とする.  $\pi$  が**アファイン沈め込み with 水平分布**  $\mathcal{H}$  であるとは, 条件

$$(\hat{\nabla}_{\hat{X}} \hat{Y})^\mathcal{H} = (\nabla_X Y)^\mathcal{H} \quad X, Y \in \mathfrak{X}(N)$$

が成り立つことをいう. ここで  $\hat{X}$  は  $X$  の水平リフトを表す. 左辺の  $\mathcal{H}$  は水平成分への射影を表す. 垂直成分への射影は  $\mathcal{V}$  で表す. 擬リーマン沈め込みの場合と同様に, 基本テンソル  $\mathcal{T}$  と  $\mathcal{A}$  が次で定義される ( $Z, W \in \mathfrak{X}(\hat{N})$ ):

$$\mathcal{T}_Z W = (\hat{\nabla}_{Z^\mathcal{V}} W^\mathcal{V})^\mathcal{H} + (\hat{\nabla}_{Z^\mathcal{V}} W^\mathcal{H})^\mathcal{V}, \quad \mathcal{A}_Z W = (\hat{\nabla}_{Z^\mathcal{H}} W^\mathcal{H})^\mathcal{V} + (\hat{\nabla}_{Z^\mathcal{H}} W^\mathcal{V})^\mathcal{H},$$

特に,  $\mathcal{A}$  の  $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$  への制限が交代形式であるとき,  $(N, \nabla)$  の測地線の水平リフトは  $(\hat{N}, \hat{\nabla})$  の測地線となる. この性質は, 擬リーマン沈め込みにおいては常に成り立つ.

### 3 平行移動写像

$G$  を有限次元連結リー群,  $\mathfrak{g}$  をそのリー代数とする. 単位元を  $e$  で表す. 閉区間  $[0, 1]$  から  $\mathfrak{g}$  への  $L^2$  可積分写像全体のなす空間  $V_{\mathfrak{g}} := L^2([0, 1], \mathfrak{g})$  は, 通常,  $\mathfrak{g}$  の内積  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  を固定して  $L^2$  内積  $\langle u, v \rangle_{L^2} := \int_0^1 \langle u(t), v(t) \rangle dt$  を定め,  $L^2$  ノルムが有限という条件により定義される. しかし,  $\mathfrak{g}$  の有限次元性から,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  の取り方を変えても得られる  $L^2$  ノルムは互いに同値となる. よって  $\mathfrak{g}$  に内積を固定しなくても, 完備な内積が存在する位相ベクトル空間 (いわゆる Hilbertable 空間) として  $V_{\mathfrak{g}} := L^2([0, 1], \mathfrak{g})$  が定まる.

連続写像  $c: [0, 1] \rightarrow G$  が Sobolev クラス  $H^1$  に属するとは,  $G$  の任意の局所座標  $(U, \phi)$  に対して  $\phi \circ c: I' := c^{-1}(U) \rightarrow U \rightarrow \mathbb{R}^n$  が Sobolev 空間  $H^1(I', \mathbb{R}^n)$  に属す

ることをいう．Sobolev クラス  $H^1$  に属する写像  $[0, 1] \rightarrow G$  全体を  $\mathcal{G} := H^1([0, 1], G)$  で表す． $\mathcal{G}$  はヒルベルト多様体となる．更に  $\mathcal{G}$  の群構造が各点積により定まり，その群構造は滑らか，つまり  $\mathcal{G}$  はヒルベルト・リー群となる． $\mathcal{G}$  は  $V_{\mathfrak{g}}$  にアファイン変換  $g * u := \text{Ad}(g)u - dr_g^{-1}(g')$  により推移的に作用する．ここで  $g'$  は  $g$  の弱微分を表し， $r_g$  は  $g$  による右移動を表す． $g$  による左移動は  $l_g$  で表す．

平行移動写像  $\Phi : V_{\mathfrak{g}} \rightarrow G$  は，従来と同様に，常微分方程式  $dl_g^{-1}(g') = u$ ,  $g(0) = e$  の一意解  $g = g_u \in \mathcal{G}$  により  $\Phi(u) := g_u(1)$  と定義される．ただしその解の一意存在性は自明でない．既知の証明では  $G$  のコンパクト性を用いるため，別の証明が必要となる [5]．

