

Schrödinger equations on scattering manifolds and microlocal singularities

伊藤 健一 (筑波大学大学院数理物質科学研究科)

1 Introduction

本講演では Schrödinger 方程式の解の特異性について、中村周教授 (東京大学) との共同研究 [7] 及びそれに続く共同研究で得られた結果を紹介する。この問題は既に Craig-Kappeler-Strauss [1], Doi [2], Wunsch [18], Robbiano-Zuily [15, 16, 17], Hassell-Wunsch [3, 4], Nakamura [12, 13, 14], Martinez-Nakamura-Sordani [8, 9], I. [6] 等で、それぞれの設定、視点の下研究されているが、ここでは本研究結果に直接つながる Nakamura [12] のみをやや詳細に引用し、その他の結果との関連はその都度最小限言及するにとどめる。

まず波面集合の半古典的な特徴付けから始めよう。 $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $(x_0, \xi^0) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus 0)$ とする。 u が x_0 において ξ^0 方向に滑らかであるとは、ある $a \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ に対して、 $a(x_0, \xi^0) \neq 0$ かつ

$$\|a^w(x, hD_x)u\|_{L^2} = O(h^N) \quad (h \downarrow 0, \forall N > 0)$$

が成り立つこととする。ただしここで一般に $a \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ に対して、

$$a^w(x, D_x)u(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{i(x-y)\xi} a\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) u(y) dy d\xi \quad (\text{Weyl 量子化}) \quad (1)$$

である。このような (x_0, ξ^0) からなる集合の補集合を u の波面集合と言い $\text{WF}(u)$ であらわす。(1) の作用素 $a^w(x, D_x)$ は Fourier 変換と逆 Fourier 変換の間にシンボル $a(x, \xi)$ を掛けることを意味し、関数 u を仮想的に (x, ξ) -相空間上の関数と見たときの掛算作用素と解釈される。したがって、物理的には、量子状態 u の波面集合 $\text{WF}(u)$ とは空間各点における運動量無限大の成分 (が急減少していない方向) に対応する。周知のように量子力学においては位置と運動量を同時に測定することはできないため、このような言い回しは奇異に感じられるかもしれないが、この逆説は正当化することができ、しかも本研究結果の直観的解釈にも非常に有用である。より一般に、多様体 M 上でも $\text{WF}(u) \subset T^*M \setminus 0$ として波面集合を定義できることに注意しておく。

では H を Schrödinger 作用素とする Schrödinger 方程式

$$i \frac{\partial}{\partial t} u_t = H u_t, \quad u_0 = u$$

の解を $u_t = e^{-itH} u$ としたとき，波面集合 $\text{WF}(e^{-iT H_{\text{fr}}} u)$ はどのように特徴付けられるだろうか．自由 Schrödinger 作用素 H_{fr} ：

$$H_{\text{fr}} = -\Delta = -\left[\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)^2\right]$$

に対してならば，具体的な計算により，

$$\begin{aligned} \|a^w(x, hD_x) e^{-iT H_{\text{fr}}} u\| &= \|[e^{iT H_{\text{fr}}} a^w(x, hD_x) e^{-iT H_{\text{fr}}}] u\| \\ &= \|a^w(x + 2TD_x, hD_x) u\| \end{aligned} \quad (2)$$

となることが知られており， $(x_0, \xi^0) \in \text{WF}(e^{-iT H_{\text{fr}}} u)$ の判定のためには，相空間において，初期状態 u の $\text{supp } a(x + 2T\xi, h\xi)$ ($h \downarrow 0$) 方向への減衰度を測ればよいことが分かる．ここで注意すべきことは，対応する古典的時間発展が $(x, \xi) \rightarrow (x + 2t\xi, \xi)$ で与えられることである．すなわち量子的時間発展は相空間においては古典的時間発展となっているのである（ここでは誤差を含まないが，一般には低階項の誤差が現れる．）

この問題を一般化し，摂動として非捕捉的漸近的 Euclid 計量 g と sublinear ポテンシャル $V \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ を考える．すなわち，ある $\mu > 0$ に対して

$$|\partial_x^\alpha (g_{jk}(x) - \delta_{jk})| \lesssim \langle x \rangle^{-1-\mu-|\alpha|}, \quad |\partial_x^\alpha V(x)| \lesssim \langle x \rangle^{1-\mu-|\alpha|}, \quad \langle x \rangle = (1 + x^2)^{1/2}$$

