非線型偏微分方程式と動く特異性

(Nonlinear PDEs and moving singularity manifolds)

山根英司（**関西学院大学, 2009 年 4 月から数理科学科**）

http://sci-tech.ksc.kwansei.ac.jp/~yamane/

非線型偏微分方程式の場合は特性面に沿って解の特異性が現れることがよくある．おそらく最もよく知られているのは KdV 方程式 $u_{ttt} - 6uu_t + u_x = 0$ の WTC 解である．$\psi(x)$ が任意の実解析関数のとき， $T = t - \psi(x)$ とおくと，Weiss-Tabor-Carnevale が示したように,

$$u = \frac{2}{T^2} - \frac{1}{6}\psi_x + gT^2 - \frac{1}{36}\psi_{xx}T^3 + hT^4 - \frac{1}{24}g_xT^5 + \dots, \tag{1}$$

の形の解がある． $g = g(x)$ と $h = h(x)$ は任意の実解析関数である．

可積分な方程式なら，任意の非特性面の近傍でローラン級数で表される解があると思われる (そして，多価正則な解は存在しないとも考えられている). 可積分でない方程式も含めて, 非特性面で特異性を持つ解を構成することに興味がある．この方面では小林隆夫, Kichenassamy-Srinivasan, Kichanassamy-Littman らの先行研究がある.

まず田原秀敏との共同研究の結果について述べよう．m 階方程式に関する一般論があるが，ここでは 2 つの特別な場合のみを説明する.

非線型波動方程式

$$\Box u(t,x) = g(t,x;u,\partial_t u,\nabla_x u) \tag{2}$$

を $\mathbb{C}^{n+1} = \mathbb{C}_t \times \mathbb{C}^n_x$ の領域で考える．ここで $\Box = \partial^2/\partial t^2 - \sum_{i=1}^n \partial^2/\partial x_i^2$, $\nabla_x u = (\partial u/\partial x_1,\dots,\partial u/\partial x_n)$ である． $g(t,x;z,\tau,\xi)$ は正則関数で (z,τ,ξ) については整関数だとする．さらに (τ,ξ) については 2 次多項式だとして，その 2 次斉次部分を g_2 と表す．$\psi(x)$ は正則関数で

$$1 - \{\nabla_x\psi(x)\}^2 \neq 0, \quad g_2\big(\psi(x),x;0,1,-\nabla_x\psi(x)\big) \neq 0 \tag{3}$$

をみたすとする．ただし，$v = (v_1,\dots,v_n)$ について $v^2 = \sum_{j=1}^n v_j^2$ とする.

Theorem 1 (田原-Y) (3) が成り立つならば，$\Sigma = \{t = \psi(x)\}$ のある近傍における (2) の解 $u(t,x)$ で

$$u(t,x) \sim -\frac{1 - \{\nabla_x\psi(x)\}^2}{g_2\big(\psi(x),x;0,1,-\nabla_x\psi(x)\big)} \log\big(t - \psi(x)\big) \quad as \quad t \to \psi(x)$$

のような漸近挙動をもつものが存在する．剰余項は Σ 上の任意関数を含む.

次に 3 階の場合を考える．$P(t,x;\partial_t,\partial_x)$ は 3 階の線型偏微分作用素とし，主シンボルを $\sigma(P)$ と表す．P の係数は $t=\psi(x)$ の近傍で正則とする．

$$Pu = g\left(t,x;(\partial_t^j\partial_x^\alpha u)_{j+|\alpha|\le 2}\right). \tag{4}$$

を考える．ここで，$g(t,x;(X_{j,\alpha})_{j+|\alpha|\le 2})$ は $(X_{j,\alpha})_{j+|\alpha|\le 2}$ の整関数だと仮定する．さらに g は $(X_{j,\alpha})_{j+|\alpha|=1,2}$ については 2 次多項式だとし，2 次斉次部分を g_2 と表す．$j+|\alpha|=2$ のときは $X_{j,\alpha}^{(0)}=(-\nabla_x\psi(x))^\alpha$ とおき，それ以外の場合は $X_{j,\alpha}^{(0)}=0$ とする．

$$g_2\left(\psi(x),x;\big(X_{j,\alpha}^{(0)}\big)_{j+|\alpha|\le 2}\right)\neq 0,\quad \sigma(P)\big(t,x;1,-\nabla_x\psi(x)\big)\neq 0 \tag{5}$$

を仮定する．

Theorem 2 (田原-Y) もし (5) が成り立つならば，$\Sigma=\{t=\psi(x)\}$ のある近傍における (4) の解 $u(t,x)$ で，$t\to\psi(x)$ のとき

$$u(t,x)\sim a(x)T\log T,\quad T=t-\psi(x),\quad a(x)=\frac{-\sigma(P)\big(t,x;1,-\nabla_x\psi(x)\big)}{g_2\left(\psi(x),x;\big(X_{j,\alpha}^{(0)}\big)\right)}$$

のような漸近挙動をもつものが存在する．剰余項は Σ 上の任意関数を含む．

最後に，一般化された非線型シュレーディンガー方程式

$$iu_t+u_{xx}=2|u|^2u+a(x,t)u \tag{6}$$

を $\mathbb{R}^2_{x,t}$ の領域で考える（実の話であることに注意）．ここで，$a(x,t)$ は開区間 I の実数値実解析関数 $p_0(t),p_1(t),q(t)$ を用いて

$$a(x,t)=x^2\left(\frac{1}{2}q'(t)-q(t)^2\right)+xp_1(t)+p_0(t)+iq(t) \tag{7}$$

のように表せるとする．

$\psi(t)$ が I 上の任意の実数値実解析関数のとき，$\Psi(x,t)=x+\psi(t)$ とおく．Clarkson は

$$u(x,t)=\sum_{j=0}^{\infty}u_j(t)\Psi(x,t)^{j-1}=\Psi^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}u_j\Psi^j,\quad u_0\neq 0 \tag{8}$$

の形の形式解を構成した．最近私はそれが収束することを証明した．

改めて $\Sigma=\{(x,t);\,t\in I,\,\Psi(x,t)=0\}$ とおくとき，

Theorem 3 (Y) 任意の $\psi(t)$ について，$W\backslash\Sigma$ における (6) の実解析解 $u(x,t)$ で (8) の形のものがある．ここで，$W=W(u)\subset\mathbb{R}^2$ は u に依存して決まる Σ の開近傍であり，和 $\sum_{j=0}^\infty u_j\Psi^j$ は W のある複素近傍で局所一様に収束する．係数 u_0 は絶対値が 1 の任意の複素数であり，$u_3\bar{u}_0$ の虚部と $iu_4\bar{u}_0$ の虚部は任意である．