**命題 3.1** (Palais-Terng [10, 11]).  $\Phi(g * u) = g(0)\Phi(u)g(1)^{-1}$ . つまり，次の図式は可換：

$$\begin{array}{ccccc} g & \in & \mathcal{G} & \curvearrowright & V_{\mathfrak{g}} & g * u := \text{Ad}(g)u - dr_g^{-1}(g') \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \Phi & \\ (g(0), g(1)) & \in & G \times G & \curvearrowright & G & (b, c) \cdot a := bac^{-1} \end{array}$$

平行移動写像  $\Phi : V_{\mathfrak{g}} \rightarrow G$  の  $\mathcal{G}$  不変な水平分布  $\mathcal{H}^G$  が  $\mathcal{H}^G(\hat{0}) := \hat{\mathfrak{g}}$  により一意に定まる．ここで  $\hat{x} \in V_{\mathfrak{g}}$  は  $x \in \mathfrak{g}$  に値を持つ定道を表し， $\hat{\mathfrak{g}}$  は  $\mathfrak{g}$  に値を持つ定道全体を表す．

$G$  の標準接続を  $\nabla^G$  で表す ( $\nabla_X^G Y := \frac{1}{2}[X, Y]$ ,  $X, Y \in \mathfrak{g}$ ).  $V_{\mathfrak{g}}$  の平坦接続を  $D$  で表す．

**定理 3.2** ([5]). 平行移動写像  $\Phi : (V_{\mathfrak{g}}, D) \rightarrow (G, \nabla^G)$  は，アファイン沈め込み with 水平分布  $\mathcal{H}^G$  となる．更に，基本テンソル  $\mathcal{A}$  の  $\mathcal{H}^G \times \mathcal{H}^G$  への制限は交代形式である．

**注意 3.3.** Terng と Thorbergsson [12] は， $G$  がコンパクト・リー群 with 両側不変リーマン計量  $\rho$  のとき， $\Phi : (V_{\mathfrak{g}}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}^{\rho}) \rightarrow (G, \rho)$  がリーマン沈め込みとなることを示した．ここで  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}^{\rho}$  は  $\text{Ad}(G)$  不変な  $\mathfrak{g}$  の内積  $\langle \cdot, \cdot \rangle^{\rho}$  から定まる  $L^2$  内積を表す．Koike [3] は， $G$  が半単純リー群 with 両側不変な擬リーマン計量  $\rho$  のとき， $\Phi : (V_{\mathfrak{g}}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}^{\rho}) \rightarrow (G, \rho)$  が擬リーマン沈め込みとなることを示した．これら双方の場合において，計量から定まる水平分布は上の  $\mathcal{H}^G$  と一致する．従って，定理 3.2 はこれら双方の結果を拡張する．

$K$  を  $G$  の閉部分群 with リー代数  $\mathfrak{k}$  とする．射影を  $\pi : G \rightarrow G/K$  で表す．等質空間  $G/K$  上の平行移動写像が  $\Phi_{G/K} := \pi \circ \Phi : V_{\mathfrak{g}} \rightarrow G \rightarrow G/K$  で定まる．特に  $\Phi_{G/\{e\}} = \Phi$  である．また， $\Phi_{(G \times G)/\Delta G}$  は  $\Phi$  と自然に同一視できる．

**命題 3.4.**  $\mathcal{G}_K := \{g \in \mathcal{G} \mid g(1) \in K\}$  とおく． $g \in \mathcal{G}_K$  および  $u \in V_{\mathfrak{g}}$  に対して  $\Phi_{G/K}(g * u) = g(0)\Phi_{G/K}(u)$  が成り立つ．つまり，次の図式は可換：

$$\begin{array}{ccccc} g & \in & \mathcal{G}_K & \curvearrowright & V_{\mathfrak{g}} & g * u := \text{Ad}(g)u - dr_g^{-1}(g') \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \Phi_{G/K} & \\ g(0) & \in & G & \curvearrowright & G/K & b \cdot aK := (ba)K \end{array}$$