が成り立つことを仮定して，Schrödinger 作用素

$$H = -\Delta_g + V = \frac{1}{\sqrt{G}} \partial_j g^{jk} \sqrt{G} \partial_k + V, \quad (g^{jk}) = (g_{jk})^{-1}, \quad G = \det(g_{jk})$$

を考える．上で述べたことによれば， $K(x, \xi) = g^{jk}(x) \xi_j \xi_k$ を対応する古典系のハミルトニアン， $\exp tH_K$ をそのハミルトンフローとして

$$\begin{aligned} \|a^w(x, hD_x) e^{-iT H} u\| &= \|[e^{iT H} a^w(x, hD_x) e^{-iT H}] u\| \\ &\sim \|(a \circ \exp(T/h) H_K)^w(x, hD_x) u\| \end{aligned}$$

となることが期待できる．これは実際に正しいのであるが，このままでは超局所解析の議論に乗らないため，ここでは変換された作用素 $[e^{iT H} a^w(x, hD_x) e^{-iT H}]$ をさらに自由 Schrödinger 作用素で引き戻す．つまり，

$$\|a^w(x, hD_x) e^{-iT H} u\| = \|[e^{-iT(-\Delta)} e^{iT H} a^w(x, hD_x) e^{-iT H} e^{iT(-\Delta)}] e^{-iT(-\Delta)} u\|$$

と書きかえる．すると超局所解析的手法が適用できて

$$\begin{aligned} &e^{-iT(-\Delta)} e^{iT H} a^w(x, hD_x) e^{-iT H} e^{iT(-\Delta)} \\ &= (a \circ \exp(T/h) H_K \circ \exp(-T/h) H_{K_{\text{fr}}})^w(x, hD_x) + (\text{error terms}) \end{aligned} \quad (3)$$

が示される．ここで $K_{\text{fr}}(x, \xi) = \xi^2$ は自由系の古典的ハミルトニアンである．シンボル a が点 $(x_0, \xi^0) \in T^*\mathbb{R}^n$ の近くに台を持つとすると，(3) の作用素の主要項のシンボルは $h \rightarrow 0$ の極限において， $\pm T > 0$ に応じて，

$$(x_{\mp}, \xi^{\mp}) = \lim_{h \downarrow 0} \exp(-T/h) H_{K_{\text{fr}}} \circ \exp(T/h) H_K(x_0, \xi^0)$$

の近くに台を持つ．よって次の定理が得られる．

定理 1 (Nakamura [12]) $(\mathbb{R}^n, g)$ を非捕捉的短距離型漸近的 Euclid 空間， V を滑らかで *sublinear* なポテンシャルとし， $H = -\Delta_g + V$ とする．このとき $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ と $\pm T > 0$ に対して

$$(x_0, \xi^0) \in \text{WF}(e^{-iT H} u) \iff (x_{\mp}, \xi^{\mp}) \in \text{WF}(e^{-iT(-\Delta)} u) \quad (4)$$

が成り立つ．あるいは言い換えると， $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ と $\pm T > 0$ に対して

$$(x_0, \xi^0) \in \text{WF}(e^{iTH} e^{-iT(-\Delta)} u) \iff (x_{\pm}, \xi^{\pm}) \in \text{WF}(u) \quad (5)$$

が成り立つ．

注意 1. (4) の右辺は (2) により初期状態 u から計算できるため，この定理が波動関数 $e^{-iT H} u$ の波面集合の特徴付けを与えることに注意する．

2. 関係 (5) から有限時間に対する波動作用素 $e^{iTH} e^{-iT(-\Delta)}$ が Fourier 積分作用素となることが予想される．

次節以降で我々はこの問題を多様体上に拡張し，さらに強い結果を紹介する．

2 散乱多様体

散乱多様体とは Melrose [10] により導入された境界付きコンパクト多様体のクラスであり，境界上で特定の次数で減少するベクトル場に注目することで，境界付近に漸近的 Euclid 空間の無限遠方の構造が与えられたものと解釈される．ここでは散乱多様体を極座標の一般化と捉えなおし，[10] とは異なる定式化を採用する．

M を n 次元多様体として，次の分解 $M = M_0 \cup M_{\infty}$ を仮定する：

$$M_0 \Subset M, \quad M_{\infty} \cong (0, \infty) \times \partial M, \quad (0, 1) \times \partial M \hookrightarrow M_0. \quad (6)$$

∂M は任意の閉多様体であり， M の位相的境界ではないが，区間 $(0, \infty)$ の無限遠方をコンパクト化すれば M の無限遠方における位相的境界として意味を持つ．特に局所座標系

$$(r, \theta) : M_{\infty} \xrightarrow{\cong} (0, \infty) \times \partial M, \quad x \mapsto (r(x), \theta(x)),$$

を考えることで，散乱多様体が極座標の自然な一般化であることがわかる．

定義 M を分解 (6) を持つ多様体とする． M 上の Riemann 計量 g^{cn} が錐型であるとは ∂M 上の Riemann 計量 g^∂ が存在して，

$$g^{\text{cn}} = dr^2 + r^2 g_{jk}^\partial(\theta) d\theta^j d\theta^k \quad \text{for } (r, \theta) \in (1, \infty) \times \partial M.$$

と書けることである．また M 上の Riemann 計量 g^{sc} が散乱計量であるとは錐型計量 g^{cn} 存在して， $m = g^{\text{sc}} - g^{\text{cn}}$ がある $\mu > 0$ に対して

$$m = m^0(r, \theta) dr^2 + r m_j^1(r, \theta) (dr d\theta^j + d\theta^j dr) + r^2 m_{jk}^2(r, \theta) d\theta^j d\theta^k, \\ |\partial_r^j \partial_\theta^\alpha m^l(r, \theta)| \lesssim r^{-\mu-j}, \quad (r, \theta) \in (1, \infty) \times \partial M, \quad l = 0, 1, 2.$$

を満たすことである．Riemann 多様体 (M, g^{sc}) を散乱多様体と呼ぶ．

散乱計量 (g_{jk}^{sc}) の逆行列 (g_{sc}^{jk}) を

$$(g_{\text{sc}}^{jk}) = \begin{pmatrix} 1 + a_0 & r^{-1} a_1 \\ r^{-1} a_1 & r^{-2} g_\partial + r^{-2} a_2 \end{pmatrix}, \quad (g_\partial^{jk}) = (g_{jk}^\partial)^{-1}$$

とすると，計算により，

$$|\partial_r^j \partial_\theta^\alpha a_l(r, \theta)| \lesssim r^{-\mu-j}, \quad l = 0, 1, 2.$$

が従う．さらに a_l が次の条件を満たすときそれぞれ g^{sc} は (i) 動径方向に短距離型，(ii) 動径方向に強短距離型，(iii) 短距離型であるという：

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & |\partial_r^j \partial_\theta^\alpha a_0(r, \theta)| \lesssim r^{-1-\mu-j}, \\ \text{(ii)} \quad & |\partial_r^j \partial_\theta^\alpha a_0(r, \theta)| \lesssim r^{-3/2-\mu-j}, \quad |\partial_r^j \partial_\theta^\alpha a_1(r, \theta)| \lesssim r^{-1/2-\mu-j}, \\ \text{(iii)} \quad & |\partial_r^j \partial_\theta^\alpha a_l(r, \theta)| \lesssim r^{-1-\mu-j}, \quad l = 0, 1, 2. \end{aligned}$$

条件 (i), (ii) は Morawetz 評価式に現れる作用素の形に関連しているが，ここでは，短距離型条件の亜種として，定理の主張を精密化するための技巧的な条件と考えてもよい．計量に対応する Laplace-Beltrami 作用素 Δ_{sc} を用いて Schrödinger 作用素

$$H = -\Delta_{\text{sc}} + V \quad \text{on } \mathcal{H} = L^2(M, \sqrt{G_{\text{sc}}} dx),$$

を考えよう．局所座標を用いて表示すれば

$$\Delta_{\text{sc}} = \frac{1}{\sqrt{G_{\text{sc}}}} \sum_{j,k=1}^n \partial_j g_{\text{sc}}^{jk} \sqrt{G_{\text{sc}}} \partial_k, \quad G_{\text{sc}} = \det(g_{jk}^{\text{sc}}).$$

である．ポテンシャル V は実数値で滑らかであるとし，ある $\nu > 0$ に対して，

$$|\partial_r^j \partial_\theta^\alpha V(r, \theta)| \lesssim r^{2-\nu-j}.$$

を満たすとする．(i) $\nu = \mu > 0$, (ii) $\nu = 1 + \mu > 1$, (iii) $\nu = 3 + \mu > 3$ に応じてそれぞれ (i) subquadratic, (ii) sublinear, (iii) subcoulomb ということにする．