以下，等質空間  $G/K$  が **reductive**，つまり  $\mathfrak{g}$  の  $\text{Ad}(K)$  不変部分空間  $\mathfrak{p}$  が存在して  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$  (ベクトル空間の直和) が成り立つと仮定する．このとき， $\Phi_{G/K}$  の  $\mathcal{G}_K$  不変な

水平分布  $\mathcal{H}^{G/K}$  が  $\mathcal{H}^{G/K}(\hat{0}) = \hat{\mathfrak{p}}$  により一意に定まる．また，トーシヨン 0 かつ  $G$  不変な  $G/K$  の接続であって，任意の  $X \in \mathfrak{p}$  に対して  $(\exp tX)K$  が  $G/K$  の測地線となるものが一意に定まる．これを  $G/K$  の natural torsion-free 接続と呼び  $\nabla^{G/K}$  で表す [8].

**定理 3.5** ([6]).  $\Phi_{G/K} : (V_{\mathfrak{g}}, D) \rightarrow (G/K, \nabla^{G/K})$  は，アファイン沈め込み with 水平分布  $\mathcal{H}^{G/K}$  となる．更に，基本テンソル  $\mathcal{A}$  の  $\mathcal{H}^{G/K} \times \mathcal{H}^{G/K}$  への制限は交代形式である．

上の定理を  $G/K$  が対称空間である場合に適応することで，次を得る：

**系 3.6** ([5]).  $G/K$  を対称空間， $\nabla^{G/K}$  を  $G/K$  標準接続とする．このとき平行移動写像  $\Phi_{G/K} : (V_{\mathfrak{g}}, D) \rightarrow (G/K, \nabla^{G/K})$  は，アファイン沈め込み with 水平分布  $\mathcal{H}^{G/K}$  となる．更に，基本テンソル  $\mathcal{A}$  の  $\mathcal{H}^{G/K} \times \mathcal{H}^{G/K}$  への制限は交代形式である．

上の系は， $G/K$  がコンパクトまたは非コンパクト型リーマン対称空間の場合 (Terng-Thorbergsson [12], Koike [3]) の拡張である（計量から定まる水平分布は  $\mathcal{H}^{G/K}$  と一致）．

## 4 フレドホルム性

$V$  を Hilbertable 空間， $D$  を平坦接続， $M$  を  $(V, D)$  の部分多様体 with 横断束  $\mathcal{W}$  とする．次の 2 条件を考える：

- (A) 終点写像  $\eta : \mathcal{W} \rightarrow V$ ,  $(p, \xi) \mapsto p + \xi$  は指数 0 のフレドホルム写像  
(i.e. 各  $(p, \xi) \in \mathcal{W}$  に対して  $\text{Ker}(d\eta)_{(p, \xi)}$  と  $\text{Coker}(d\eta)_{(p, \xi)}$  は有限次元かつ同次元)
- (B) 各  $(p, \xi) \in \mathcal{W}$  に対して  $A_{\xi} : T_p M \rightarrow T_p M$  はコンパクト作用素．

条件 (B) は， $A_{\xi}$  の固有値（主曲率）を扱う上で重要である．フレドホルム作用素の一般論から「(B)  $\Rightarrow$  (A)」が従うが，逆は一般に不明である． $M$  がヒルベルト空間  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  の（リーマン）部分多様体ならば， $A_{\xi}$  の自己共役性から (A) と (B) は同値となり，これらの同値条件を満たす部分多様体はフレドホルム部分多様体と呼ばれる [10, 11].

次の定理は， $G/K$  がコンパクトまたは非コンパクト型リーマン対称空間の場合の結果 (Terng-Thorbergsson [12], Koike [3]) の一般化である：

**定理 4.1** ([7]).  $G/K$  を reductive 等質空間 with 分解  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$  とする． $\Phi_{G/K} : V_{\mathfrak{g}} \rightarrow G/K$  を平行移動写像とする． $M$  を  $G/K$  の部分多様体 with 横断束  $\mathcal{W}$  とする． $\mathcal{W}$  の水平リフトを  $\hat{\mathcal{W}}$  で表す．このとき逆像  $\Phi_{G/K}^{-1}(M)$  は  $V_{\mathfrak{g}}$  の部分多様体 with 横断束  $\hat{\mathcal{W}}$  であって条件 (B) を満たす．