3 波動作用素

3.1 量子的波動作用素

第1節で述べた Nakamura [12] のアイデアにしたがって e^{-itH} を自由系における時間発展 $e^{-itH_{\text{fr}}}$ と比較しよう．散乱多様体上の場合，最も自然な非摂動系は錐型計量 g_{cn} に関する Laplace-Beltrami 作用素 $H_{\text{cn}} = -\Delta_{\text{cn}}$ である．が，しかし，我々はこの系を自由系として採用しない．実際 g^{cn} は一般的な計量 g^∂ を含んでおり，後に見るようにある領域の上において古典波動作用素の計算は可能であるが，それでもなお，簡単な系ではない．また M_0 上での g^{cn} の選び方も一意的には定まらない．ここで我々が採用する自由系は多様体 $M_{\text{fr}} = \mathbb{R} \times \partial M$ 上の作用素

$$H_{\text{fr}} = -\partial_r^2 \quad \text{on } \mathcal{H}_{\text{fr}} = L^2(M_{\text{fr}}, \sqrt{G_\partial} dr d\theta), \quad G_\partial = \det(g_{jk}^\partial)$$

である． M_{fr} には散乱多様体としての構造を考えないことに注意する．Schwartz 空間を

$$\mathcal{S}(M_{\text{fr}}) = \{u \in C^\infty(M_{\text{fr}}); \forall j \in \mathbb{Z}_+, \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n \sup_{(r,\theta) \in M_{\text{fr}}} \langle r \rangle^j |\partial_{(r,\theta)}^\alpha u(r, \theta)| < \infty\},$$

$$\mathcal{S}(M) = \{u \in C^\infty(M); \forall j \in \mathbb{Z}_+, \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n \sup_{(r,\theta) \in M_\infty} \langle r \rangle^j |\partial_{(r,\theta)}^\alpha u(r, \theta)| < \infty\},$$

で定義する．次の二つの定理は Euclid 空間上の場合と同様に示される．

定理 2 1. 自由 *Schrödinger* 作用素 $H_{\text{fr}} = -\partial_r^2$ は $\mathcal{S}(M_{\text{fr}})$ 上本質的自己共役である．その閉包を同じ記号で表せば

$$\sigma_{\text{ess}}(H_{\text{fr}}) = \sigma_{\text{ac}}(H_{\text{fr}}) = [0, \infty), \quad \sigma_{\text{disc}}(H_{\text{fr}}) = \sigma_{\text{pp}}(H_{\text{fr}}) = \sigma_{\text{sc}}(H_{\text{fr}}) = \emptyset$$

である．

2. 動径方向に短距離型な散乱多様体 (M, g^{sc}) と滑らかで *subquadratic* なポテンシャル V に対して $H = -\Delta_{\text{sc}} + V$ は $\mathcal{S}(M)$ 上本質的自己共役である．その閉包を同じ記号で表す．もしさらにポテンシャルが *subcoulomb* であれば，

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{ess}}(H) &= [0, \infty), & \sigma_{\text{disc}}(H) &\subset [\inf_M V, 0) \quad (= \emptyset \text{ if } \inf_M V \geq 0), \\ \sigma_{\text{ac}}(H) &= [0, \infty), & \sigma_{\text{pp}}(H) &\subset [\inf_M V, \infty), & \sigma_{\text{sc}}(H) &= \emptyset, \end{aligned}$$

であり， $\sigma_{\text{pp}}(H)$ は重複度も込めて 0 にしか集積し得ない．

関数 $j \in C^\infty((0, \infty))$ を

$$j(r) = \begin{cases} 1, & \text{if } r \geq 2, \\ 0, & \text{if } r \leq 1, \end{cases}$$

のようにとって $J: \mathcal{H}_{\text{fr}} \rightarrow \mathcal{H}$ を

$$(Ju)(x) = \begin{cases} j(r(x))[G_{\partial}(\theta(x))/G_{\text{sc}}(x)]^{1/4}u(r(x), \theta(x)), & \text{if } x \in M_{\infty}, \\ 0, & \text{if } x \notin M_{\infty} \end{cases}$$

で定義する．密度の変換のために因子 $[G_{\partial}(\theta(x))/G_{\text{sc}}(x)]^{1/4}$ が入っているが，それ以外は単なる cutoff と同一視 $M_{\infty} = (0, 1) \times \partial M$ の合成であることに注意する．また，動径方向の Fourier 変換を

$$\mathcal{F}_{\text{r}}: \mathcal{S}'(M_{\text{fr}}) \rightarrow \mathcal{S}'(\hat{M}_{\text{fr}}), \quad (\mathcal{F}_{\text{r}}u)(\rho, \theta) = \int e^{-ir\rho}u(r, \theta) dr \quad \text{for } u \in \mathcal{S}'(M_{\text{fr}}),$$

により定義する．ただし， $\hat{M}_{\text{fr}} = \mathbb{R}_{\rho} \times \partial M$ である．

定理 3 (M, g^{sc}) を動径方向に短距離型な散乱多様体， V を滑らかで *subcoulomb* なポテンシャルとする．このとき波動作用素

$$W_{\pm} = \text{s-lim}_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itH} J e^{-itH_{\text{fr}}}: \mathcal{H}_{\text{fr}} \rightarrow \mathcal{H},$$

が存在して，これらは

$$\mathcal{H}_{\text{fr}, \pm} = \{u \in \mathcal{H}_{\text{fr}}; \text{supp } \mathcal{F}_{\text{r}}u \subset \mathbb{R}_{\pm} \times \partial M\}, \quad \mathbb{R}_{\pm} = \{\rho \in \mathbb{R}; \pm\rho \geq 0\},$$

を始空間とする部分等長作用素である．さらに $\text{Ran } W_{\pm} = \mathcal{H}_{\text{ac}}(H)$ が成り立つ．すなわち $W_{\pm}$ は完全である．

摂動に当たる部分 $HJ - JH_{\text{fr}}$ は H_{fr} に対して相対コンパクトではないが，この困難は適当な方法を用いて回避することができる．

3.2 古典的波動作用素

第 1 節に従って古典的波動作用についても定式化しておく必要がある． $K(x, \xi) = \sum_{j,k=1}^n g_{\text{sc}}^{jk}(x)\xi_j\xi_k$ とする． (M, g^{sc}) 上の自由 Hamilton 方程式

$$\dot{x} = \frac{\partial K}{\partial \xi}(x, \xi), \quad \dot{\xi} = -\frac{\partial K}{\partial x}(x, \xi), \quad (x(0), \xi(0)) = (x_0, \xi^0) \in T^*M$$

の解を $\exp tH_K(x_0, \xi^0) = (x(t; x_0, \xi^0), \xi(t; x_0, \xi^0))$ であらわす． $(x_0, \xi^0) \in T^*M$ が前，後ろに非捕捉的であるとは，それぞれ時間 $t \rightarrow \pm\infty$ の極限において $x(t; x_0, \xi_0)$ が M の任意のコンパクト集合の外に出ることとし，前，後ろに捕捉的な点の集合を $\mathcal{I}_{\pm}$ であらわす．同一視

$$J_{\text{cl}}: T^*M_{\text{fr}} \supset T^*((0, \infty) \times \partial M) \xrightarrow{\cong} T^*M_{\infty}, \quad J_{\text{cl}}^* = (J_{\text{cl}})^{-1},$$

の下，古典的逆散乱作用素が存在して微分同相となる：

$$w_{\pm}^* = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \exp(-tH_{K_{\text{fr}}}) \circ J_{\text{cl}}^* \circ \exp tH_K : T^*M \setminus \mathcal{T}_{\pm} \xrightarrow{\cong} T^*M_{\text{fr}} \setminus \mathcal{T}_{\text{fr},\pm}.$$

ここで， $K_{\text{fr}}(r, \rho, \theta, \omega) = \rho^2$ であり，

$$(r, \rho, \theta, \omega) = (r, \rho; \theta, \omega) \in T^*M_{\text{fr}} \cong T^*\mathbb{R} \times T^*\partial M$$

は $(r, \theta) \in M_{\text{fr}} = \mathbb{R} \times \partial M$ から誘導される T^*M_{fr} の局所座標系である．さらに

$$\mathcal{T}_{\text{fr},\pm} = \{(r, \rho, \theta, \omega) \in T^*M_{\text{fr}}; \pm\rho \leq 0\}$$

と置いた．

4 波動作用素の超局所的構造

シンボルクラス $S_{\rho}^m = S_{\rho,1-\rho}^m$, $1/2 < \rho \leq 1$ を Hörmander [5] の意味で用いる：

$$a \in S_{\rho}^m \iff |\partial_x^{\alpha} \partial_{\xi}^{\beta} a(x, \xi)| \lesssim \langle \xi \rangle^{m+(1-\rho)|\alpha|-\rho|\beta|}.$$