本稿では，(B) を満たす部分多様体を**フレドホルム部分多様体**と呼ぶことにする．

## 5 弱鏡映部分多様体

$(N, \nabla^N)$  をアファイン多様体， $M$  を  $N$  の部分多様体 with 横断束  $\mathcal{W}$  とする． $M$  が**弱鏡映** [2, 5] であるとは，各  $(p, \xi) \in \mathcal{W}$  に対してあるアファイン変換  $\nu : N \rightarrow N$  が存在し

て条件  $\nu(p) = p$ ,  $\nu(M) = M$ ,  $d\nu(\xi) = -\xi$ ,  $d\nu(W) = W$  が成り立つことをいう．特に、各  $\nu$  が特定の群  $S$  から選べるとき、 $M$  は  $S$  弱鏡映であるという．

次の定理は、 $G/K$  がコンパクト正規等質空間の場合 [4] を一般化すると同時に、アファイン弱鏡映部分多様体の非自明な例を与える．

**定理 5.1** ([5]).  $G/K$  を reductive 等質空間 with 分解  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$  とする．このとき、平行移動写像  $\Phi_{G/K} : V_{\mathfrak{g}} \rightarrow G/K$  の各ファイバーは  $(V_{\mathfrak{g}}, D)$  の弱鏡映フレドホルム部分多様体である（横断束は水平分布の制限として定める）．

次の定理は、アファイン対称空間内の弱鏡映部分多様体の特徴づけを与える．これは、 $N$  が既約なコンパクト型リーマン対称空間の場合 [4] を一般化する．

**定理 5.2** ([5]).  $(N, \nabla^N)$  をアファイン対称空間、 $p \in N$  とする．アファイン変換群を  $\tilde{G}$ 、単位元連結成分を  $G$ 、 $p$  における  $\tilde{G}$  の固定部分群を  $\tilde{K}$  とし  $K := \tilde{K} \cap G$  とおく． $M$  を  $G/K = N$  の部分多様体 with 横断束  $W$  とする． $\hat{M} := \Phi_{G/K}^{-1}(M)$  の横断束を  $W$  の水平リフト  $\hat{W}$  で定める．このとき次は同値：(i)  $M$  は弱鏡映、(ii)  $\hat{M}$  は  $S$ -弱鏡映かつフレドホルム．ここで  $S := \{g \in H^1([0, 1], \tilde{G}) \mid g(1) \in \tilde{K}\}$ ．

## 参考文献

- [1] N. Abe, K. Hasegawa, *An affine submersion with horizontal distribution and its applications*, Differential Geom. Appl. **14** (2001), no. 3, 235–250.
- [2] O. Ikawa, T. Sakai, H. Tasaki, *Weakly reflective submanifolds and austere submanifolds*. J. Math. Soc. Japan **61** (2009), no. 2, 437–481.
- [3] N. Koike, *Submanifold geometries in a symmetric space of non-compact type and a pseudo-Hilbert space*, Kyushu J. Math. **58** (2004), no. 1, 167–202.
- [4] M. Morimoto, *On weakly reflective PF submanifolds in Hilbert spaces*, Tokyo J. Math. **44** (2021), no. 1, pp. 103–124.
- [5] M. Morimoto, *The parallel transport map over affine symmetric space*, preprint.
- [6] M. Morimoto, *The parallel transport map over reductive homogeneous space*, preprint.
- [7] M. Morimoto, *On curvatures of affine Fredholm submanifolds*, in preparation.
- [8] K. Nomizu, *Invariant affine connections on homogeneous spaces*, Amer. J. Math. **76** (1954), 33–65.
- [9] K. Nomizu, T. Sasaki, *Affine Differential Geometry*, Cambridge Tracts in Math., 111 Cambridge University Press, Cambridge, 1994, xiv+263 pp.
- [10] R. S. Palais, C.-L. Terng, *Critical Point Theory and Submanifold Geometry*, Lecture Notes in Mathematics, **1353**. Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [11] C.-L. Terng, *Proper Fredholm submanifolds of Hilbert space*. J. Differential Geom. **29** (1989), no. 1, 9–47.
- [12] C.-L. Terng, G. Thorbergsson, *Submanifold geometry in symmetric spaces*. J. Differential Geom. **42** (1995), no. 3, 665–718.