定理 4 (M, g^{sc}) を動径方向に短距離型な散乱多様体， V を滑らかで *sublinear* なポテンシャルとし，任意の $u \in \mathcal{H}_{\text{fr}}$ をとる．このとき $\pm T > 0$ に対して，

$$\text{WF}(W_T u) \setminus \mathcal{T}_{\pm} = (w_{\pm}^*)^{-1}[\text{WF}(u) \setminus \mathcal{T}_{\text{fr},\pm}], \quad (7)$$

が成り立つ．さらに g^{sc} が非捕捉的であると仮定すると，すなわち， $\mathcal{T}_+ = \mathcal{T}_- = 0$ とすると，有限波動作用素 $W_T : \mathcal{H}_{\text{fr}} \rightarrow \mathcal{H}$, $T \neq 0$ は *Fourier* 積分作用素であり，その振幅関数は S_1^0 に属し，正準関係は

$$\mathcal{C}_T = \{(x, \xi; r, \rho, \theta, \omega) \in (T^*M \setminus 0) \times (T^*M_{\text{fr}} \setminus 0); (r, \rho, \theta, \omega) = w_T^*(x, \xi)\}.$$

で与えられる．

注意 定理 4 は Hassell-Wunsch [4] に類似しているが，設定は異なる．また証明に用いる道具立ても異なる．

定理 4 の前半の主張と超局所平滑化作用と合わせることにより，次の系が従う．

系 5 (M, g^{sc}) は動径方向に短距離型であり， V は滑らかで *sublinear* であるとし，任意の $u \in \mathcal{H}$ をとる．このとき任意の $(x_0, \xi^0) \in T^*M \setminus \mathcal{T}_{\mp}$, $\pm T > 0$ に対して，

$$(x_0, \xi^0) \in \text{WF}(e^{-iT H} u) \iff w_{\mp}^*(x_0, \xi^0) \in \text{WF}(e^{-iT H_{\text{fr}}} J^* u),$$

が成り立つ．

注意 第 1 節で紹介した結果とは本質的に異なる比較系を用いているため, Nakamura [12] の結果は系 5 の特別な場合ではない.

正準関係 $\mathcal{C}_T$ は錐型ではないが, ファイバー方向無限遠方では錐型な正準関係 $\mathcal{C}_\pm = \mathcal{C}_{\pm\infty}$ に近づく. したがって振幅関数のクラスが悪くなることを許せば, 定理 4 の Fourier 積分作用素は斉次な相関数を用いて表示できる.

系 6 (M, g^{sc}) は非捕捉的で動径方向に強短距離型であり, V は滑らかで *sublinear* であるとする. 有限波動作用素 $W_T: \mathcal{H}_{\text{fr}} \rightarrow \mathcal{H}$, $\pm T > 0$ は Fourier 積分作用素であり, その振幅関数は $S_{1/2+\mu}^0$ に属し, 正準関係は

$$\mathcal{C}_\pm = \{(x, \xi; r, \rho, \theta, \omega) \in (T^*M \setminus 0) \times (T^*M_{\text{fr}} \setminus 0); (r, \rho, \theta, \omega) = w_\pm^*(x, \xi)\},$$

で与えられる.

さらに定理 4 の主張はそのまま $T = \pm\infty$ の場合にまで拡張される.

定理 7 (M, g^{sc}) を動径方向に短距離型な散乱多様体, V を滑らかなで *subcoulomb* なポテンシャルとする. $u \in \mathcal{H}_{\text{fr}}$ に対して

$$\text{WF}(W_\pm u) \setminus \mathcal{T}_\pm = (w_\pm^*)^{-1}[\text{WF}(u) \setminus \mathcal{T}_{\text{fr}, \pm}], \quad (8)$$

が成立する. さらに g^{sc} が非捕捉的であると仮定すると, 波動作用素 $W_\pm$ は Fourier 積分作用素であり, その振幅関数は S_1^0 に属し, 正準関係は $\mathcal{C}_\pm$ で与えられる.

5 散乱作用素と散乱波面集合

前節までの議論は散乱作用素 $S = W_+^* W_-: \mathcal{H}_{\text{fr}, -} \rightarrow \mathcal{H}_{\text{fr}, +}$ に対する散乱波面集合の解析にも応用することができる. ここで散乱波面集合とは次で定義される集合である. (cf. Melrose [10], Melrose-Zworski [11])

定義 $u \in \mathcal{S}'(M_{\text{fr}})$ と $(r_0, \rho^0, \theta_0, \omega^0) \in T^*M_{\text{fr}}$ に対し, ある $a \in C_0^\infty(T^*M_{\text{fr}})$ が存在し, $a(r_0, \rho^0, \theta_0, \omega^0) \neq 0$ かつ

$$\|a^w(hr, D_r, \theta, hD_\theta)u\|_{\mathcal{H}_{\text{fr}}} = O(h^\infty), \quad h \downarrow 0.$$

が満たされるとき, $(r_0, \rho^0, \theta_0, \omega^0)$ は u の散乱波面集合に属さないと言い,

$$(r_0, \rho^0, \theta_0, \omega^0) \notin \text{WF}_{\text{sc, fr}}(u)$$

であらわす. 散乱波面集合 $\text{WF}_{\text{sc, fr}}(u) (\subset T^*M_{\text{fr}})$ はこのような $(r_0, \rho^0, \theta_0, \omega^0)$ 全体の集合の補集合として定義される.

通常の波面集合が古典的には運動量無限大の粒子に対応していたのに対し，散乱波面集合は無限遠方を動く粒子に対応している．無限遠方では散乱計量が完全に錐型となることから，散乱波面集合の解析には $K_{\text{cn}}(x, \xi) = \sum_{j,k=1}^n g_{\text{cn}}^{jk}(x) \xi_j \xi_k$ をハミルトニアンとする自由 Hamilton 方程式

$$\dot{x} = \frac{\partial K_{\text{cn}}}{\partial \xi}(x, \xi), \quad \dot{\xi} = -\frac{\partial K_{\text{cn}}}{\partial x}(x, \xi)$$

を調べる必要がある．第 3 節と同様に，錐型計量に関する古典波動作用素

$$\begin{aligned} w_{\text{cn}, \pm} &= \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \exp(-tH_{K_{\text{cn}}}) \circ J_{\text{cl}} \circ \exp tH_{K_{\text{fr}}} : \mathcal{U}_{\text{fr}, \pm} \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_0, \\ \mathcal{U}_{\text{fr}, \pm} &= \{(r, \rho, \theta, \omega) \in T^*M_{\text{fr}}; \pm\rho > 0, \omega \neq 0\}, \\ \mathcal{U}_0 &= \{(r, \rho, \theta, \omega) \in T^*M_{\infty}; r > 0, \omega \neq 0\} \end{aligned}$$

が存在する．さらにこれは具体的に書き下すことができ，特に古典散乱作用素 $s_{\text{cn}} = w_{\text{cn}, +}^* \circ w_{\text{cn}, -} : \mathcal{U}_{\text{fr}, -} \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_{\text{fr}, +}$ ($w_{\text{cn}, +}^* = w_{\text{cn}, +}^{-1}$) が次の式によって与えられる．

$$s_{\text{cn}}(r, \rho, \theta, \omega) = (-r, -\rho, \exp \pi H_{\sqrt{K_{\partial}}}(\theta, \omega)), \quad K_{\partial}(\theta, \omega) = \sum_{j,k=1}^{n-1} g_{\partial}^{jk}(\theta) \omega_j \omega_k.$$

定理 8 (M, g^{sc}) を動径方向に短距離型な散乱多様体， V を滑らかで *subcoulomb* なポテンシャルとする． $S: \mathcal{H}_{\text{fr}, -} \rightarrow \mathcal{H}_{\text{fr}, +}$ を散乱作用素， $s_{\text{cn}}: \mathcal{U}_{\text{fr}, -} \rightarrow \mathcal{U}_{\text{fr}, +}$ を錐型計量に関する古典散乱作用素とすると，このとき $u \in \mathcal{H}_{\text{fr}}$ に対して

$$\text{WF}_{\text{sc}, \text{fr}}(Su) \cap \mathcal{U}_{\text{fr}, +} = s_{\text{cn}}(\text{WF}_{\text{sc}, \text{fr}}(u) \cap \mathcal{U}_{\text{fr}, -}) \quad (9)$$

が成り立つ．さらに (M, g^{sc}) が短距離型であると仮定する．

$$\hat{S} = \mathcal{F}_r S \mathcal{F}_r^*: \hat{\mathcal{H}}_{\text{fr}, -} \rightarrow \hat{\mathcal{H}}_{\text{fr}, +}, \quad \hat{M}_{\text{fr}, \pm} = \{\rho \in \mathbb{R}_{\rho}; \pm\rho > 0\} \times \partial M$$

とおくと，原点の近くで 1 をとる $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ に対して，作用素

$$\hat{S} \left[1 - \chi \left(\frac{|D_\theta|}{\langle D_\rho \rangle} \right) \right], \quad \left[1 - \chi \left(\frac{|D_\theta|}{\langle D_\rho \rangle} \right) \right] \hat{S}: C_0^\infty(\hat{M}_{\text{fr}, -}) \rightarrow C^\infty(\hat{M}_{\text{fr}, +})$$

は *Fourier* 積分作用素であり，その振幅関数は S_1^0 に属し，正準関係は

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\text{cn}} &= \{(\rho, r, \theta, \omega; \rho', r', \theta', \omega') \in (T^*\hat{M}_{\text{fr}, +} \setminus 0) \times (T^*\hat{M}_{\text{fr}, -} \setminus 0); \\ &\quad (r, \rho, \theta, \omega) = s_{\text{cn}}(r', \rho', \theta', \omega'), \omega \neq 0, \omega' \neq 0\}. \end{aligned}$$

で与えられる．

Melrose-Zworski [11] によれば，絶対散乱行列 $A(\rho)$ は *Fourier* 積分作用素であり，その振幅関数は S_1^0 に属し，正準関係は

$$\mathcal{C}_{\partial} = \{(\theta, \omega; \theta', \omega') \in (T^*\partial M \setminus 0) \times (T^*\partial M \setminus 0); (\theta, \omega) = \exp \pi H_{\sqrt{K_{\partial}}}(\theta', \omega')\}$$

で与えられる．定理 8 は定性的にはこの主張と同じ内容を示唆している．

参考文献

- [1] W. Craig, T. Kappeler, W. Strauss, Microlocal dispersive smoothing for the Schrödinger equation, *Comm. Pure Appl. Math.* **48** (1995), 769-860.
- [2] S. Doi, Smoothing effects of Schrödinger evolution groups on Riemannian manifolds, *Duke Math J.* **82** (1996), 679-706.
- [3] A. Hassell, J. Wunsch, On the structure of the Schrödinger propagator, *Partial Differential Equations and Inverse Problems, Contemp. Math.* **362** (2004), 199-209.
- [4] A. Hassell, J. Wunsch, The Schrödinger propagator for scattering metrics, *Ann. Math.* **162**, 487-523.
- [5] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators III*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1985.
- [6] K. Ito, Propagation of singularities for Schrödinger equations on the Euclidean space with a scattering metric, *Comm. Partial Differential Equations* **31** (2006), 1735-1777.
- [7] K. Ito, S. Nakamura, *Singularity of solutions to Schrödinger equation on scattering manifold*, Preprint 2007. Available at <http://arxiv.org/abs/0711.3258>.
- [8] A. Martinez, S. Nakamura, V. Sordoni, Analytic Smoothing Effect for the Schrödinger Equation with Long-Range Perturbation, *Comm. Pure Appl. Math.* **59** (2006), 1330-1351.
- [9] A. Martinez, S. Nakamura, V. Sordoni, Analytic wave front for solutions to Schrödinger equation, Preprint, June 2007. Available at <http://arxiv.org/abs/0706.0415>.
- [10] R. B. Melrose, Spectral and scattering theory for the Laplacian on asymptotically Euclidian spaces, *Spectral and scattering theory* (M. Ikawa, ed.), Marcel Dekker, 1994.
- [11] R. B. Melrose, M. Zworski, Scattering metrics and geodesic flow at infinity, *Invent. Math.* **124** (1996), 389-436.
- [12] S. Nakamura, *Wave Front Set for Solutions to Schrödinger Equations*, Preprint 2003. Available at http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~shu/list_of_papers.html.

- [13] S. Nakamura, Propagation of the Homogeneous Wave Front Set for Schrödinger Equations, *Duke Math. J.* **126** (2005), 349-367.
- [14] S. Nakamura, Semiclassical singularity propagation property for Schrödinger equations. Preprint, May 2006 (revised Sep. 2007). Available at <http://arxiv.org/abs/math/0605742>.
- [15] L. Robbiano, C. Zuily, Microlocal analytic smoothing effect for Schrödinger equation, *Duke Math. J.* **100** (1999), 93-129.
- [16] L. Robbiano, C. Zuily, Effet régularisant microlocal analytique pour l'équation de Schrödinger: le cas des données oscillantes, *Comm. Partial Differential Equations* **100** (2000) 1891-1906.
- [17] L. Robbiano, C. Zuily, Analytic Theory for the Quadratic Scattering Wave Front Set and Application to the Schrödinger Equation, *Soc. Math. France, Astérisque* **283** (2002), 1-128.
- [18] J. Wunsch, Propagation of singularities and growth for Schrödinger operators, *Duke Math. J.* **98** (1999), 137-186.